

REKAPITULACE

Soustava n lineárních ODR 1. řádu je úloha najít (vektorovou funkci) $\vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ takovou, že

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t), \quad t \in I$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \vec{b}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

⊕ počáteční podmínky:

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \quad \text{pro } t_0 \in I \text{ a } \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Víme:

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_H(t) + \vec{y}_P(t)$$

Krok 1 (minule) Najdi všechna řešení $\vec{y}_H(t)$ homogenní rovnice, tj. $\vec{b}(t) = \vec{0}$.

Platí: $\vec{y}_H(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) + \dots + c_n \vec{y}_n(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{c}$, kde

$$\mathbb{Y}(t) := \left(\vec{y}_1(t) \mid \vec{y}_2(t) \mid \dots \mid \vec{y}_n(t) \right) \quad \text{a} \quad \vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$$

$\mathbb{Y}(t)$ je regulární, tj. existuje $[\mathbb{Y}(t)]^{-1}$, protože $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ jsou lineárně nezávislé

Příklad: ($n = 2$)

$$\vec{y}_H(t) = c_1 \cdot \underbrace{e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1}_{\vec{y}_1(t)} + c_2 \cdot \underbrace{e^{\lambda_2 t} \vec{h}_2}_{\vec{y}_2(t)}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$

a $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ příslušné vlastní vektory matice $\mathbf{A}$

Krok 2

Hledáme jedno řešení $\vec{y}_P(t)$ nehomogenní rovnice, tj.

$$\vec{y}_P'(t) = \mathbf{A}\vec{y}_P(t) + \vec{b}(t).$$

Metoda variace konstant + princip superpozice

Předpokládáme, že partikulární řešení má tvar

$$\vec{y}_P(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{\varphi}(t) = \varphi_1(t)\vec{y}_1(t) + \varphi_2(t)\vec{y}_2(t) + \dots + \varphi_n(t)\vec{y}_n(t),$$

kde $\vec{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je (zatím) neznámá vektorová funkce.

Platí:

$$\vec{y}_P'(t) = \underbrace{\mathbf{A}\mathbb{Y}(t)}_{\mathbb{Y}'(t)} \vec{\varphi}(t) + \mathbb{Y}(t) \vec{\varphi}'(t), \quad t \in I$$

Zdůvodnění ($n = 2$):

$$\begin{aligned} \vec{y}_P'(t) &= \left[\mathbb{Y}(t) \cdot \vec{\varphi}(t) \right]' = \left[\varphi_1(t)\vec{y}_1(t) + \varphi_2(t)\vec{y}_2(t) \right]' \stackrel{*}{=} \underbrace{\varphi_1'(t)\vec{y}_1(t)} + \underbrace{\varphi_1(t)\vec{y}_1'(t)} + \underbrace{\varphi_2'(t)\vec{y}_2(t)} + \underbrace{\varphi_2(t)\vec{y}_2'(t)} = \\ &= \underbrace{\varphi_1'(t)\vec{y}_1(t)} + \underbrace{\varphi_2'(t)\vec{y}_2(t)} + \underbrace{\varphi_1(t)\vec{y}_1'(t)}_{\mathbf{A}\vec{y}_1(t)} + \underbrace{\varphi_2(t)\vec{y}_2'(t)}_{\mathbf{A}\vec{y}_2(t)} = \\ &= \underbrace{\varphi_1'(t)\vec{y}_1(t) + \varphi_2'(t)\vec{y}_2(t)}_{\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}'(t)} + \underbrace{\mathbf{A} \cdot (\varphi_1(t)\vec{y}_1(t) + \varphi_2(t)\vec{y}_2(t))}_{\mathbf{A} \cdot \mathbb{Y}(t) \cdot \vec{\varphi}(t)} \end{aligned}$$

* kde

$$\begin{aligned} \left[\varphi_1(t)\vec{y}_1(t) \right]' &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) y_{11}(t) \\ \varphi_1(t) y_{12}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) y_{11}(t) + \varphi_1(t) y_{11}'(t) \\ \varphi_1'(t) y_{12}(t) + \varphi_1(t) y_{12}'(t) \end{pmatrix} = \varphi_1'(t) \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix} + \varphi_1(t) \begin{pmatrix} y_{11}'(t) \\ y_{12}'(t) \end{pmatrix} \\ \left[\varphi_2(t)\vec{y}_2(t) \right]' &\dots \text{ analogicky} \end{aligned}$$

Dosadíme do nehomogenní rovnice:

$$\vec{y}'_P(t) = \mathbf{A}\vec{y}_P(t) + \vec{b}(t)$$

$$\underline{\mathbf{A}\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}(t) + \mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}'(t)} = \underline{\mathbf{A}\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}(t)} + \vec{b}(t)$$

$$\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}'(t) = \vec{b}(t)$$

$$\vec{\varphi}'(t) = [\mathbb{Y}(t)]^{-1} \cdot \vec{b}(t)$$

→ funkci $\vec{\varphi}(t)$ určíme integrací

$$\vec{\varphi}(t) = \int \dots$$

→ dosadíme do

$$\vec{y}_P(t) = \mathbb{Y}(t) \cdot \vec{\varphi}(t)$$

Krok 3

Sečteme $\vec{y}_H(t)$ a $\vec{y}_P(t)$, tj.

