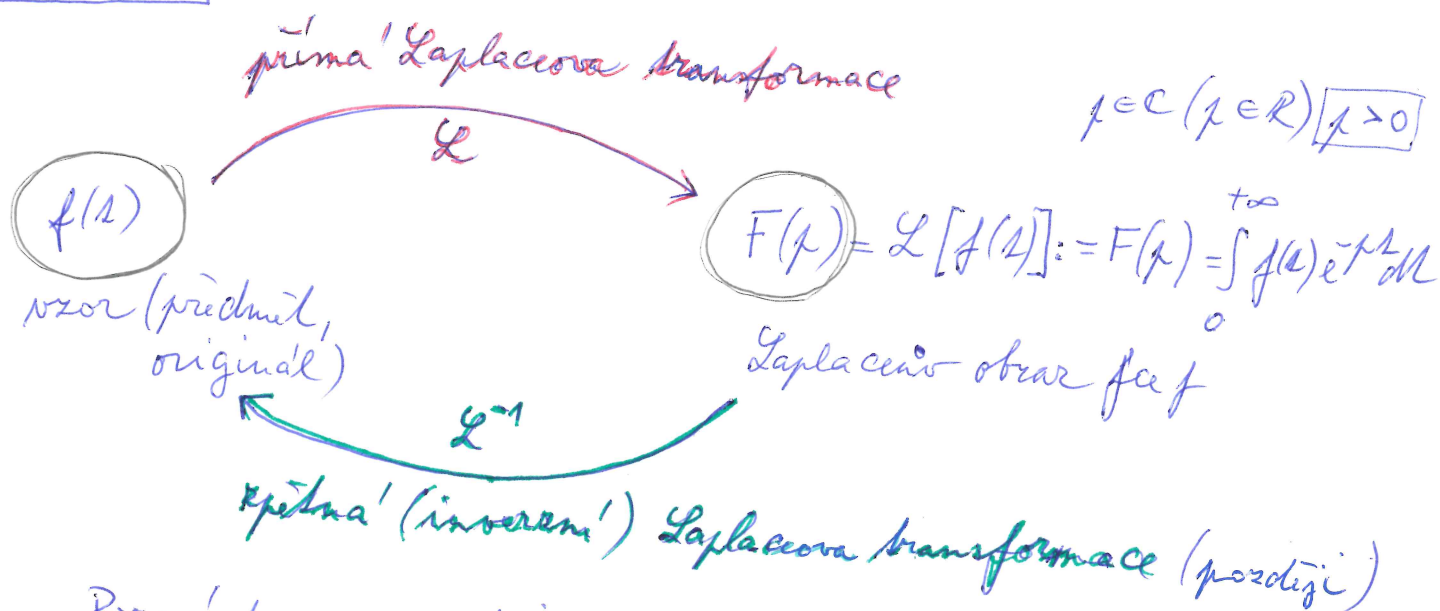


REKAPITULACE



Poznámka: Existuje vzorec (komplikovaný) pro $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$, který se nebudeme učit! (viz např. google)

- V1 linearita: $\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1(t)] + \beta \mathcal{L}[f_2(t)]$
- V2 změna měřítka: $\mathcal{L}[f(\omega t)](p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$
- V3 posunutí voboru: $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](p-a) = F(p-a)$
- V4 derivace obrazu: $\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{dp} (\mathcal{L}[f(t)]) = -\frac{dF}{dp}(p)$
- V5 obraz derivace: $\mathcal{L}[f'(t)] = p \mathcal{L}[f(t)] - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$
- V6 obraz integrálu: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p} F(p)$
- Slovník Laplaceovy transformace (z minula):

vzor $f(t)$	obraz $F(p)$
1	$\frac{1}{p}, p > 0$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2 + 1}, p > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, p > 0, \omega > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}, p > a$
1	$\frac{1}{p^2}, p > 0$
t^2	$\frac{2}{p^3}, p > 0$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2 + 1}, p > 0$

Príklady: $\omega > 0$

$\sinh(\omega t)$

-74-

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\mathcal{L}[\sinh(\omega t)]} &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\right] = \\ &\stackrel{V1}{=} \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{\omega t} - e^{-\omega t}] = \\ &\stackrel{V1}{=} \frac{1}{2} (\mathcal{L}[e^{\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-\omega t}]) = \end{aligned}$$

slovník (minulé)

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p - (-\omega)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(p + \omega) - (p - \omega)}{(p - \omega)(p + \omega)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\omega}{p^2 - \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad p > \omega$$

