

REKAPITULACE

Gonstava n lineárních ODR 1. řádu :

počáteční
úloha

$$\vec{y}'(t) = A \vec{y}(t) + \vec{f}(t), t \in I \subset \mathbb{R}$$

+ počáteční podmínky :

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \text{ pro } t_0 \in I \text{ a } \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$? \vec{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

time :

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_H(t) + \vec{y}_P(t)$$

Krok 1

(minimálně) Najdi přechodná řešení homogenní rovnice, tj: $\vec{f}(t) = \vec{0}$.

Platí:

$$\vec{y}_H(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + \dots + c_n \vec{y}_n(t) = Y(t) \vec{c}, \text{ kde}$$

$$Y(t) := \left(\vec{y}_1(t) \mid \vec{y}_2(t) \mid \dots \mid \vec{y}_n(t) \right) \text{ a } \vec{c} := (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$$

↑ regulární ... $\exists [Y(t)]^{-1}$

Příklad (n=2)

$$\vec{y}_H(t) = c_1 \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{\vec{y}_1(t)} \cdot \vec{h}_1 + c_2 \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{\vec{y}_2(t)} \cdot \vec{h}_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde $\lambda_{1,2}$ jsou vlastní čísla matice A a

$\vec{h}_1, \vec{h}_2$ jsou příslušné vlastní vektory matice A

Krok 2 Hledáme jedno řešení $\vec{y}_p$ nehomogenní rovnice, tj. $\vec{y}_p'(x) = A \cdot \vec{y}_p(x) + \vec{b}(x)$.

Metoda variace konstant + princip superpozice

Předpokládáme, že partikulární řešení má tvar

$$\vec{y}_p(x) = Y(x) \cdot \vec{c}(x) = \varphi_1(x) \vec{y}_1(x) + \varphi_2(x) \vec{y}_2(x) + \dots + \varphi_n(x) \vec{y}_n(x),$$

kde $\vec{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je (každé) nernáma' vektorova' funkce

Plah':
$$\vec{y}_p'(x) = \overbrace{A Y(x)}^{Y'(x)} \vec{c}(x) + Y(x) \vec{c}'(x), \quad x \in I$$

Zdůvodnění: ($n=2$):

$$\begin{aligned} \vec{y}_p'(x) &= [Y(x) \cdot \vec{c}(x)]' = [\varphi_1(x) \vec{y}_1(x) + \varphi_2(x) \vec{y}_2(x)]' = \\ &= \underline{\varphi_1'(x) \vec{y}_1(x)} + \varphi_1(x) \vec{y}_1'(x) + \underline{\varphi_2'(x) \vec{y}_2(x)} + \varphi_2(x) \vec{y}_2'(x) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} [\varphi_1(x) \vec{y}_1(x)]' &= \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \cdot y_{11}(x) \\ \varphi_2(x) \cdot y_{12}(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) y_{11}(x) + \varphi_1(x) y_{11}'(x) \\ \varphi_2'(x) y_{12}(x) + \varphi_2(x) y_{12}'(x) \end{pmatrix} \\ [\varphi_2(x) \vec{y}_2(x)]' &= \text{analogicky} \end{aligned} \right)$$

$$= \underline{\varphi_1'(x) \vec{y}_1(x)} + \varphi_2'(x) \vec{y}_2(x) + \underbrace{\varphi_1(x) \vec{y}_1'(x)}_{A \vec{y}_1(x)} + \varphi_2(x) \underbrace{\vec{y}_2'(x)}_{A \vec{y}_2(x)}$$

$$= \underbrace{\varphi_1'(x) \vec{y}_1(x) + \varphi_2'(x) \vec{y}_2(x)}_{Y'(x) \cdot \vec{c}(x)} + \underbrace{A \cdot (\varphi_1(x) \vec{y}_1(x) + \varphi_2(x) \vec{y}_2(x))}_{A \cdot Y(x) \cdot \vec{c}(x)}$$

$$= Y'(x) \cdot \vec{c}(x) + A \cdot Y(x) \cdot \vec{c}(x) \quad \checkmark$$

Dosadíme do rovnice:

-59-

$$\vec{y}'_p(\lambda) = A \vec{y}_p(\lambda) + \vec{b}(\lambda)$$

$$\cancel{A \cdot Y(\lambda) \cdot \vec{\varphi}(\lambda)} + \cancel{Y(\lambda) \vec{\varphi}'(\lambda)} = \cancel{A Y(\lambda) \vec{\varphi}(\lambda)} + \vec{b}(\lambda)$$

$$Y(\lambda) \vec{\varphi}'(\lambda) = \vec{b}(\lambda)$$

$$\boxed{\vec{\varphi}'(\lambda) = [Y(\lambda)]^{-1} \vec{b}(\lambda)}$$

→ funkci $\vec{\varphi}(\lambda)$ máme integrovat!

$$\vec{\varphi}(\lambda) = \int \dots$$

→ dosadíme do

$$\vec{y}_p(\lambda) = Y(\lambda) \cdot \vec{\varphi}(\lambda)$$

KROK 3

Sečtením $\vec{y}_H(\lambda)$ a $\vec{y}_p(\lambda)$, tj.

$$\boxed{\vec{y}(\lambda) = \vec{y}_H(\lambda) + \vec{y}_p(\lambda)}$$

KROK 4

Dosadíme počáteční podmínky $\vec{y}(\lambda_0) = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$

Poznámka: jedliže soustava $\vec{y}'(\lambda) = A \vec{y}(\lambda) + \vec{b}(\lambda)$ vznikla převodem z rovnice n -tého řádu, tj.

$$\vec{y}(\lambda) = \begin{pmatrix} y(\lambda) \\ y'(\lambda) \\ y''(\lambda) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{b}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \text{potom}$$

- $0 = \det(A - \lambda I) \dots$ charakteristická rovnice (str. 51-56)
- $Y(\lambda) \vec{\varphi}'(\lambda) = \vec{b}(\lambda)$ je soustava, kterou jsme dostali při variaci konstant pro rovnici n -tého řádu (str. 25, 27)

Příklad:

$$y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = e^{3x}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

2krát difer.

$$\vec{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

1krát difer.

$$y_1(x) = y(x)$$

$$y_2(x) = y'(x) = y_1'(x)$$

$$y_2'(x) = y''(x)$$

$$y_2'(x) + 2y_2(x) + 3y_1(x) = e^{3x}$$

Dostaneme:

$$y_1'(x) = y_2(x)$$

$$y_2'(x) = -3y_1(x) - 2y_2(x) + e^{3x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

fázový prostor:

Soustava 2. řadic



ODR 2. řádu

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$y(x) = e^{3x}$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(-2-\lambda) - (-3) \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

Vlastní čísla matice A odpovídají řešením charakteristické rovnice.

Fundamentální matice

$$Y(\lambda) = \begin{pmatrix} \boxed{y_{11}(\lambda)} & \boxed{y_{21}(\lambda)} \\ y_{12}(\lambda) & y_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\lambda) & y_2(\lambda) \\ y_1'(\lambda) & y_2'(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \lambda} & e^{\lambda_2 \lambda} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 \lambda} & \lambda_2 e^{\lambda_2 \lambda} \end{pmatrix}$$

$\vec{y}_1(\lambda) \quad \vec{y}_2(\lambda)$

kde $\{y_1(\lambda), y_2(\lambda)\}$ je FS rovnice 2. řádu

$$\vec{y}_H(\lambda) = a_1 \vec{y}_1(\lambda) + a_2 \vec{y}_2(\lambda) = Y(\lambda) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{y}_P(\lambda) = Y(\lambda) \cdot \vec{\varphi}(\lambda) = \varphi_1(\lambda) \begin{pmatrix} y_1(\lambda) \\ y_1'(\lambda) \end{pmatrix} + \varphi_2(\lambda) \begin{pmatrix} y_2(\lambda) \\ y_2'(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$Y(\lambda) \vec{\varphi}'(\lambda) = \vec{b}(\lambda)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(\lambda) & y_2(\lambda) \\ y_1'(\lambda) & y_2'(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(\lambda) \\ \varphi_2'(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi_1'(\lambda) y_1(\lambda) + \varphi_2'(\lambda) y_2(\lambda) = 0 \\ \varphi_1'(\lambda) y_1'(\lambda) + \varphi_2'(\lambda) y_2'(\lambda) = e^{3\lambda} \end{cases}$$

pro rovnici 2. řádu:

(Dostaneme stejnou
soustavu pro $\vec{\varphi}'(\lambda)$)

$$y_P(\lambda) = \varphi_1(\lambda) y_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda) y_2(\lambda)$$

$$y_P'(\lambda) = \dots$$

$$y_P''(\lambda) = \dots$$

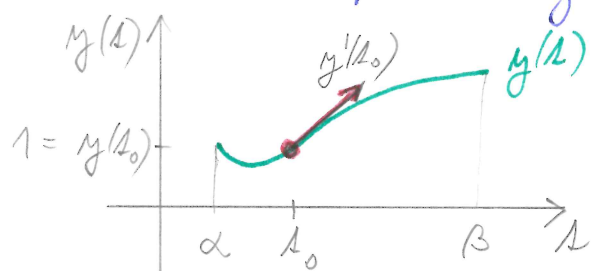
Počáteční versus okrajové úlohy

ODR 2. řádu - lineární ilustrace

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = h(x), \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

Počáteční úloha

⊕ Počáteční podmínky: dáno $x_0 \in \mathbb{R} \dots$ počáteční čas
 $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle =: I$

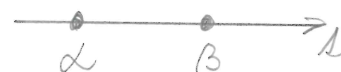


$$\begin{aligned} y(x_0) &= 1 \\ y'(x_0) &= 2 \end{aligned}$$

$y: I \rightarrow \mathbb{R}$ 2x dif.
 řešení vektor: $(1, y'(x_0))^T$

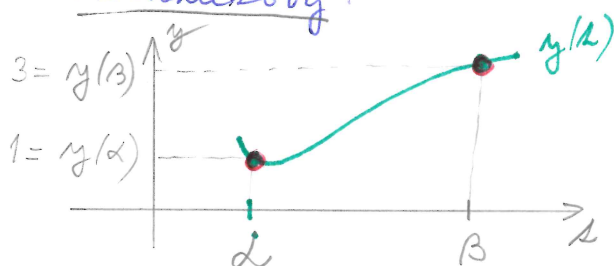
Okrajová úloha

⊕ Okrajové podmínky (různého typu):



$x \in I, \beta \in I, \alpha \neq \beta$

Dirichletovy:

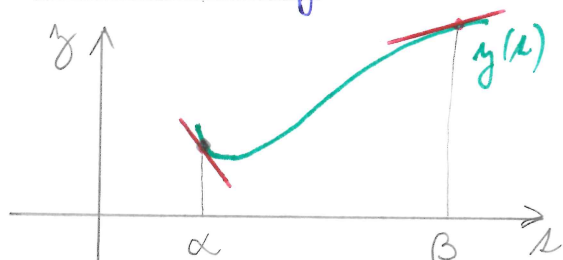


$$\begin{aligned} y(\alpha) &= 1 \\ y(\beta) &= 3 \end{aligned}$$

nehomogenní
okrajové podmín.

$$\begin{pmatrix} y(\alpha) = 0 \\ y(\beta) = 0 \end{pmatrix} \text{ homogenní okraj. podmín.}$$

Neumannovy:

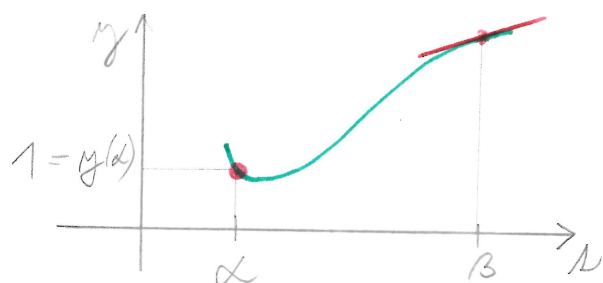


$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= -2 \\ y'(\beta) &= 1 \end{aligned}$$

nehomogenní
okrajové podmín.

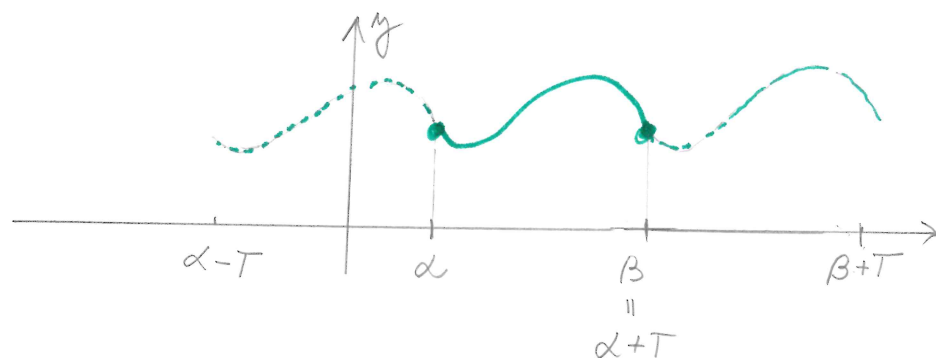
$$\begin{pmatrix} y'(\alpha) = 0 \\ y'(\beta) = 0 \end{pmatrix} \text{ homogenní okraj. podmín.}$$

