

REKAPITULACE

Soustava n lineárních ODR 1. řádu je úloha najít (vektorovou funkci) $\vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ takovou, že

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t), \quad t \in I, \text{ kde}$$

máme dáno:

- $I \subset \mathbb{R}$... interval
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$... matice koeficientů
- $\vec{b}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$... vektor pravé strany

$$n = 2$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + b_2(t) \end{aligned}$$

Metody řešení

Platí: Každé řešení lze zapsat ve tvaru

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_H(t) + \vec{y}_P(t)$$

$\vec{y}_H(t)$... **homogenní řešení**
je řešení homogenní rovnice,
tj. pro $\vec{b}(t) = \vec{0}$

⋮

$\vec{y}_P(t)$... **partikulární řešení**
je jedno řešení nehomogenní rovnice,
tj. s pravou stranou $\vec{b}(t)$

Krok 1

Hledáme $\vec{y}_H(t)$, tj. $\vec{b}(t) = \vec{0}$

Platí: Existuje n lineárně nezávislých (vektorových) funkcí

$\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ takových, že

$$\vec{y}_H(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) + \dots + c_n \vec{y}_n(t), \text{ kde } c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

$\{\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)\}$... **fundamentální systém (FS)**

$$\mathbb{Y}(t) := \left(\begin{array}{c|c|c|c} \vec{y}_1(t) & \vec{y}_2(t) & \dots & \vec{y}_n(t) \end{array} \right) \dots \text{fundamentální (Wronského) matice}$$

Platí: $\mathbb{Y}(t)$ je regulární, tj. existuje $[\mathbb{Y}(t)]^{-1}$, protože $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ jsou lineárně nezávislé

$$\vec{c} := (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

Maticový zápis:

$$\vec{y}_H(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{c}$$

Maticový zápis:

$$\vec{y}_H(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{c}$$

$$n = 2$$

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \text{FS: } \{\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t)\}$$

$$\mathbb{Y}(t) = \left(\vec{y}_1(t) \mid \vec{y}_2(t) \right) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{y}_H(t)} &= c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{22}(t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 y_{11}(t) + c_2 y_{21}(t) \\ c_1 y_{12}(t) + c_2 y_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbb{Y}(t) \vec{c}} \end{aligned}$$

Prvky FS hledáme ve tvaru:

$$\boxed{\vec{y}(t) = \vec{h} e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \cdot \vec{h}}$$

kde λ je „nějaké“ číslo a $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je „nějaký“ nenulový vektor

$$\text{Platí: } \vec{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{h}$$

$$n = 2$$

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} h_1 \\ e^{\lambda t} h_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} h_1 \\ \lambda e^{\lambda t} h_2 \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \vec{h}$$

Tedy:

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t)$$

Dosadíme:

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{h} = \mathbf{A}(e^{\lambda t} \vec{h}) = e^{\lambda t} \mathbf{A} \vec{h} \quad / : e^{\lambda t} > 0$$

$$\begin{aligned} \boxed{\lambda \vec{h} = \mathbf{A} \vec{h}} &\Leftrightarrow \lambda \mathbf{I} \vec{h} = \mathbf{A} \vec{h} \\ &\Leftrightarrow (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \vec{h} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{h} = \vec{0}} \end{aligned}$$

Závěry:

- λ musí být **vlastní číslo** matice $\mathbf{A}$ (obecně komplexní)
- $\vec{h}$ musí být **vlastní vektor** matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ
- najít FS znamená najít vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a příslušné LNZ (lineárně nezávislé) vlastní vektory !

Platí:

- aby existoval $\vec{h} \neq \vec{0}$ takový, že $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{h} = \vec{0}$, resp. $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \vec{h} = \vec{0}$, matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, resp. $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$, musí být singulární !
(tj. $\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0}$, resp. $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$)
- $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A} \Rightarrow \lambda^* \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$
- $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$, potom vektor komplexně sdružený $\vec{h}^*$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda^* \in \mathbb{C}$
- komplexní FS lze převést použitím Eulerovy identity na reálný FS

Příklad:
($n = 2$)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \quad t \in I = \mathbb{R} \quad (\text{počáteční podmínky doplníme později})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - (-2) \cdot 2 = (1 - \lambda)^2 + 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \underline{\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0}$$

$$\underline{\lambda_{1,2}} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4j}{2} = \underline{1 \pm 2j} \in \mathbb{C}$$

$$\underline{\lambda_1 = 1 + 2j}: \quad \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - 1 - 2j & 2 \\ -2 & 1 - 1 - 2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2j & 2 \\ -2 & -2j \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}_1 = ? \quad (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{h}_1 = \vec{0}, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} -2j & 2 \\ -2 & -2j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} -2jh_{11} + 2h_{12} &= 0 \\ -2h_{11} - 2jh_{12} &= 0 \end{aligned}$$

(1. složku zvolíme a 2. dopočteme)