*neracionálna
na podmiene*

$$2) \quad \underline{\mathcal{L}[\cos(\omega t)]} \stackrel{V2}{=} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\frac{p^2 + \omega^2}{\omega^2}} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{p}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0$$

$$3) \quad \underline{\mathcal{L}[\cosh(\omega t)]} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \cdot (\sinh(\omega t))'\right] =$$

$$\stackrel{V1}{=} \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[(\sinh(\omega t))'] =$$

$$\stackrel{V5}{=} \frac{1}{\omega} \left(p \cdot \mathcal{L}[\sinh(\omega t)] - \lim_{t \rightarrow 0+} \sinh(\omega t) \right) =$$

$$\stackrel{1)}{=} \frac{1}{\omega} \left(p \cdot \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} - 0 \right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad p > \omega$$

$$4) \underline{\mathcal{L}[f''(t)]} = \mathcal{L}[\mathcal{L}[f'(t)]'] =$$

$$\stackrel{V5}{=} p \cdot \underline{\mathcal{L}[f'(t)]} - \lim_{t \rightarrow 0+} f'(t) =$$

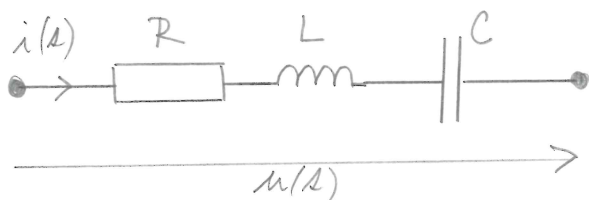
$$\stackrel{V5}{=} p \cdot \left(p \cdot \mathcal{L}[f(t)] - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \right) - \lim_{t \rightarrow 0+} f'(t) =$$

$$= \underline{p^2 \mathcal{L}[f(t)]} - \underbrace{p \cdot \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)}_{\text{poc. podm.}} - \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0+} f'(t)}_{\text{poc. podminka}}$$

atd...

Príklad (pasívny lineárny RLC dvojpoľ):

(viz sk 4)
 $u_c' = \frac{1}{C} i$



$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = \\ = Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Označme: $\mathcal{L}[i(t)] =: I(p)$
 (menovine)

$i(t)$... stavová premenná

Potom

$$U(p) := \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}\left[Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau\right] =$$

$$\stackrel{V1}{=} R \mathcal{L}[i(t)] + L \mathcal{L}[i'(t)] + \frac{1}{C} \mathcal{L}\left[\int_0^t i(\tau) d\tau\right] =$$

$$\stackrel{V5, V6}{=} R I(p) + L \left(p I(p) - \lim_{t \rightarrow 0+} i(t) \right) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} I(p) =$$

$$= R I(p) + p L I(p) - L \lim_{t \rightarrow 0+} i(t) + \frac{1}{C p} I(p) =$$

$$= \left(R + p L + \frac{1}{C p} \right) I(p) - L \lim_{t \rightarrow 0+} i(t)$$

(viz odborné predmety) $\rightarrow$ $=: Z(p)$
 ... obrazová impedancia

poc. podminka
 ak je rovná 0.

Záver: $U(p) = Z(p) I(p) \Leftrightarrow I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = Y(p) U(p)$
 zobecnený Ohmuv zákon

$$u(k) = Ri(k) + Li'(k) + \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

↓

v původní proměnné k jde o integro-diferenciální vztah

↓ výsledek Laplaceovy transformace

$$U(p) = Z(p) I(p)$$

↓

v nové proměnné p jde o algebraický vztah

→ obrátová admittance

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} \rightarrow I(p) = Y(p) U(p)$$

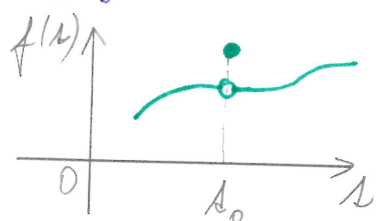
($Z(p)$... obrátová impedance)

Shrnutí: Po použití Laplaceovy transformace jsme místo rovnosti s derivacemi a integrály, které jsou v $u(k)$, dostali algebraický vztah bez derivací a integrálů (v komplexní proměnné) pro $U(p)$

Víme: Ke každé funkci $f(t)$ lze zobrazit v Laplaceově transformaci, tj. vypočítat $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$!