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_H(t) + \vec{y}_P(t)$$

Krok 4

Dosadíme počáteční podmínky

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Poznámka: jestliže soustava $\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ vznikla převodem z rovnice n -tého řádu, tj.

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad \text{potom}$$

- $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \dots$ charakteristická rovnice (viz strana 58 – 63)
- $\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}'(t) = \vec{b}(t)$ je soustava, kterou jsme dostali při variaci konstant pro rovnici n -tého řádu (viz strana 28 – 30)

Příklad:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = e^{3t}$$

$$y_1(t) = y(t)$$

$$y_2(t) = y'(t) = y'_1(t)$$

$$y'_2(t) = y''(t)$$

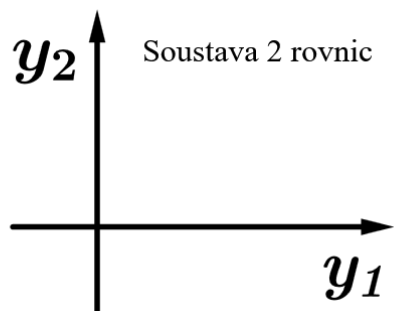
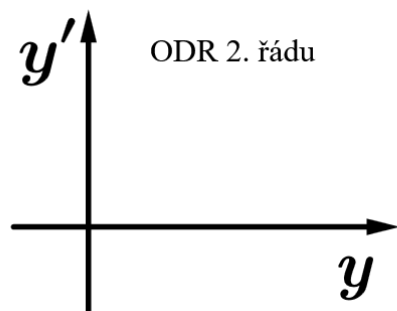
$$y'_1(t) = y_2(t)$$

$$y'_2(t) = -3y_1(t) - 2y_2(t) + e^{3t}$$

tj.

$$\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \cdot \vec{y}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$



... fázový prostor

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda(-2 - \lambda) - (-3) \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ odpovídají řešením charakteristické rovnice. $(y(t) = e^{\lambda t})$

Fundamentální matice

$$\mathbb{Y}(t) = \left(\begin{array}{c|c} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \vec{y}_1(t) & \vec{y}_2(t) \end{array}$$

kde $\{y_1(t), y_2(t)\}$ je FS rovnice 2. řádu

$$\vec{y}_H(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) = \mathbb{Y}(t) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{y}_P(t) = \mathbb{Y}(t) \cdot \vec{\varphi}(t) = \varphi_1(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y'_1(t) \end{pmatrix} + \varphi_2(t) \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y'_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Y}(t) \vec{\varphi}'(t) = \vec{b}(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \varphi'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\varphi'_1(t) y_1(t) + \varphi'_2(t) y_2(t) = 0$$

$$\varphi'_1(t) y'_1(t) + \varphi'_2(t) y'_2(t) = e^{3t}$$

pro rovnici 2. řádu: (dostaneme stejnou soustavu pro $\vec{\varphi}'(t)$)

$$y_P(t) = \varphi_1(t) y_1(t) + \varphi_2(t) y_2(t)$$

$$y'_P(t) = \dots$$

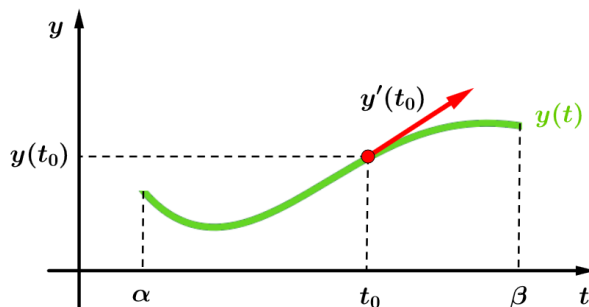
$$y''_P(t) = \dots$$

Počáteční versus okrajové podmínky:

ODR 2. řádu - lineární ... ilustrace

Počáteční úloha

⊕ počáteční podmínky:



$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

dáno $t_0 \in \mathbb{R}$... počáteční čas $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle =: I$

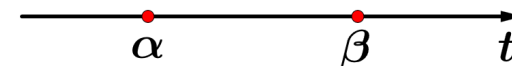
$$\begin{aligned} y(t_0) &= 2 \\ y'(t_0) &= 1 \end{aligned}$$

