

Laplaceova transformace

Definice: **Laplaceovým obrazem** funkce $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ rozumíme funkci definovanou vztahem

$$F(p) := \mathcal{L}[f(t)](p) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{kde } p \text{ je parametr (obecně komplexní číslo).}$$

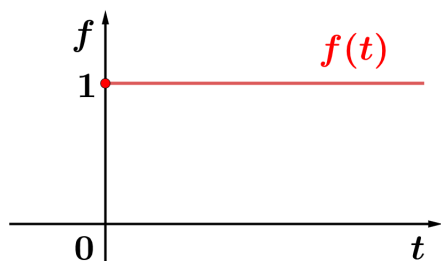
Značení: $F(p); F; \mathcal{L}[f] = F$ (pozor: F neznačí primitivní funkci k funkci f !)

Poznámky:

- pro jednoduchost budeme předpokládat, že $p \in \mathbb{R}$ (známe Eulerovu identitu, která nám toto umožní)
- integrál v definici $F(p)$ nemusí pro všechny hodnoty p konvergovat (tj. být konečný)
- hodnota integrálu nezávisí na hodnotách funkce f pro $t < 0$!
často se předpokládá, že $f(t) = 0, t < 0$ (integrujeme od 0 do $+\infty$).

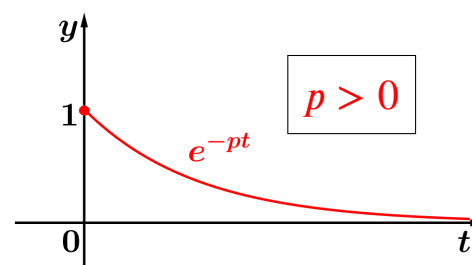
Příklad:

$$f(t) = 1, t \geq 0$$



$$\underline{F(p)} = \mathcal{L}[1](p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{1}_{=f(t)} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} =$$

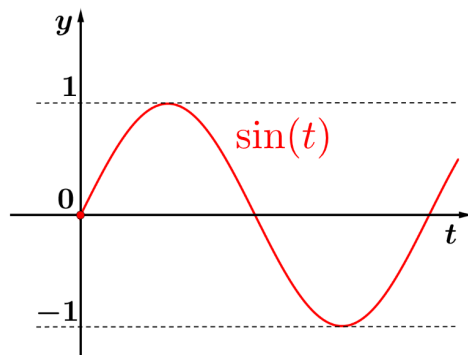
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} - \frac{e^{-p \cdot 0}}{-p} =$$



$$= \overset{!}{0} + \frac{1}{p} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

Příklad:

$$f(t) = \sin t, \quad t \geq 0$$



$$\underline{F(p)} = \mathcal{L}[\sin t](p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin t}_{=f(t)} e^{-pt} dt \quad (\Rightarrow \text{integrace „per partes“})$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin t e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sin t & u' = \cos t \\ v' = e^{-pt} & v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{array} \right| = \underline{-\frac{e^{-pt}}{p} \sin t} - \int \frac{e^{-pt}}{-p} \cos t dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & u' = -\sin t \\ v' = \frac{e^{-pt}}{-p} & v = \frac{e^{-pt}}{p^2} \end{array} \right| = \underline{-\frac{e^{-pt}}{p} \sin t} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \cos t - \underbrace{\frac{1}{p^2} \int \sin t e^{-pt} dt}_{=I} \end{aligned}$$

$$I = -\frac{e^{-pt} (\cos t + p \cdot \sin t)}{p^2} - \frac{1}{p^2} \cdot I \quad / \cdot p^2$$

$$p^2 I = -e^{-pt} (\cos t + p \cdot \sin t) - I \quad / + I$$

$$(p^2 + 1)I = -e^{-pt} (\cos t + p \cdot \sin t) \quad / : (p^2 + 1) > 0$$

$$I = \frac{-e^{-pt} (\cos t + p \cdot \sin t)}{p^2 + 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \left[-\frac{1}{p^2 + 1} e^{-pt} \underbrace{(p \cdot \sin t + \cos t)}_{\substack{\text{omezená funkce} \\ 0, \underline{p > 0!}}} \right]_0^{+\infty} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p^2 + 1} e^{-pt} (p \cdot \sin t + \cos t) \right) - \left(-\frac{1}{p^2 + 1} \underbrace{e^{-p \cdot 0}}_{=1} \left(p \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\cos 0}_{=1} \right) \right) = \\ &= 0 + \frac{1}{p^2 + 1} = \underline{\frac{1}{p^2 + 1}} \quad \boxed{p > 0} \end{aligned}$$

Poznámka: Výpočet z definice je náročný i pro jednoduché funkce. Budeme se snažit využít znalost

$$\boxed{\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}, p > 0} \quad \text{a} \quad \boxed{\mathcal{L}[\sin t](p) = \frac{1}{p^2 + 1}, p > 0} \quad \text{pro odvození obrazů dalších funkcí.}$$

Využijeme tzv. **slovník Laplaceovy transformace** a následující vlastnosti Laplaceovy transformace.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

V1 LINEARITA $\alpha, \beta \dots$ čísla; f_1 a f_2 funkce

$$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2],$$

jestliže $\mathcal{L}[f_1]$ a $\mathcal{L}[f_2]$ existují! (tj. pokud má pravá strana smysl)

Zdůvodnění:

