

Laplaceova transformace

Definice: Laplaceovým obrazem funkce $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ rozumíme funkci definovanou vztahem

$$F(p) := \mathcal{L}[f(t)](p) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \text{ kde}$$

p je parametr (obecně komplexní číslo)

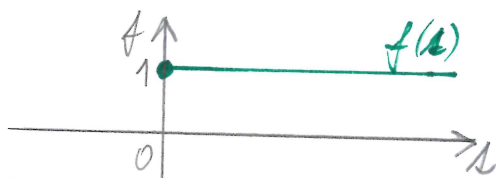
Značení: $F(p)$; F ; $\mathcal{L}[f] = F$ (pozor F značí primitivní funkci f !)

Poznámky:

- pro jednoduchost budeme předpokládat, $\operatorname{Re} p \in \mathbb{R}$ (máme Eulerovu identitu, která nám to umožní)
- integrál v definici $F(p)$ nemusí pro všechny hodnoty p konvergovat (tj. být konečný)
- hodnota integrálu nezávisí na hodnotách funkce f pro $t < 0$! Často se předpokládá, $\operatorname{Re} f(t) = 0, t < 0$ (integrované od 0 do $+\infty$)

Příklad:

$$1) \boxed{f(t) = 1, t \geq 0}$$

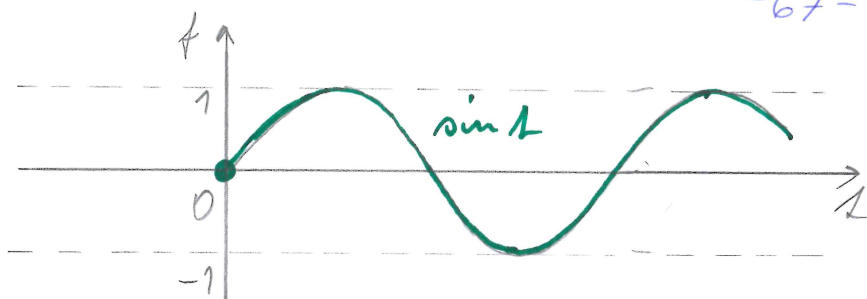


$$F(p) = \mathcal{L}[1](p) = \int_0^{+\infty} \overset{f(t)}{1} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} - \frac{e^{-p \cdot 0}}{-p} = \left| \begin{array}{c} \text{graph of } e^{-pt} \text{ for } t \geq 0 \end{array} \right| = 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{p > 0}$$

$$2) \boxed{f(t) = \sin t, t \geq 0}$$



$$\underline{F(p)} = \mathcal{L}[\sin(t)](p) := \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-pt} dt \quad \text{("f(t)")} \quad \text{integrarea "per partes"}$$

$$I = \int e^{-pt} \sin t dt = \left| \begin{array}{l} u = \sin t \rightarrow u' = \cos t \\ v' = e^{-pt} \rightarrow v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{array} \right| = -\frac{e^{-pt}}{p} \sin t - \int \frac{e^{-pt}}{-p} \cos t dt$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \cos t \rightarrow u' = -\sin t \\ v' = \frac{e^{-pt}}{-p} \rightarrow v = \frac{e^{-pt}}{p^2} \end{array} \right| = -\frac{e^{-pt}}{p} \sin t - \frac{e^{-pt}}{p^2} \cos t - \frac{1}{p^2} \int e^{-pt} \sin t dt$$

$$= \underline{I}$$

$$I = -\frac{e^{-pt}(\cos t + p \cdot \sin t)}{p^2} - \frac{1}{p^2} \cdot I \quad | \cdot p^2$$

$$p^2 I = -e^{-pt}(\cos t + p \cdot \sin t) - I \quad | + I$$

$$(p^2 + 1)I = -e^{-pt}(\cos t + p \cdot \sin t) \quad | : p^2 + 1 > 0$$

$$I = \frac{-e^{-pt}(\cos t + p \cdot \sin t)}{p^2 + 1} + \cancel{C}, C \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{=} \left[-\frac{1}{p^2 + 1} e^{-pt} (p \cdot \sin t + \cos t) \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p^2 + 1} \underbrace{e^{-pt}}_{\substack{\text{omeșura funcției} \\ 0, p > 0!}} \cdot (p \sin t + \cos t) \right) - \left(-\frac{1}{p^2 + 1} \cdot \underbrace{e^{-p \cdot 0}}_{=1} \cdot \left(\underbrace{p \cdot \sin 0}_{=0} + \underbrace{\cos 0}_{=1} \right) \right) =$$

$$= 0 + \frac{1}{p^2 + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{p^2 + 1}}}, \quad \boxed{p > 0!}$$