$y : I \rightarrow \mathbb{R}$ 2× diferencovatelná
tečný vektor: $(1, y'(t_0))^T$

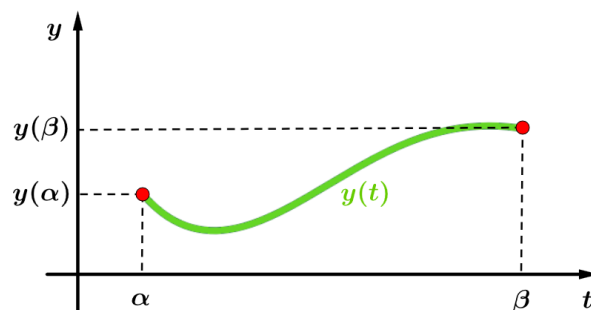
Okrajová úloha

⊕ okrajové podmínky (různého typu):

$\alpha \in I, \beta \in I, \alpha \neq \beta$



Dirichletovy:



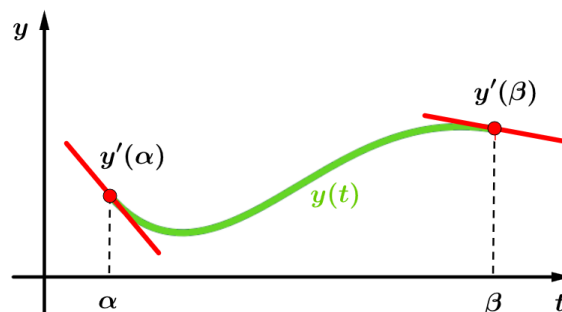
$$\begin{aligned} y(\alpha) &= 1 \\ y(\beta) &= 2 \end{aligned}$$

nehomogenní
okrajové podm.

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= 0 \\ y(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

homogenní
okrajové podm.

Neumannovy:



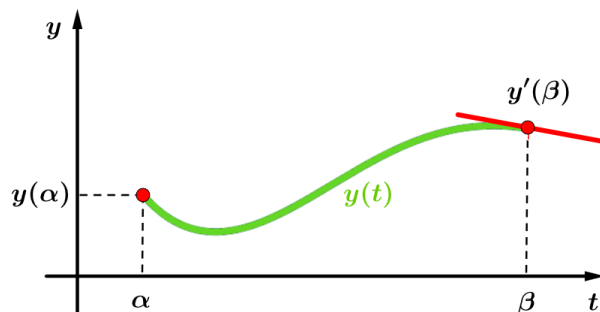
$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= -2 \\ y'(\beta) &= -1 \end{aligned}$$

nehomogenní
okrajové podm.

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= 0 \\ y'(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

homogenní
okrajové podm.

Smíšené:

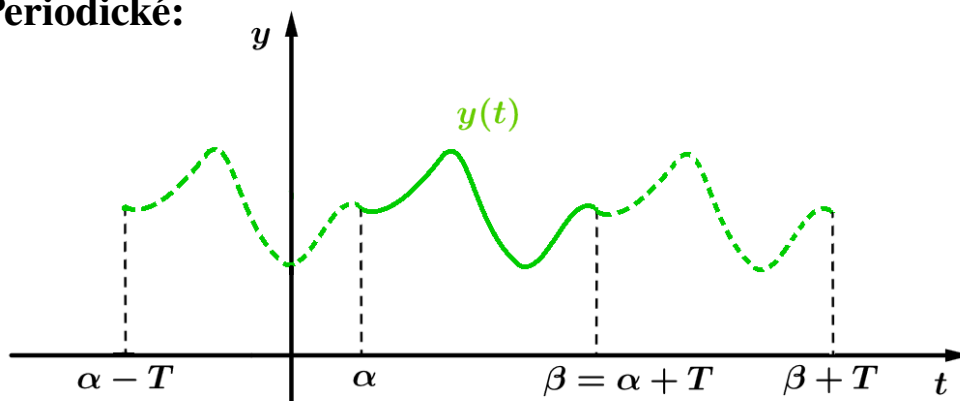


$$\begin{aligned} y(\alpha) &= 1 \\ y'(\beta) &= -1 \end{aligned}$$

nebo např.:

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= \dots \\ y(\beta) &= \dots \end{aligned}$$

Periodické:



$$\begin{aligned} y(\alpha) &= y(\beta) \\ y'(\alpha) &= y'(\beta) \end{aligned}$$

T ... perioda

$$T = \beta - \alpha$$

y ... periodická funkce s periodou T : $y(t) = y(t + T)$, $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Poznámky:

Počáteční úloha má jediné řešení.