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 1 - 2j}: \quad$$

$$\vec{h}_2 = \vec{h}_1^* = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}$$

Komplexní FS: $\{e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1, e^{\lambda_2 t} \vec{h}_2\}$

$$\left\{ e^{(1+2j)t} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(1-2j)t} \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
e^{(1+2j)t} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} &= e^t \cdot e^{2jt} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} = e^t (\cos(2t) + j \sin(2t)) \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) - j \cos(2t) \\ \cos(2t) + j \sin(2t) \end{pmatrix} = \\
&= e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + j \cdot e^t \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \\
&\quad \text{reálná část} \qquad \qquad \text{imaginární část}
\end{aligned}$$

Reálný FS:

$$\left\{ \underbrace{e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}}_{\vec{y}_1(t)}, \underbrace{e^t \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}}_{\vec{y}_2(t)} \right\}$$

ZÁVĚR:

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstanty} \\
\text{(případně určené poč. podmínkami)}$$

$$\mathbb{Y}(t) = \left(\vec{y}_1(t) \mid \vec{y}_2(t) \right) = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) & -e^t \cos(2t) \\ e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Maticově:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \vec{y}(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{c} = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) & -e^t \cos(2t) \\ e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ve složkách:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= c_1 e^t \sin(2t) - c_2 e^t \cos(2t) \\
y_2(t) &= c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)
\end{aligned}$$

Dále zahrneme počáteční podmínky.

Počáteční podmínky:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

$y_1(0) = 0$:

$$y_1(t) = c_1 e^t \sin(2t) - c_2 e^t \cos(2t)$$

$$y_1(0) = c_1 e^0 \sin(0) - c_2 e^0 \cos(0) = -c_2 = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = 0}$$

Tedy:

$$y_1(t) = c_1 e^t \sin(2t)$$

$$y_2(t) = c_1 e^t \cos(2t)$$

$y_2(0) = 1$:

$$y_2(0) = c_1 e^0 \cos(0) = \underline{c_1 = 1}$$

ZÁVĚR:

$$y_1(t) = e^t \sin(2t)$$

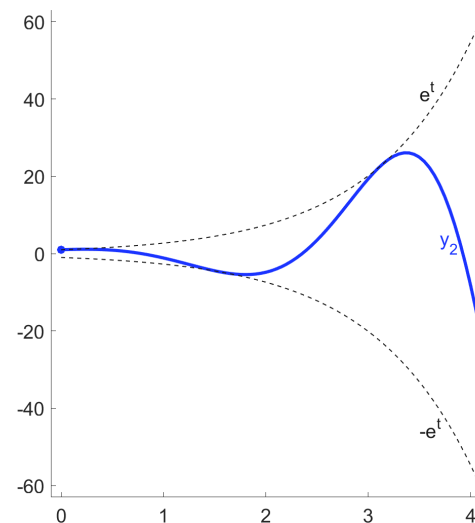
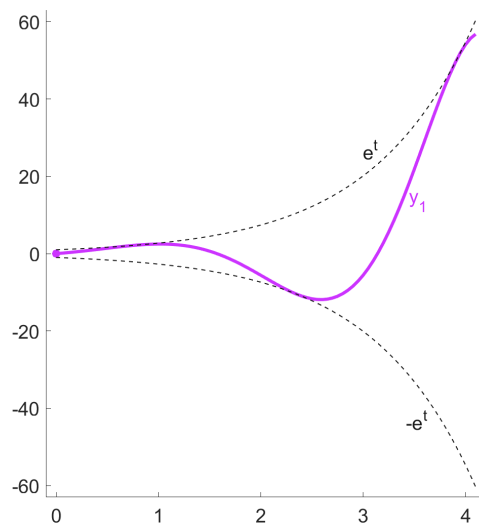
$$y_2(t) = e^t \cos(2t)$$

nebo

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$$

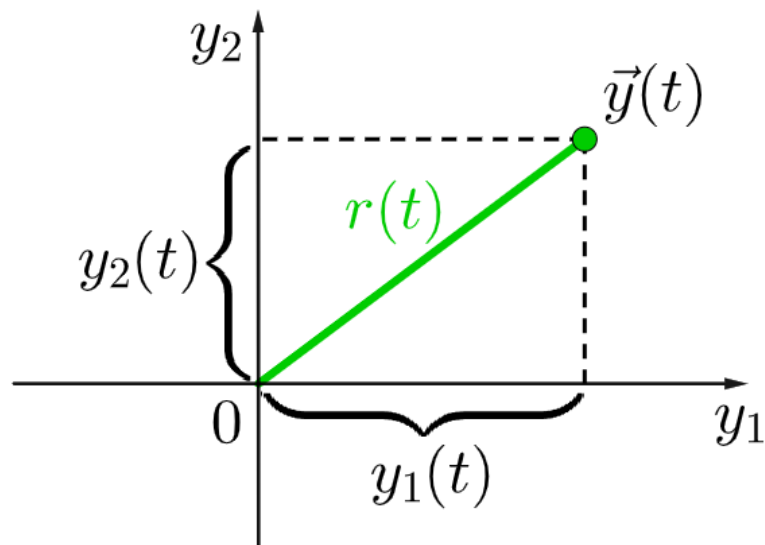
Grafické znázornění:

Ⓐ ve složkách (není názorné)



B v rovině y_1 - y_2 ... tzv. **fázový prostor**

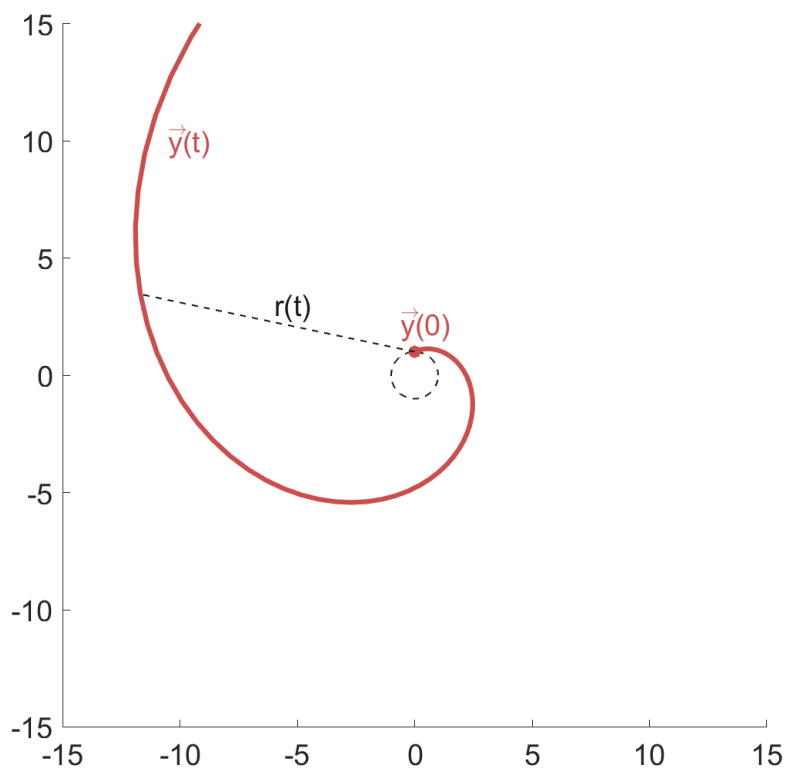
(kreslíme obor hodnot vektorové funkce $\vec{y}(t)$)