Poznámka: typčet z definice je náročný i pro jednoduché funkce.

Budeme se snažit využít znalost $\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}, p > 0$ a

$\mathcal{L}[\sin t](p) = \frac{1}{p^2 + 1}, p > 0$ pro odvození obrazů dalších funkcí.

Můžeme využít pr. slovník Laplaceovy transformace a následující vlastnosti Laplaceovy transformace.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

V1 linearita; $\alpha, \beta \dots$ čísla; f_1 a f_2 funkce

$$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2],$$

jestliže $\mathcal{L}[f_1]$ a $\mathcal{L}[f_2]$ existují! (tj. pokud má 'prava' strana smysl)

Zodůvodnění:

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) \cdot e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2]} = \underbrace{\alpha \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[f_1]} + \underbrace{\beta \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[f_2]}$$

Příklad:

$$\underline{\underline{\mathcal{L}[1 + \sin t](p) = \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 + 1}, p > 0}}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{L}[3] = \mathcal{L}[3 \cdot 1] = 3 \cdot \mathcal{L}[1] = 3 \cdot \frac{1}{p}, p > 0}}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{L}[10 \sin t] = 10 \cdot \mathcal{L}[\sin t] = 10 \cdot \frac{1}{p^2 + 1}, p > 0}}$$

V2 změna měřítka; $\omega \dots$ číslo (kladné)

$$\mathcal{L}[f(\omega t)](p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

(zde již důsledně
píšeme argumenty)

Zdůvodnění:

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{f(\omega t)}_{\tau} e^{-pt} dt = \left. \begin{array}{l} \text{SUBSTITUTE} \\ \tau = \omega t \Rightarrow t = \frac{\tau}{\omega}, \omega \neq 0 \\ d\tau = \omega dt \Rightarrow dt = \frac{d\tau}{\omega} \\ t = 0 \Rightarrow \tau = \omega \cdot 0 = 0 \\ t \rightarrow +\infty \Rightarrow \tau = \omega \cdot \tau \rightarrow +\infty \\ \boxed{\omega > 0} \\ dt = \frac{d\tau}{\omega} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\left(\frac{p}{\omega}\right)\tau} d\tau = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

Příklad: $\omega > 0$

(víme, že $\mathcal{L}[\sin(t)](p) = \frac{1}{p^2+1}, p > 0$)

$$\underline{\underline{\mathcal{L}[\sin(\omega t)]}} = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[\sin t]\left(\frac{p}{\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{p^2 + \omega^2}{\omega^2}} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \underline{\underline{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}}, \boxed{p > 0}$$

V3 posunutí v obrazu, $a \dots$ číslo, obecně $a \in \mathbb{C}$ (nebo $a \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](p-a) = F(p-a)$$

Zdůvodnění:

$$\int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a)$$

Příklad: $\mathcal{L}[e^{at}] = \mathcal{L}[e^{at} \cdot 1] = \mathcal{L}[1](p-a) = \frac{1}{p-a}, \quad \boxed{p > a}$

(víme, že $\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}, p > 0$)

V4 derivace obrazu

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{dp} \left(\mathcal{L}[f(t)] \right) = -\frac{dF}{dp}$$

