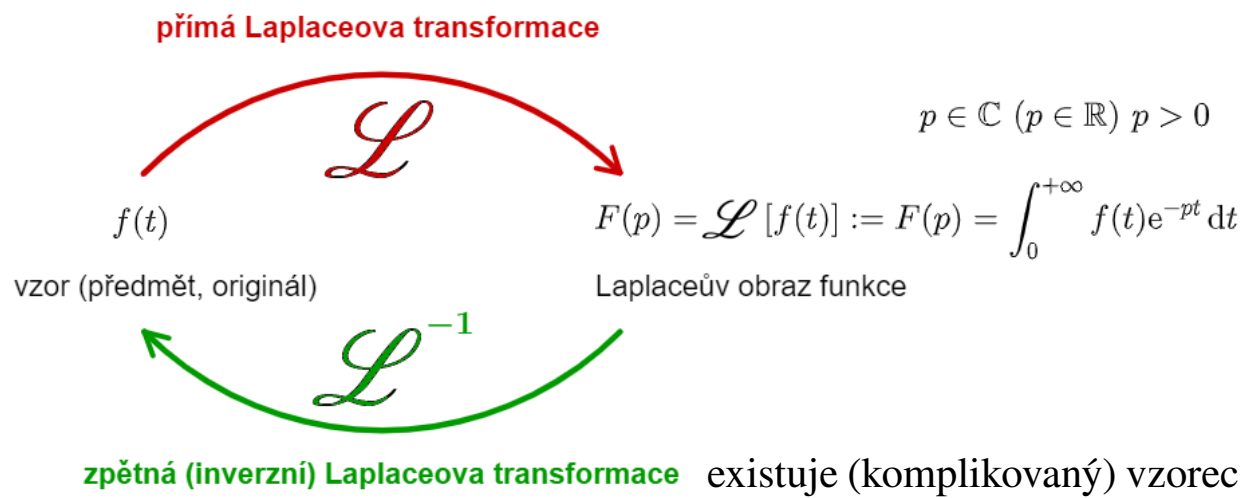


REKAPITULACE

Vlastnosti Laplaceovy transformace

V1	<u>LINEARITA</u>	$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2]$
V2	<u>ZMĚNA MĚŘÍTKA</u>	$\mathcal{L}[f(\omega t)](p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$
V3	<u>POSUNUTÍ V OBRAZU</u>	$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](p - a) = F(p - a)$
V4	<u>DERIVACE OBRAZU</u>	$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[f(t)]) = -\frac{dF}{dp}$
V5	<u>OBRAZ DERIVACE</u>	$\mathcal{L}[f'] = p \cdot \mathcal{L}[f] - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$
V6	<u>OBRAZ INTEGRÁLU</u>	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)]$

Zatím jsme vybudovali tento **slovník Laplaceovy transformace**:

$f(t)$... vzor	$F(p)$... obraz
1	$\frac{1}{p}, \quad p > 0$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2 + 1}, \quad p > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0, \quad \omega > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}, \quad p > a$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$
t^3	$\frac{6}{p^4}$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2 + 1}, \quad p > 0$

Příklady: $\omega > 0$

$$1) \quad \underline{\mathcal{L}[\sinh(\omega t)]} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\right] \stackrel{\boxed{\text{V1}}}{=} \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{\omega t} - e^{-\omega t}] \stackrel{\boxed{\text{V1}}}{=} \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}[e^{\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-\omega t}] \right) =$$

$$\stackrel{\text{slovník}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p - (-\omega)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(p + \omega) - (p - \omega)}{(p - \omega) \cdot (p + \omega)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\omega}{p^2 - \omega^2} = \underline{\underline{\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}}}, \quad p > \omega$$

$$2) \quad \underline{\mathcal{L}[\cos(\omega t)]} \stackrel{\boxed{\text{V2}}}{=} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\frac{p^2 + \omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{p}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \underline{\underline{\frac{p}{p^2 + \omega^2}}}, \quad p > 0$$

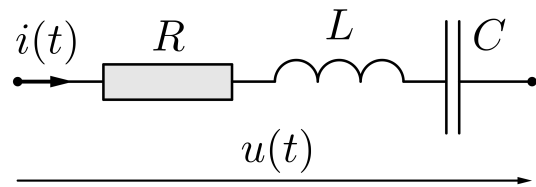
$$3) \quad \underline{\mathcal{L}[\cosh(\omega t)]} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \cdot (\sinh(\omega t))'\right] \stackrel{\boxed{\text{V1}}}{=} \frac{1}{\omega} \cdot \mathcal{L}[(\sinh(\omega t))'] \stackrel{\boxed{\text{V5}}}{=} \frac{1}{\omega} \left(p \cdot \mathcal{L}[\sinh(\omega t)] - \lim_{t \rightarrow 0_+} \sinh(\omega t) \right) \stackrel{1)}{=}$$