Naproti tomu okrajová úloha může mít:

- jediné řešení
- nekonečně mnoho řešení
- žádné řešení



Příklad:

$$\boxed{y'' + y = 0} \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \underline{\lambda_{1,2} = \pm j \in \mathbb{C}}$$

$$\mathbb{CFS}: \{e^{jt}, e^{-jt}\} \Rightarrow y_H(t) = c_1 e^{jt} + c_2 e^{-jt}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{Eulerova identita:} \quad e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

$$e^{-jt} = \cos t - j \sin t$$

$$\textcircled{+} \rightarrow \cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$$

$$\textcircled{-} \rightarrow \sin t = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})$$

$$\mathbb{RFS}: \{\cos t, \sin t\} \Rightarrow \boxed{y_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



obecné řešení lineární ODR 2. řádu

$$\boxed{y'' + y = 0}$$

Počáteční úloha:

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array}} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{dosadíme do obecného řešení:} \quad y(0) = c_1 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = \underline{c_1 = 1}$$

$$y'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

$$y'(0) = -c_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + c_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \underline{c_2 = 2}$$

Řešení počáteční úlohy je

$$\boxed{y(t) = \cos t + 2 \sin t}$$

Okrajové úlohy:

①

$$y'' + y = 0, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(0) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

dosadíme:

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = \underline{c_1 = 1}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{c_2 = 0}$$

Řešení Dirichletovy okrajové úlohy je

$$y(t) = \cos t$$

②

$$y'' + y = 0, \quad t \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(\pi) = 1$$

dosadíme:

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = \underline{c_1 = 0}$$

$$y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = \underline{-c_1 = 1}$$



Úloha nemá řešení !

③

$$y'' + y = 0, \quad t \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0$$

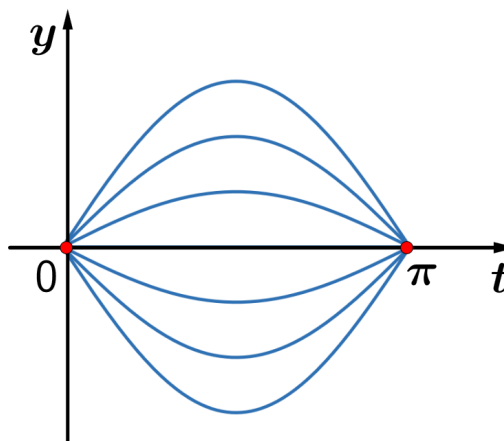
$$y(\pi) = 0$$

dosadíme:

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = \underline{c_1 = 0}$$

$$y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = \underline{-c_1 = 0}$$

$$\underline{c_2 \in \mathbb{R} \text{ libovolné !}}$$



Úloha má nekonečně mnoho řešení

$$y(t) = c_2 \sin t, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

④

$$y'' + y = 0, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

dosadíme:

$$y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = \underline{c_2 = 1}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -c_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{-c_1 = 0}$$

Řešení Neumannovy okrajové úlohy je

$$y(t) = \sin t$$

⑤

$$y'' + y = 0, t \in (0, \pi)$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'(\pi) = 0$$

dosadíme:

$$y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = \underline{c_2 = 1}$$

$$y'(\pi) = -c_1 \sin(\pi) + c_2 \cos(\pi) = \underline{-c_2 = 0}$$



Úloha nemá řešení !

⑥

$$y'' + y = 0, t \in (0, \pi)$$

$$y'(0) = 1$$

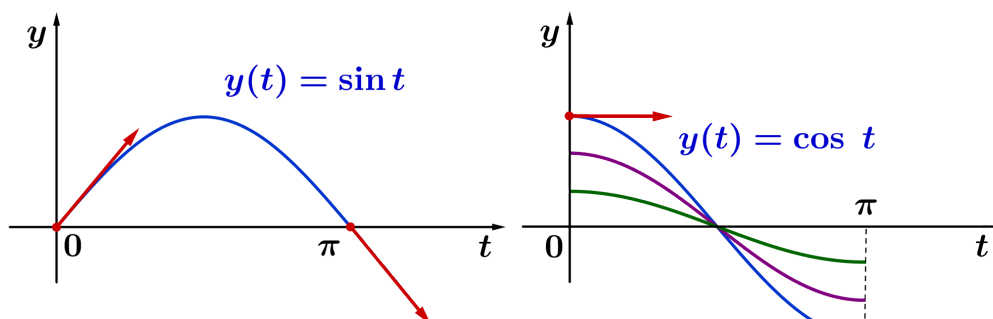
$$y'(\pi) = -1$$

dosadíme:

$$y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = \underline{c_2 = 1}$$

$$y'(\pi) = -c_1 \sin(\pi) + c_2 \cos(\pi) = \underline{-c_2 = -1}$$

$$\underline{c_1 \in \mathbb{R} \text{ libovolné !}}$$



Úloha má nekonečně mnoho řešení

$$y(t) = c_1 \cos t + \sin t, c_1 \in \mathbb{R}$$