Zdůvodnění:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) e^{-pt} dt &= \int_0^{+\infty} -\frac{d}{dp} [f(t) e^{-pt}] dt = \\ &= -\frac{d}{dp} \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt}_{F(p)} \right) \end{aligned}$$

uvědomme si:

$$-\frac{d}{dp} [f(t) e^{-pt}] = -(f(t) e^{-pt}) \cdot (-t)$$

Příklad: $\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[1 \cdot \overset{f(t)}{1}] = -\frac{d}{dp} (\mathcal{L}[1]) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{p^2}}}$

$$\left[\frac{1}{p} \right]' = [p^{-1}]' = (-1) \cdot p^{-2} = -\frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \mathcal{L}[1 \cdot \overset{f(t)}{t^2}] = -\frac{d}{dp} (\mathcal{L}[1]) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{p^3}}}$$

$$\left[\frac{1}{p^2} \right]' = [p^{-2}]' = -2 \cdot p^{-3} = -\frac{2}{p^3}$$

$$\mathcal{L}[t^3] = \dots$$

V5 obraz derivace

$$\mathcal{L}[f'] = p \cdot \mathcal{L}[f] - \lim_{\lambda \rightarrow 0+} f(\lambda) = p \cdot F(p) - \lim_{\lambda \rightarrow 0+} f(\lambda)$$

Zdůvodnění:

$$\int_0^{+\infty} f'(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda = \left| \begin{array}{l} u = e^{-p\lambda} \rightarrow u' = -p e^{-p\lambda} \\ v' = f'(\lambda) \rightarrow v = f(\lambda) \end{array} \right| = \left[e^{-p\lambda} \cdot f(\lambda) \right]_0^{+\infty} + \underbrace{p \int_0^{+\infty} f(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda}_{p \cdot F(p)}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (e^{-p\lambda} f(\lambda)) - \lim_{\lambda \rightarrow 0+} e^{-p\lambda} f(\lambda) + p \cdot F(p) =$$

$$= 0 - e^{-p \cdot 0} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0+} f(\lambda) + p F(p) = p F(p) - \lim_{\lambda \rightarrow 0+} f(\lambda)$$

Příklad:

$$\mathcal{L}[\cos \lambda] = \mathcal{L}[(\sin \lambda)'] = p \cdot \mathcal{L}[\sin \lambda] - \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \sin \lambda =$$

$$\left(\text{víme, že } \mathcal{L}[\sin \lambda] = \frac{1}{p^2 + 1}, p > 0 \right) \quad \downarrow \text{spojitost v } 0+$$

$$= p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \sin 0 = \underline{\underline{\frac{p}{p^2 + 1}, p > 0}}$$

Poznámka:

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} f(\lambda)$ se někdy značí $f(0+)$
- ještě více f je spojitá v bodě 0 zprava, potom $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} f(\lambda) = f(0)$
- v aplikacích má $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} f(\lambda)$ význam počáteční podmínky!

V6

obraz integrálu s proměnnou horní mezí

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{\lambda} f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(\lambda)]$$

Zohodnění: $g(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(\tau) d\tau = \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitivní fce} \\ \text{k fci } g(\lambda)}}{H(\tau)} \right]_0^{\lambda} = H(\lambda) - H(0)$

$$\mathcal{L}[g(\lambda)] = ??$$

$$g'(\lambda) = H'(\lambda) = f(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} g(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} (H(\lambda) - H(0)) = H(0) - H(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[f(\lambda)] = \mathcal{L}[g'(\lambda)] = p \mathcal{L}[g(\lambda)] - \underbrace{\lim_{\lambda \rightarrow 0+} g(\lambda)}_{=0} = p \cdot \mathcal{L}[g(\lambda)]$$

Shrnutí: Zatím jsme vybudovali tento slovník Laplaceovy transformace

$f(\lambda)$ vzor	$F(p)$ obraz
1	$\frac{1}{p}, p > 0$
$\sin \lambda$	$\frac{1}{p^2+1}, p > 0$
$\sin(\omega \lambda)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}, p > 0, \omega > 0$
$e^{a\lambda}$	$\frac{1}{p-a}, p > a$
λ	$\frac{1}{p^2}$
λ^2	$\frac{2}{p^3}$
$\cos \lambda$	$\frac{p}{p^2+1}, p > 0$

Slovník Laplaceovy transformace

Obraz	Předmět
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{(n-1)!}{p^n}$	t^{n-1}
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(p-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$
$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\sinh at$
$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\cosh at$
$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \sin \omega t$