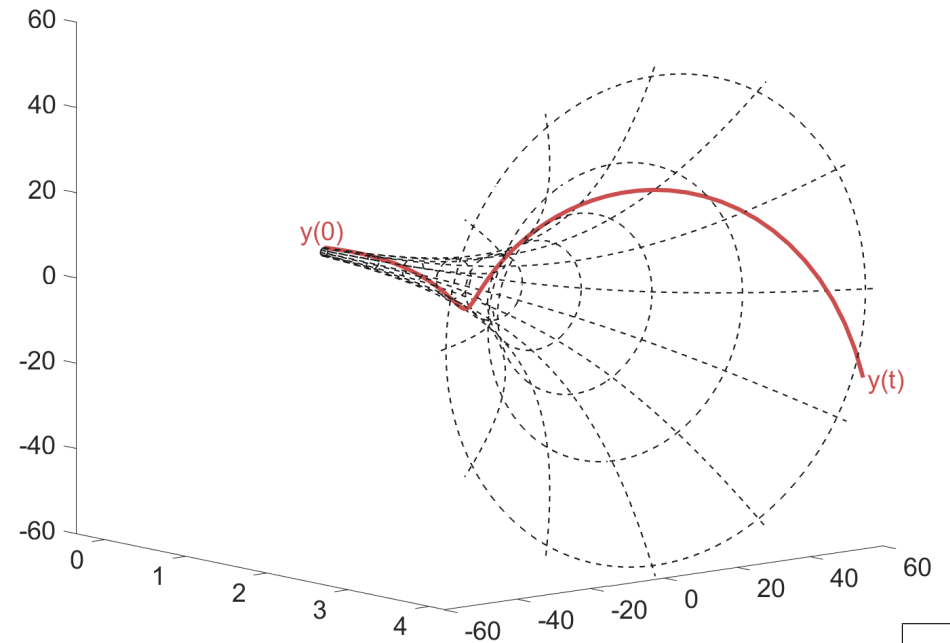
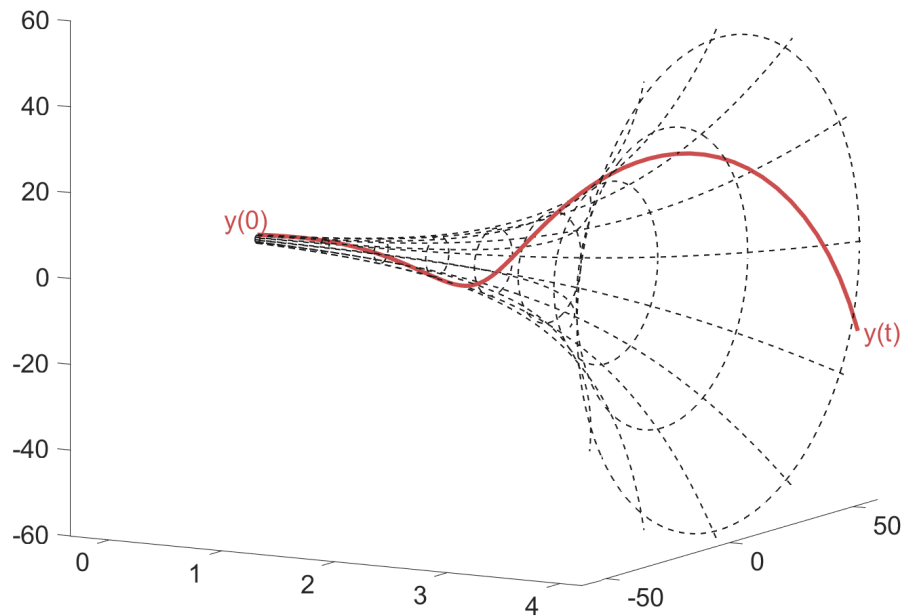
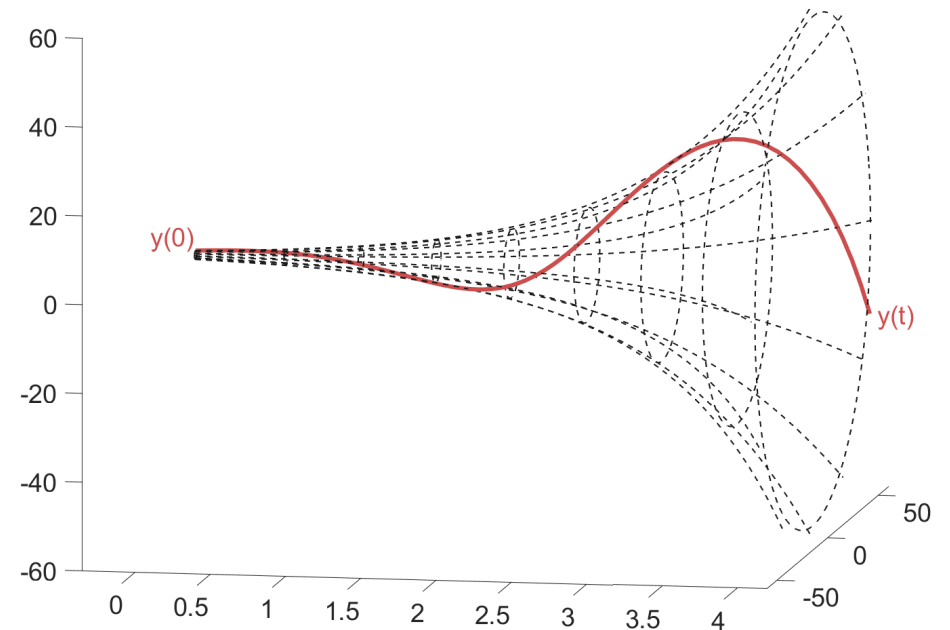
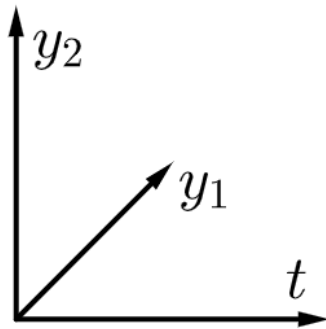
$$r(t) = \sqrt{[y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2} = \sqrt{[e^t \sin(2t)]^2 + [e^t \cos(2t)]^2}$$