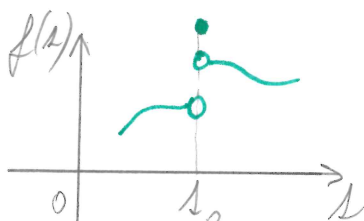
Zobrazitelné funkce: Funkci f lze zobrazit v Laplaceově transformaci, jestliže platí:

- ① na každém omezeném intervalu $\langle a; b \rangle \subset \langle 0; +\infty \rangle$ má funkce f nejvýše konečně mnoho bodů nespojitosti nejvýše 1. druhu.



$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \neq f(t_0)$$

odstranitelná
nespojitost
OK.

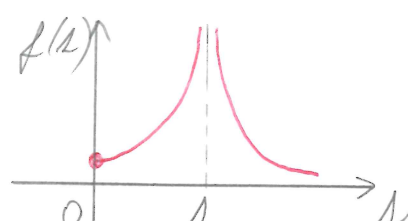


$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) =: l_1 \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) =: l_2 \in \mathbb{R}$$

$$l_1 \neq l_2$$

skok (nespojitost
I. druhu)
OK.

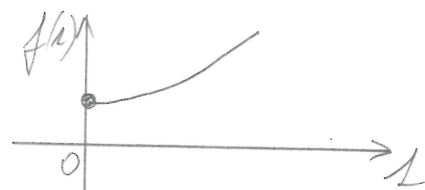


jinak

KO.

Protože nejde
"integrovat nově"
 $\langle 0; +\infty \rangle$!

- ② f má nejvýše exponenciální růst,
tj. $\exists m, \delta > 0 \forall t \in \langle 0; +\infty \rangle: |f(t)| \leq m e^{\delta t}$



Proč? „Abychom mohli integrovat až do $+\infty$!“

$$|f(t) e^{-pt}| \leq |f(t)| \cdot e^{-pt} \leq m e^{\delta t} e^{-pt} = m e^{(\delta - p)t}$$

$$\underline{p > \delta} \Rightarrow \delta - p < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\delta - p)t} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} m e^{(\delta - p)t} dt = \left[m \frac{e^{(\delta - p)t}}{\delta - p} \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m}{\delta - p} e^{(\delta - p)t} - \frac{m}{\delta - p} \in (0; +\infty)$$

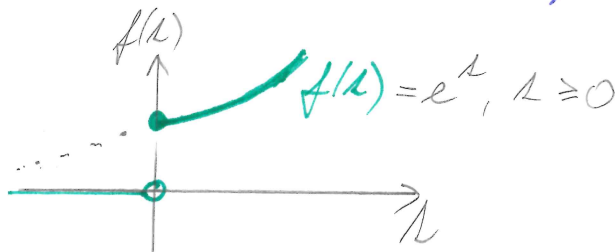
Takže

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \leq \int_0^{+\infty} m \cdot e^{(5-p)t} dt < +\infty!$$

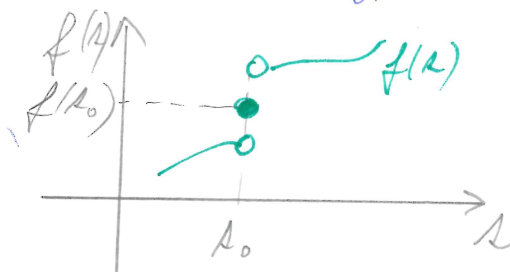
$\downarrow$
pro $p > 5$

Poznámka: Často se připojují dvě dodatečné podmínky na f

③ $\forall t < 0 : f(t) = 0$



④ $\forall t_0 \in (-\infty; +\infty) : f(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t) \right)$



(Podmínky ③ a ④ nelze dále potvrdovat)

Pro zavedení průběhu Laplaceovy transformace si uvědomme:

Platí:

• $\forall t \in (-\infty; +\infty)$
 $f(t) = g(t)$

Přímá L.T.

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\mathcal{L}[f(t)]}_{F(p)} = \underbrace{\mathcal{L}[g(t)]}_{G(p)}$$

Poznámka:

Stačí i méně: funkce f a g se mohou lišit v konečné množině bodů

(to nemá vliv na hodnotu integrálu)

Nyní se snažíme ukázat platnost opačné implikace
pro průběhu Laplaceovy transformace:

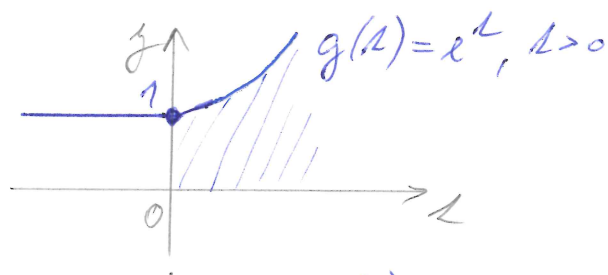
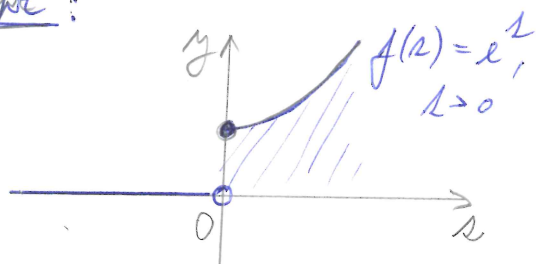
Lerchova věta ($\Leftarrow$)

jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, potom

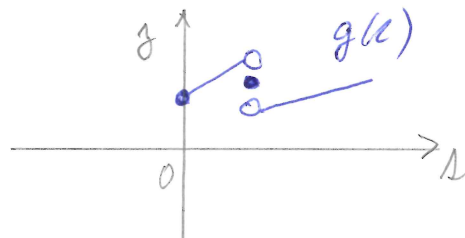
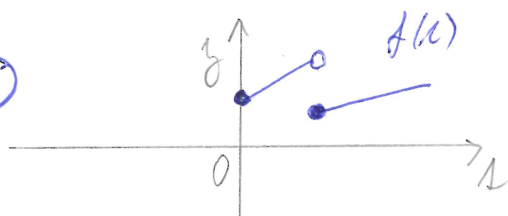
$f(t_0) = g(t_0)$ pro každé $t_0 \in (-\infty; +\infty)$, ve kterém jsou obě funkce spojité, tj. funkce f a g se mohou lišit pouze v bodech nespojitosti, kterých je máto díky podmínce ① a pro $t < 0$.

např.:

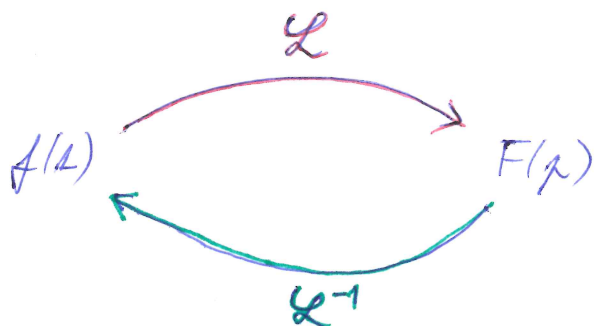
viz podm. ③



viz podm. ④



$\rightarrow$ proto podmínky ③ a ④ nemusíme uvažovat



$f(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$F(p)$
1	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{p}, p > 0$
$\sin t$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{p^2 + 1}, p > 0$
$\vdots$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\vdots$

$\mathcal{L} \dots$ výjeme slovník

řešení $\leftarrow$ ODR

Algebraická rovnice v $\mathbb{C}$ $\rightarrow$ vyřešíme

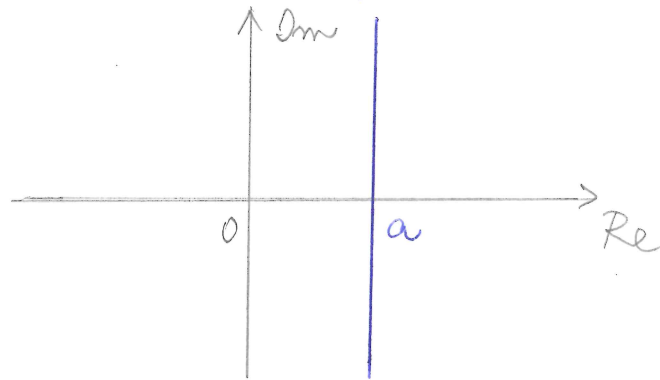
$\mathcal{L}^{-1} \dots$ opět výjeme slovník

řískaíme pomocí
zpětné Laplaceovy
transformace na
řešení alg. rovnice

Definície ortah pro pjetuon Laplaceov transformaci:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pk} dp$$

... integrujeme přes pítaku $\in \mathbb{C}$



... integra'l musí konvergovat

... NEPOUŽÍVA' SE !

Slovník Laplaceovy transformace

Obraz	Předmět
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{(n-1)!}{p^n}$	t^{n-1}
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(p-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$
$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\sinh at$
$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\cosh at$
$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \sin \omega t$