$$\stackrel{1)}{=} \frac{1}{\omega} \left(p \cdot \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{p}{p^2 - \omega^2}}}, \quad p > \omega$$

$$4) \quad \underline{\mathcal{L}[f''(t)]} = \mathcal{L}[(f'(t))'] \stackrel{\boxed{\text{V5}}}{=} p \cdot \mathcal{L}[f'(t)] - \lim_{t \rightarrow 0_+} f'(t) \stackrel{\boxed{\text{V5}}}{=} p \cdot \left(p \cdot \mathcal{L}[f(t)] - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) \right) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f'(t) =$$

$$= \frac{p^2 \cdot \mathcal{L}[f(t)] - p \cdot \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f'(t)}{\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{počáteční} & \text{počáteční} \\ \text{podmínka} & \text{podmínka} \end{array}}$$

Příklad: pasivní lineární RLC dvojpól



$$\left(u'_C(t) = \frac{1}{C} i(t) \quad \text{viz strana 21} \right)$$

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Označme: $\mathcal{L}[i(t)] =: I(p)$ $i(t)$... stavová proměnná (neznáme)

$$\begin{aligned} \text{Potom} \quad U(p) &:= \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}\left[Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau\right] = \\ &\stackrel{\text{V1}}{=} R \mathcal{L}[i(t)] + L \mathcal{L}[i'(t)] + \frac{1}{C} \mathcal{L}\left[\int_0^t i(\tau) d\tau\right] = \\ &\stackrel{\text{V5, V6}}{=} R I(p) + L \left(p I(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} i(t) \right) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} I(p) = \\ &= R I(p) + pL I(p) - L \lim_{t \rightarrow 0_+} i(t) + \frac{1}{Cp} I(p) = \\ &= \underbrace{\left(R + pL + \frac{1}{Cp} \right)}_{=: Z(p)} I(p) - \underbrace{L \lim_{t \rightarrow 0_+} i(t)}_{\text{počáteční podmínka (ať je rovna 0)}} = \\ &\quad \text{obrazová impedance} \\ &\quad \text{(viz odborné předměty)} \end{aligned}$$

Závěr:

Zobecněný Ohmův zákon ... $U(p) = Z(p) \cdot I(p)$

Význam Laplaceovy transformace

$$u(t) = Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

v původní proměnné t jde o integro-diferenciální vztah

↓

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p)$$

v nové proměnné p jde o algebraický vztah

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} \longrightarrow I(p) = Y(p) U(p)$$

$Z(p)$... obrazová impedance

$Y(p)$... obrazová admitance

Shrnutí:

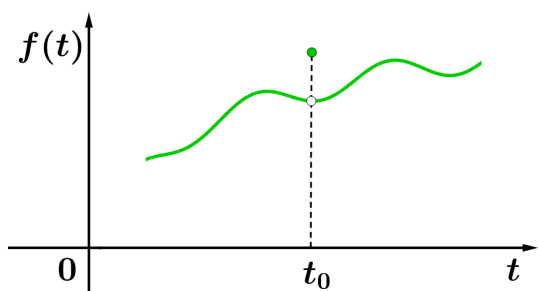
Po použití Laplaceovy transformace jsme místo rovnosti s derivacemi a integrály, které jsou v $u(t)$, dostali algebraický vztah bez derivací a integrálů (v komplexní proměnné) pro $U(p)$.

Víme: Ne každou funkci $f(t)$ lze zobrazit v Laplaceově transformaci, tj. vypočítat $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$!

Zobrazitelné funkce

Funkci f lze zobrazit v Laplaceově transformaci, jestliže platí:

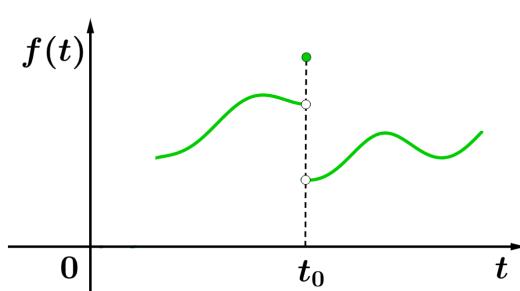
- ① na každém omezeném intervalu $\langle a; b \rangle \subset \langle 0; +\infty \rangle$ má funkce f nejvýše konečně mnoho bodů nespojitosti nejvýše 1. druhu



$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \neq f(t_0)$$

odstranitelná nespojitost

OK.