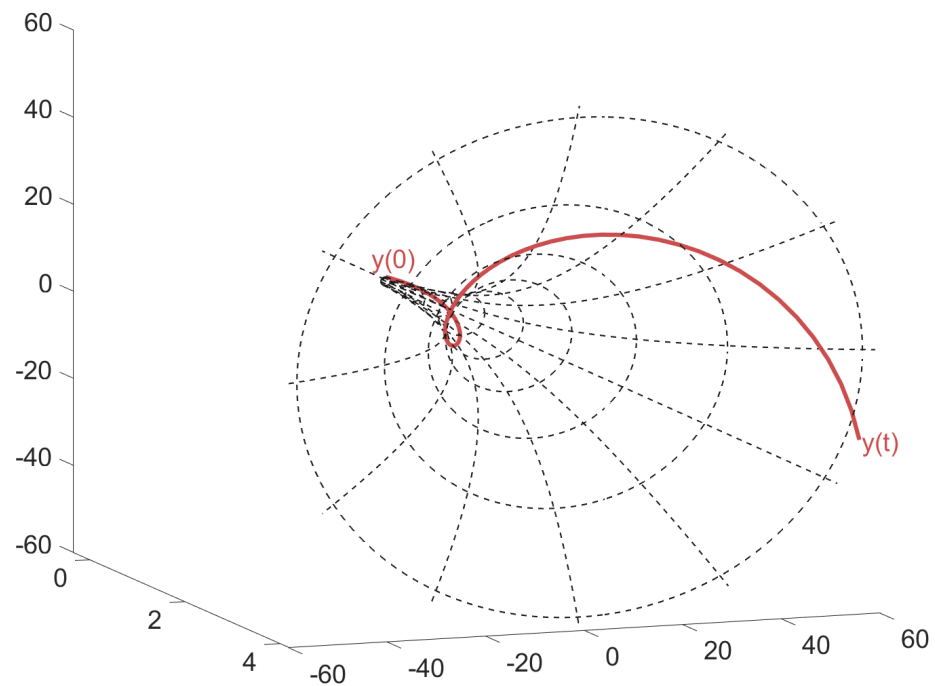
$$= \sqrt{e^{2t} ([\sin(2t)]^2 + [\cos(2t)]^2)} = \sqrt{e^{2t}} = (e^{2t})^{\frac{1}{2}} = e^t$$

$r(t)$... vzdálenost od počátku v čase t

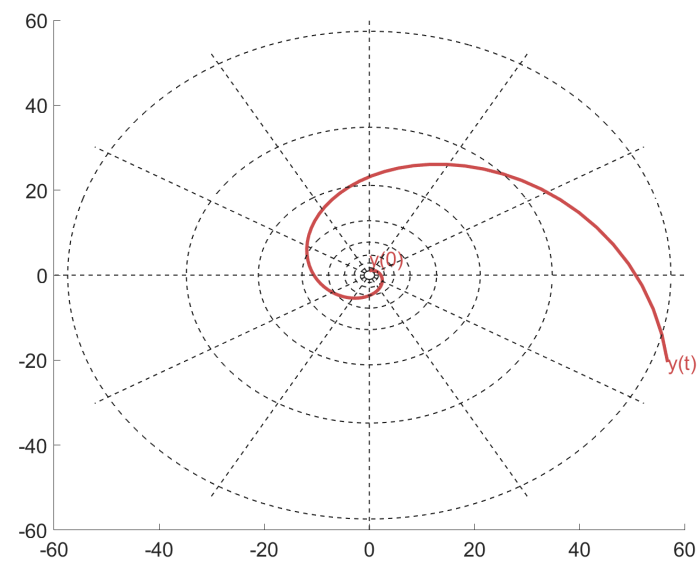


© v prostoru t - y_1 - y_2
 (kreslíme graf vektorové funkce $\vec{y}(t)$)