Smíšené:



$$\begin{aligned} y(\alpha) &= 1 \\ y'(\beta) &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{nebo například} \\ y'(\alpha) = \dots \\ y(\beta) = \dots \end{array} \right)$$

Periodické;

$$\begin{aligned} y(x) &= y(\beta) \\ y'(x) &= y'(\beta) \end{aligned}$$

$T \dots$ perioda $T = \beta - \alpha$

$y \dots$ periodická funkce s periodou T : $y(x) = y(x+T)$
 $\forall x \in (\alpha, \beta)$

Poznámka: Počáteční úloha má 'jedine řešení'.

Naopak tomu Okrajová úloha může mít:

- jedine řešení
- nekonečně mnoho řešení
- žádné řešení

Příklad:

$$y'' + y = 0$$

$\lambda^2 + 1 = 0$ charakteristická rovnice

$$\lambda_{1,2} = \pm j \in \mathbb{C}$$

CFS: $\{e^{j\lambda}, e^{-j\lambda}\} \Rightarrow y_H(\lambda) = C_1 e^{j\lambda} + C_2 e^{-j\lambda}, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

Eulerova identita:

$$e^{j\lambda} = \cos \lambda + j \sin \lambda$$

$$e^{-j\lambda} = \cos \lambda - j \sin \lambda$$

$$\oplus \rightarrow \cos \lambda = \frac{1}{2}(e^{j\lambda} + e^{-j\lambda})$$

$$\ominus \rightarrow \sin \lambda = \frac{1}{2j}(e^{j\lambda} - e^{-j\lambda})$$

RFS: $\{\cos \lambda, \sin \lambda\} \Rightarrow y_H(\lambda) = C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

obecné řešení lineární ODR 2. řádu $y'' + y = 0$

Počáteční úloha: $y'' + y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

poč. podm. $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

dosadíme do obecného řešení:

$$y(0) = C_1 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} + C_2 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = 1 \Rightarrow y(0) = \underline{\underline{C_1 = 1}}$$

$$y'(\lambda) = -C_1 \sin \lambda + C_2 \cos \lambda$$

$$y'(0) = -C_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + C_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} = 2 \Rightarrow y'(0) = \underline{\underline{C_2 = 2}}$$

Rěšení poč. úlohy je $\boxed{y(\lambda) = \cos \lambda + 2 \sin \lambda}$

Okrajové úlohy:

① $y'' + y = 0, \quad \lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ Dirichletovy OP

dosadíme:

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = \underline{\underline{C_1 = 1}}$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{C_2 = 0}}$$

Rěšení Dirichletovy OÚ je $\boxed{y(\lambda) = \cos \lambda}$

② $y'' + y = 0, \quad \lambda \in (0, \pi)$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$ Dirichletovy OP

dosadíme:

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = \underline{\underline{C_1 = 0}}$$

$$y(\pi) = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = \underline{\underline{-C_1 = 1}}$$

Úloha nemá řešení!

③ $y'' + y = 0, \quad \lambda \in (0, \pi)$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$ homogenní Dirichletovy OP

dosadíme:

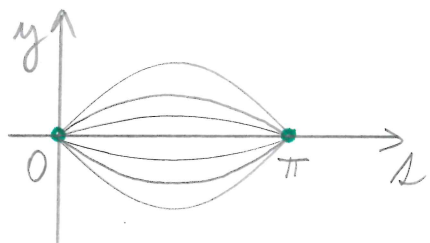
$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = \underline{\underline{C_1 = 0}}$$

$$y(\pi) = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = \underline{\underline{-C_1 = 0}}$$

$C_2 \in \mathbb{R}$ lib!

Úloha má ∞ -mnoho řešení!

$$\boxed{y(\lambda) = C_2 \cdot \sin x} \quad C_2 \in \mathbb{R}$$



Dce: Uvedte analogické příklady okrajových úloh
s Neumannovými nebo smíšenými okrajovými podmínkami.