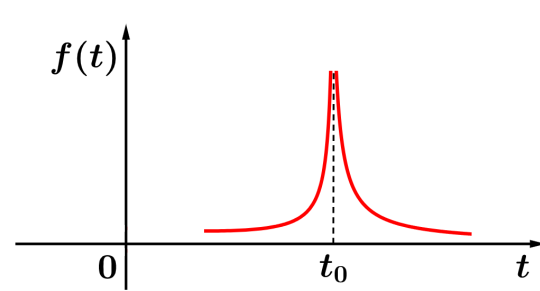
$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) = l_1 \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t) = l_2 \in \mathbb{R}$$

$$l_1 \neq l_2$$

skok (nespojitost I. druhu)

OK.



jinak

KO.

Protože nejde

„integrát uvnitř $\langle 0; +\infty \rangle$! “

- ② f má nejvýše exponenciální růst, tj. $\exists m, \sigma > 0 \quad \forall t \in \langle 0, +\infty \rangle : |f(t)| \leq m e^{\sigma t}$

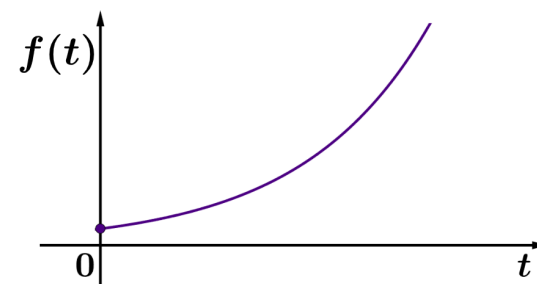
Proč? „Abychom mohli integrovat až do $+\infty$! “

$$|f(t) e^{-pt}| \leq |f(t)| \cdot e^{-pt} \leq m e^{\sigma t} e^{-pt} = m e^{(\sigma-p)t}$$

$$\underline{p > \sigma} \Rightarrow \sigma - p < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\sigma-p)t} = 0 \Rightarrow$$

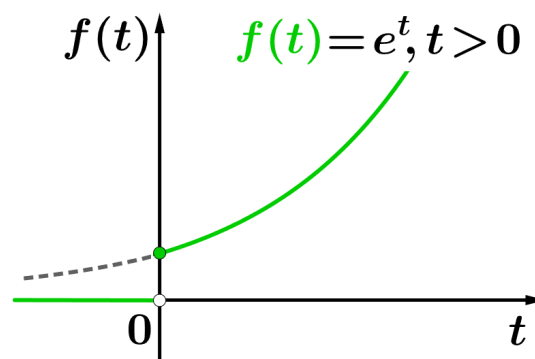
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} m e^{(\sigma-p)t} dt = \left[m \frac{e^{(\sigma-p)t}}{\sigma-p} \right]_0^{+\infty} = \underbrace{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m}{\sigma-p} e^{(\sigma-p)t}}_{=0} - \frac{m}{\sigma-p} \in (0; +\infty)$$

Takže
$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \leq \int_0^{+\infty} m e^{(\sigma-p)t} dt < +\infty ! \quad \text{pro } p > \sigma$$

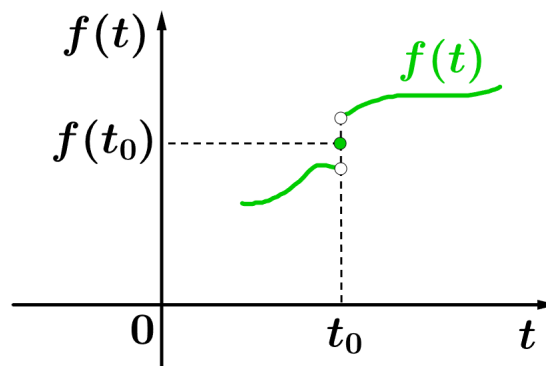


Poznámka: Často se připojují dvě dodatečné podmínky na f .

③ $\forall t < 0 : f(t) = 0$



④ $\forall t_0 \in \langle 0; +\infty \rangle : f(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t) \right)$



(Podmínky ③ a ④ nebudeme potřebovat)

Pro zavedení zpětné Laplaceovy transformace si uvědomme:

Platí:

$$\bullet \quad \forall t \in \langle 0; +\infty) : f(t) = g(t) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathcal{L}[f(t)]}_{F(p)} = \underbrace{\mathcal{L}[g(t)]}_{G(p)} \quad (\text{přímá Laplaceova transformace})$$

Poznámka:

Stačí i méně: funkce f a g se mohou lišit v konečně mnoha bodech (to nemá vliv na hodnotu integrálu).