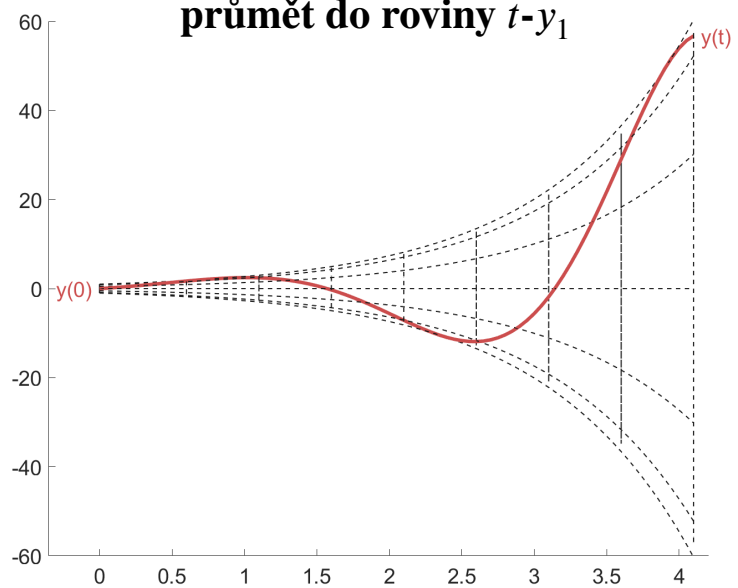




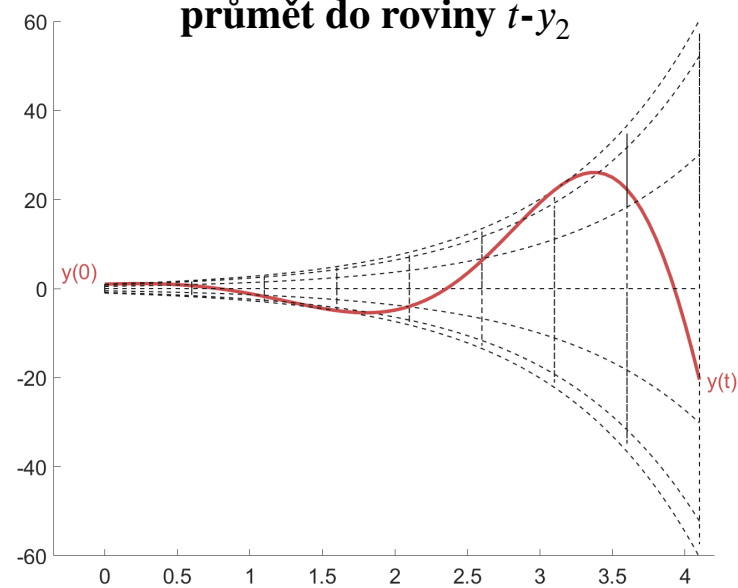
průmět do roviny y_1 - y_2 (fázový prostor)



průmět do roviny t - y_1



průmět do roviny t - y_2



$$\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} \quad (n = 2)$$

vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

odpovídající vlastní vektory:
$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{h}_1 &= \vec{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \vec{h}_2 &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CFS: } & \left\{ e^{(\alpha+j\beta)t} \vec{h}_1, e^{(\alpha-j\beta)t} \vec{h}_2 \right\} \\ & \left\{ e^{\alpha t} \cdot \underline{e^{j\beta t}} \vec{h}_1, e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t} \vec{h}_2 \right\} \\ & \quad = \underline{\cos \beta t + j \sin \beta t} \quad \text{Eulerova identita} \end{aligned}$$

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \gamma + j\delta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \text{pokud má nenulovou 2. složku}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha t} \cdot (\cos \beta t + j \sin \beta t) \begin{pmatrix} \gamma + j\delta \\ 1 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \left[\begin{pmatrix} \gamma \cos \beta t - \delta \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \delta \cos \beta t + \gamma \sin \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{RFS: } \left\{ e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \gamma \cos \beta t - \delta \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}, e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \delta \cos \beta t + \gamma \sin \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} \gamma - j\delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad A

$\frac{y'' - 9y = 0}{y(0) = 4}$ $y'(0) = 6$	$\longrightarrow$	$\frac{y'_1 = y_2}{y'_2 = 9y_1}$ $\frac{y_1(0) = 4}{y_2(0) = 6}$
$y_1 := y$ $y_2 := y' = y'_1$ $y'_2 = y''$		

tj. $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 9 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 9 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm 3$

$\lambda_1 = 3$: $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \vec{h}_1 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

$\lambda_2 = -3$: $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) \vec{h}_2 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$

FS: $\left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

obecné řešení: $\vec{y}_H(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} \\ y_2(t) &= 3c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{-3t} \end{aligned}$
--

Počáteční podmínky:

$(t = 0)$

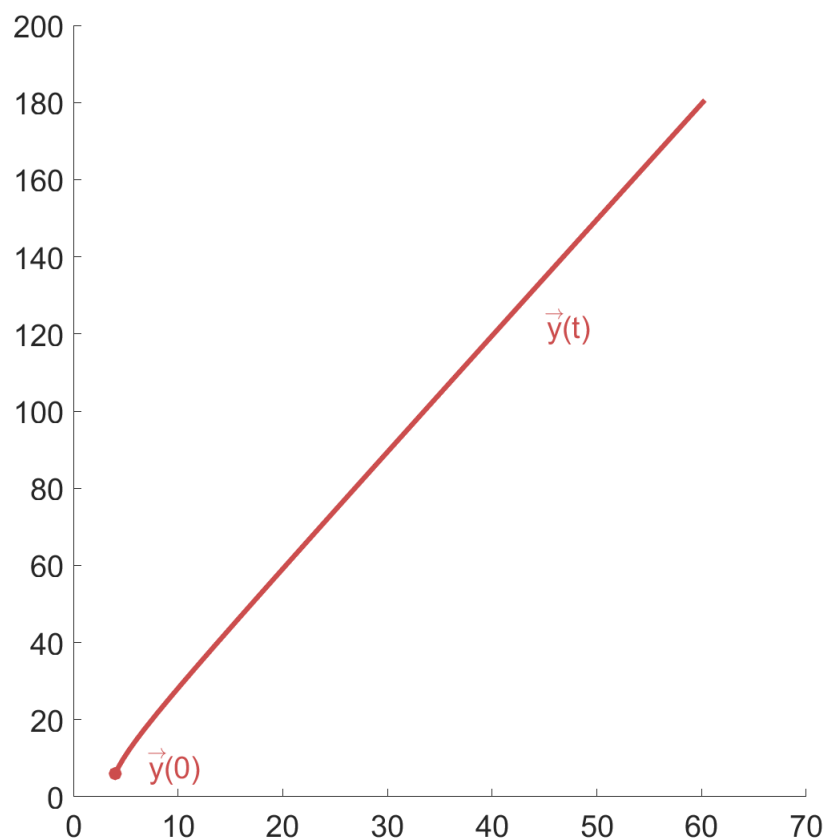
$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 4 \\ 3c_1 - 3c_2 & = & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot 3 \\ \searrow + \end{array}$$