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2]} = \alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[f_1]} + \beta \underbrace{\int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[f_2]}$$

Příklady:

$$\underline{\mathcal{L}[1 + \sin t](p)} = \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 + 1} \quad \boxed{p > 0}$$

$$\underline{\mathcal{L}[3]} = \mathcal{L}[3 \cdot 1] = 3 \cdot \mathcal{L}[1] = 3 \cdot \frac{1}{p} \quad \boxed{p > 0}$$

$$\underline{\mathcal{L}[10 \sin t]} = 10 \cdot \mathcal{L}[\sin t] = 10 \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \quad \boxed{p > 0}$$

$$\mathcal{L}[f(\omega t)](p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

(zde již důsledně píšeme argumenty)

Zdůvodnění:

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{\omega t}{\omega} = \tau\right) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{ll} \tau = \omega t & t = \frac{\tau}{\omega}, \omega \neq 0 \\ d\tau = \omega dt & dt = \frac{d\tau}{\omega} \\ t = 0 & \tau = \omega \cdot 0 = 0 \\ t \rightarrow +\infty & \tau = \omega \cdot t \rightarrow +\infty \\ \omega > 0 \end{array} \right| = \frac{1}{\omega} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\omega}\tau} d\tau = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

Příklad:

pro $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t)] &= \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[\sin(t)]\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{p^2 + \omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad p > 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](p - a) = F(p - a)$$

Zdůvodnění:

$$\int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)$$

Příklad:

$$\underline{\mathcal{L}[e^{at}]} = \mathcal{L}[e^{at} \cdot \underbrace{1}_{=f(t)}] = \mathcal{L}[1](p - a) = \frac{1}{\underline{p - a}}, \quad p - a > 0, \quad \boxed{p > a}$$

$$(\text{ Víme, že } \mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}, \quad p > 0)$$

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[f(t)]) = -\frac{dF}{dp}$$

Zdůvodnění:

Uvědomme si, že $-\frac{d}{dp}[f(t)e^{-pt}] = -(f(t)e^{-pt} \cdot (-t))$, tj.

$$\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} -\frac{d}{dp}[f(t)e^{-pt}] dt = -\frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt\right) = -\frac{dF}{dp}$$

Příklady:

$$\underline{\mathcal{L}[t]} = \mathcal{L}[t \cdot \underbrace{1}_{=f(t)}] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[1]) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \underline{\frac{1}{p^2}} \quad \left[\frac{1}{p}\right]' = [p^{-1}]' = -1 \cdot p^{-2} = -\frac{1}{p^2}$$

$$\underline{\mathcal{L}[t^2]} = \mathcal{L}[t \cdot \underbrace{t}_{=f(t)}] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[t]) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \underline{\frac{2}{p^3}} \quad \left[\frac{1}{p^2}\right]' = [p^{-2}]' = -2 \cdot p^{-3} = -\frac{2}{p^3}$$

$$\underline{\mathcal{L}[t^3]} = \mathcal{L}[t \cdot \underbrace{t^2}_{=f(t)}] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[t^2]) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^3}\right) = \underline{\frac{6}{p^4}} \quad \left[\frac{1}{p^3}\right]' = [p^{-3}]' = -3 \cdot p^{-4} = -\frac{3}{p^4}$$

$$\underline{\mathcal{L}[t^4]} = \dots$$

$$\mathcal{L}[f'] = p \cdot \mathcal{L}[f] - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$$

Zdůvodnění:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{-pt} & u' = -p e^{-pt} \\ v' = f'(t) & v = f(t) \end{array} \right| = \left[e^{-pt} \cdot f(t) \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{-pt} f(t) \right) - \lim_{t \rightarrow 0_+} \left(e^{-pt} f(t) \right) + p F(p) = 0 - e^{-p \cdot 0} \cdot \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) + p F(p) = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) \end{aligned}$$

Příklad:

$$\underline{\mathcal{L}[\cos t]} = \mathcal{L}[(\sin t)'] = p \cdot \mathcal{L}[\sin t] - \lim_{t \rightarrow 0_+} \sin t =$$

$$(\text{víme, že } \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{p^2 + 1}, p > 0 \quad \text{a} \quad \text{funkce } \sin t \text{ je spojitá v } 0_+)$$

$$= p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \sin 0 = \underline{\underline{\frac{p}{p^2 + 1}}}, p > 0$$

Poznámky:

- $\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$ se někdy značí $f(0_+)$
- Jestliže je f spojitá v bodě 0 zprava, potom $\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0)$.
- V aplikacích má $\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$ význam počáteční podmínky !

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)]$$

Zdůvodnění:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \left[H(\tau)\right]_0^t = H(t) - H(0) \quad H(\tau) \text{ je primitivní funkce k funkci } f(\tau)$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = ?$$

$$g'(t) = H'(t) = f(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} (H(t) - H(0)) = H(0) - H(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = p \mathcal{L}[g(t)] - \lim_{t \rightarrow 0_+} g(t) = p \mathcal{L}[g(t)]$$

Shrnutí:

Zatím jsme vybudovali tento **slovník Laplaceovy transformace**:

$f(t) \dots$ vzor	$F(p) \dots$ obraz
1	$\frac{1}{p}, \quad p > 0$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2 + 1}, \quad p > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0, \quad \omega > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}, \quad p > a$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$
t^3	$\frac{6}{p^4}$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2 + 1}, \quad p > 0$