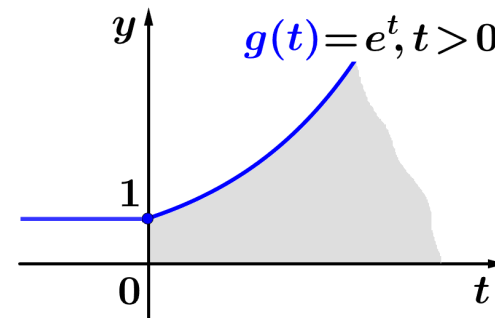
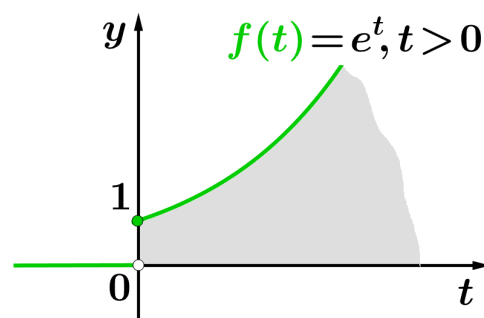
Nyní se snažíme ukázat platnost opačné implikace pro zpětnou Laplaceovu transformaci.

• Lerchova věta: $(\Leftarrow)$

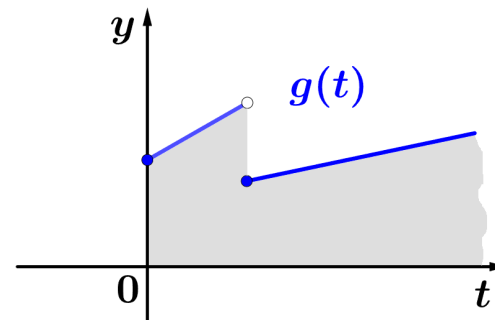
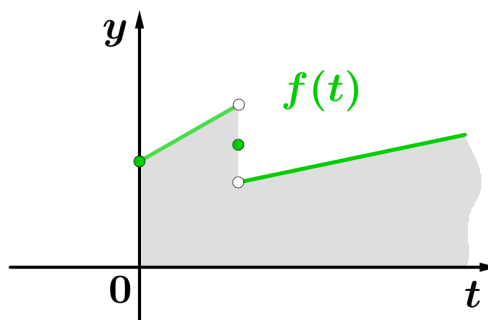
Jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, potom $f(t_0) = g(t_0)$ pro každé $t_0 \in \langle 0; +\infty)$, ve kterém jsou obě funkce spojité, tj. funkce f a g se mohou lišit pouze v bodech nespojitosti, kterých je málo díky podmínce ① a pro $t < 0$.

např:

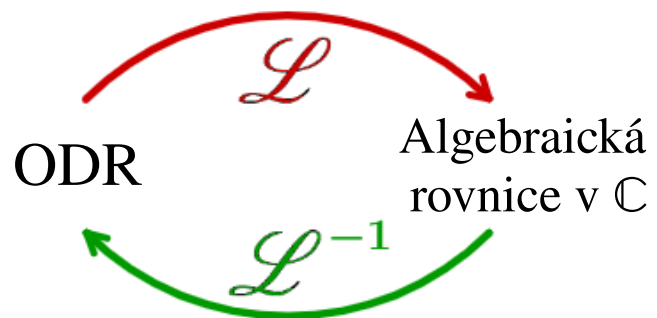
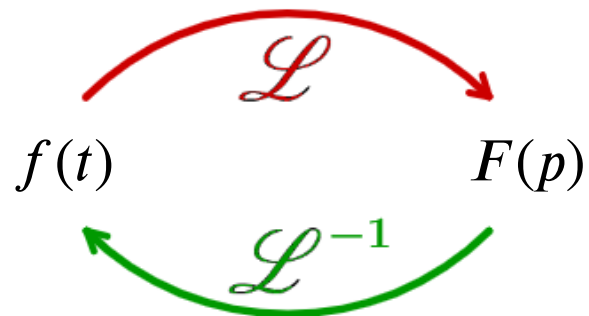
viz podmínka ③



viz podmínka ④



$\Rightarrow$ Proto podmínky ③ a ④ nemusíme uvažovat.



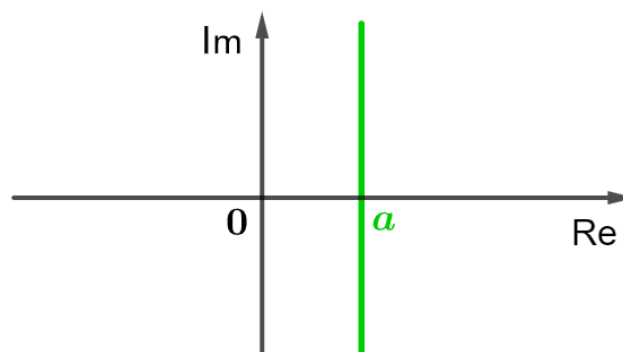
Slovník

$f(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$F(p)$
	$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	

Definiční vztah pro zpětnou Laplaceovu transformaci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

... integrujeme přes přímku v $\mathbb{C}$



... integrál musí konvergovat

... Nepoužívá se !

Slovník Laplaceovy transformace

$f(t)$... vzor	$F(p)$... obraz
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$