$$6c_1 = 18 \Rightarrow \underline{c_1 = 3}$$

$$3 + c_2 = 4 \Rightarrow \underline{c_2 = 1}$$

$$y_1(t) = 3e^{3t} + e^{-3t}$$

$$y_2(t) = 9e^{3t} - 3e^{-3t}$$



$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^3 + e^{-3} \\ 9e^3 - 3e^{-3} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 60,3 \\ 180,6 \end{pmatrix}$$

Příklad B

$y'' + 10y' + 16y = 0$
$y(0) = 2$
$y'(0) = 0$

 $\xrightarrow{\quad}$

$y_1' = y_2$
$y_2' = -16y_1 - 10y_2$
$y_1(0) = 2$
$y_2(0) = 0$

$y_1 := y$
 $y_2 := y' = y_1'$
 $y_2' = y''$

tj. $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -16 & -\lambda - 10 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda(\lambda + 10) + 16 =$$
$$= \lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0 = (\lambda + 2)(\lambda + 8)$$
$$\underline{\lambda_1 = -2}, \quad \underline{\lambda_2 = -8}$$

$$\underline{\lambda_1 = -2}: \quad (\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \vec{h}_1 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -16 & -8 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\lambda_2 = -8}: \quad (\mathbf{A} + 8\mathbf{I}) \vec{h}_2 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 1 & 0 \\ -16 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\text{FS:}} \quad \left\{ e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\text{obecné řešení:}} \quad \vec{y}_H(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

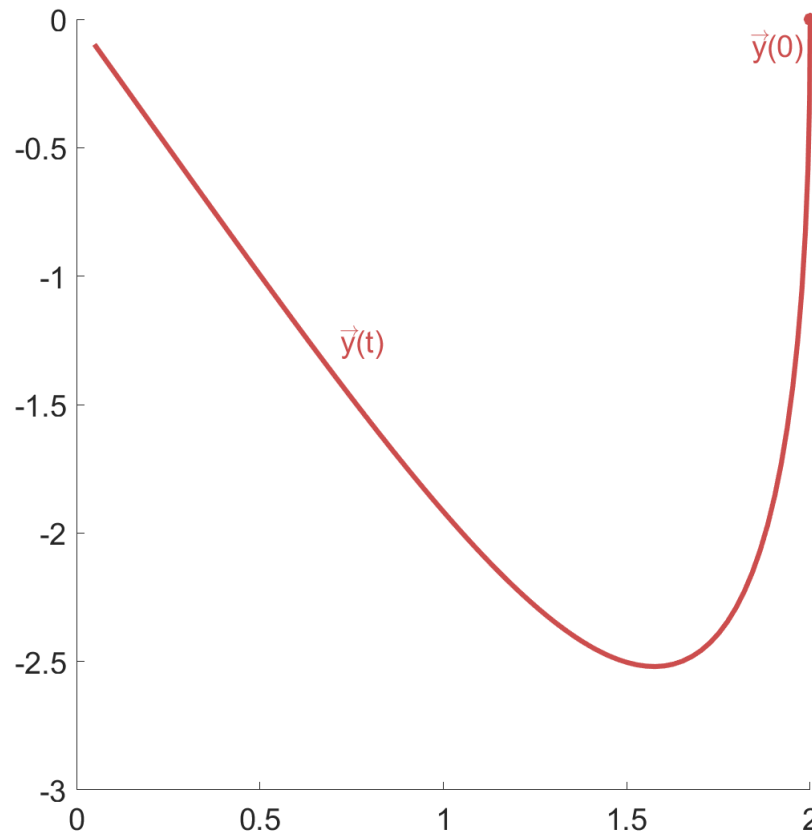
$y_1(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}$
$y_2(t) = -2c_1 e^{-2t} - 8c_2 e^{-8t}$

Počáteční podmínky:
($t = 0$)

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 2 \\ -2c_1 - 8c_2 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot 8 \\ \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6c_1 & = & 16 \\ c_2 & = & 2 - \frac{8}{3} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = \frac{8}{3} \\ c_2 = -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y_1(t) = \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-8t} \\ y_2(t) = -\frac{16}{3}e^{-2t} + \frac{16}{3}e^{-8t} \end{array}$$



$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1\left(\frac{1}{10}\right) \\ y_2\left(\frac{1}{10}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}e^{-\frac{1}{5}} - \frac{2}{3}e^{-\frac{4}{5}} \\ -\frac{16}{3}e^{-\frac{1}{5}} + \frac{16}{3}e^{-\frac{4}{5}} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1,88 \\ -1,97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}e^{-4} - \frac{2}{3}e^{-16} \\ -\frac{16}{3}e^{-4} + \frac{16}{3}e^{-16} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0,049 \\ -0,098 \end{pmatrix}$$

Příklad C

$y'' + 6y' + 25y = 0$
$y(0) = 1$
$y'(0) = 1$

$\longrightarrow$

$y_1 := y$
$y_2 := y' = y_1'$
$y_2' = y''$

$y_1' = y_2$
$y_2' = -25y_1 - 6y_2$
$y_1(0) = 1$
$y_2(0) = 1$

tj. $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -25 & -\lambda - 6 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda(\lambda + 6) + 25 = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$$
$$\underline{\lambda_{1,2}} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \underline{-3 \pm 4j}$$

$$\underline{\lambda_1 = -3 + 4j}: \quad (\mathbf{A} + (3 - 4j)\mathbf{I}) \vec{h}_1 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 - 4j & 1 & 0 \\ -25 & -3 - 4j & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 + 4j \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\lambda_2 = \lambda_1^* = -3 - 4j} \quad \dots \quad \underline{\vec{h}_2 = \vec{h}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 - 4j \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\mathbb{C}FS}: \quad \left\{ e^{(-3+4j)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 + 4j \end{pmatrix}, e^{(-3-4j)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 - 4j \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\mathbb{R}FS}: \quad \left\{ e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos 4t \\ -3 \cos 4t - 4 \sin 4t \end{pmatrix}, e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin 4t \\ -3 \sin 4t + 4 \cos 4t \end{pmatrix} \right\}$$

obecné řešení:

$$y_1(t) = e^{-3t} (c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t)$$
$$y_2(t) = e^{-3t} [c_1 (-3 \cos 4t - 4 \sin 4t) + c_2 (-3 \sin 4t + 4 \cos 4t)]$$

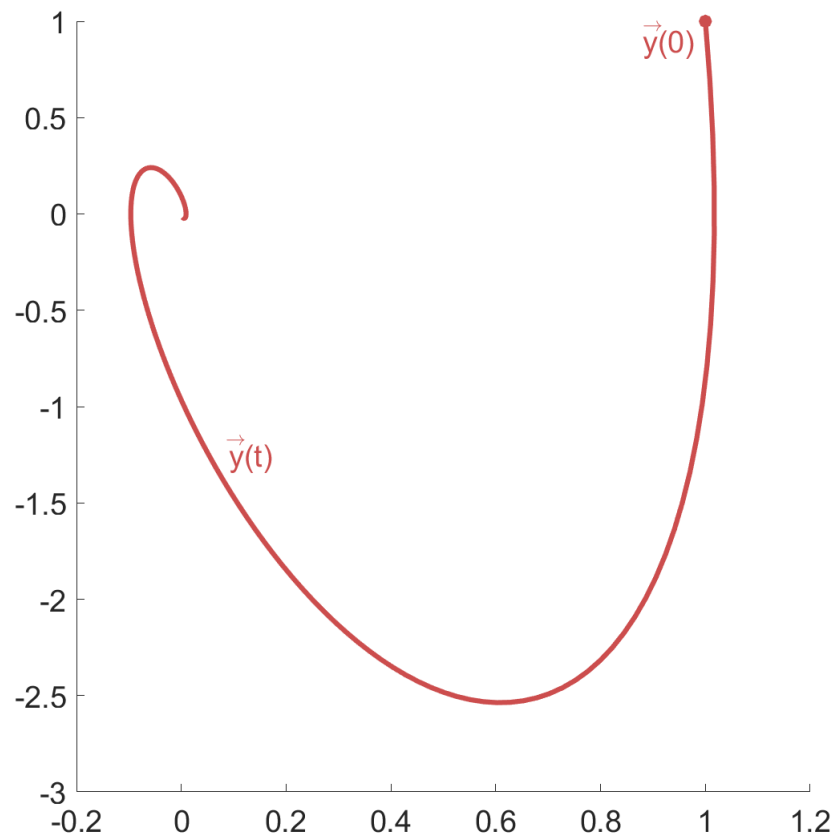
Počáteční podmínky:
($t = 0$)

$$y_1(0) = \underline{c_1 = 1}$$

$$y_2(0) = -3c_1 + 4c_2 = 1 \Rightarrow \underline{c_2 = 1}$$

$$y_1(t) = e^{-3t} (\cos 4t + \sin 4t)$$

$$y_2(t) = e^{-3t} (\cos 4t - 7 \sin 4t)$$



$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3} (\cos 4 + \sin 4) \\ e^{-3} (\cos 4 - 7 \sin 4) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -0,07 \\ -0,23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-6} (\cos 8 + \sin 8) \\ e^{-6} (\cos 8 - 7 \sin 8) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0,002 \\ -0,018 \end{pmatrix}$$

Příště:

Krok 2

... Hledáme $\vec{y}_p(t)$