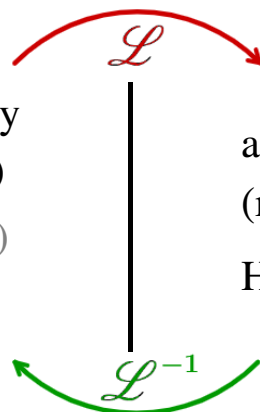


Schéma řešení ODR pomocí Laplaceovy transformace

lineární ODR n -tého řádu s konstantními koeficienty
(resp. soustava n ODR 1. řádu s konst. koeficienty)
+ počáteční podmínky (pro $\mathcal{L}$ použijeme rovnou)

Hledáme: $y(t) = ?$ $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$



algebraická rovnice v komplexním oboru
(resp. soustava algebraických rovnic)

Hledáme: $Y(p) = ?$ $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$

Poznámka:

Uvedené schéma připomíná **symbolicko-komplexní metodu** z odborných předmětů, ta ovšem funguje jen na situace, kdy zdroje v obvodu jsou harmonické ($\sin, \cos \dots$) a hledáme tzv. ustálené stavy, tj. jak např. vypadá průběh proudu v obvodu po odeznění všech přechodných dějů. Na rozdíl od toho, Laplaceova transformace zahrne i tyto přechodné děje a hlavně i zdroje, které nejsou nutně harmonické.

Při použití **slovníku Laplaceovy transformace** si uvědomme:

	$f(t) \dots$ vzor	$F(p) \dots$ obraz
	$1, t \geq 0$	$\frac{1}{p}, p > 0, p \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{Re} p > 0, p \in \mathbb{C}) !$
	$e^{at}, t \geq 0$	$\frac{1}{p - a}, p > a \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a, p \in \mathbb{C}) !$

Příklad:

$$\begin{aligned} y'(t) + 2y(t) &= 4 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

cíl: $y(t) = ?$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{p(p+2)}\right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] = ? \quad \dots \text{ není přímo v našem slovníku}$$

Víme, ale: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1$ a $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] = e^{-2t}$... (ze slovníku)

VAROVÁNÍ: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] \neq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right]$

Víme: $\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2] = \alpha F_1(p) + \beta F_2(p) \quad / \mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)] = \alpha \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_1(p)]}_{f_1(t)} + \beta \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_2(p)]}_{f_2(t)} \quad \dots \text{ linearita } \boxed{\mathbf{V1}}$$

Cíl: místo **součinu** chceme mít **součet**, tj. použijeme ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

označme: $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$

$$\mathcal{L}[y'(t) + 2y(t)] = \mathcal{L}[4]$$

$$\mathcal{L}[y'(t)] + 2 \cdot \mathcal{L}[y(t)] = 4 \cdot \mathcal{L}[1]$$

$$pY(p) - \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) + 2 \cdot Y(p) = 4 \cdot \frac{1}{p}$$

$$pY(p) + 2Y(p) = \frac{4}{p} \quad \text{Cíl: } Y(p) = ?$$

$$(p+2)Y(p) = \frac{4}{p} \quad /: (p+2) \neq 0$$

$$Y(p) = \frac{4}{p(p+2)}$$

Metoda A = ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKYChceme:

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} \quad / \cdot p(p+2)$$

$$1 = A(p+2) + Bp$$

$$p=0: \quad 1 = A(0+2) + B \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2A \quad \Rightarrow \quad \underline{A = \frac{1}{2}} \quad (\text{dosadili jsme za } p \text{ nulové body})$$

$$p=-2: \quad 1 = A(-2+2) + B \cdot (-2) \quad \Rightarrow \quad 1 = -2B \quad \Rightarrow \quad \underline{B = -\frac{1}{2}}$$

nebo jinak:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \cdot p + 1 = Ap + 2A + Bp \\ 0 \cdot p + 1 = (A+B)p + 2A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{array}}} \quad (\text{porovnáme koeficienty na obou stranách rovnice})$$

Dostáváme:

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{p+2}$$

Takže:

$$\begin{aligned} \underline{y(t)} &= 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2} \right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{p+2} \right] = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+2} \right] \right) = \\ &= \underline{2 - 2e^{-2t}}, \quad t \geq 0 ! \end{aligned}$$

Shrnutí:

- zobrazili jsme počáteční úlohu pomocí Laplaceovy transformace na algebraickou rovnici pro $Y(p)$
 - vypočítali jsme $Y(p)$
 - zobrazili jsme $Y(p)$ pomocí zpětné Laplaceovy transformace na $y(t)$
- (použili jsme rozklad na parciální zlomky, linearitu $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^{-1}$ a slovník)

Rozklad na parciální zlomky není nutný pokud použijeme jinou metodu využívající **konvoluci funkcí**.

Metoda B = VYUŽITÍ KONVOLUCE FUNKCÍ

pro $f, g: \langle 0; +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - s) g(s) ds$$

Zdůvodnění = (pomocí substituce v určitém integrálu)

$$\int_0^t f(\tau) g(\underbrace{t - \tau}_s) d\tau = \left| \begin{array}{ll} s = t - \tau & \tau = t - s \\ ds = -d\tau & d\tau = -ds \\ \tau = 0 & s = t \\ \tau = t & s = 0 \end{array} \right| = \int_t^0 f(t - s) g(s) (-ds) = \int_0^t f(t - s) g(s) ds$$

Platí:

V7

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] = F(p) \cdot G(p)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(p) \cdot G(p)] = (f * g)(t) \quad (\text{srovnej s } \underline{\text{VAROVÁNÍM}})$$

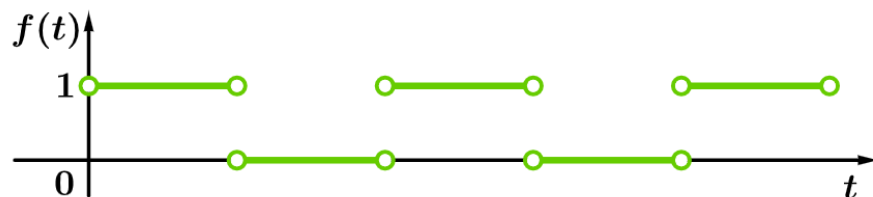
ukážeme pouze na příkladu:

$$\begin{aligned} \underline{y(t)} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{p(p+2)}\right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] \stackrel{\text{V7}}{=} 4 \cdot (1 * e^{-2t}) = \left(\begin{array}{l} \text{použijeme 2. integrál z definice} \\ f(t) = 1 \quad \forall t \end{array} \right) = \\ &= 4 \cdot \int_0^t e^{-2s} ds = 4 \cdot \left[\frac{e^{-2s}}{-2} \right]_0^t = 4 \cdot \left(\frac{e^{-2t}}{-2} - \frac{1}{-2} \right) = \underline{-2e^{-2t} + 2}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme stejný výsledek jako při použití rozkladu na parciální zlomky.

Závěrečné poznámky:

- ① U všech rovnic, např. $y' + 2y = b(t)$, jsme požadovali, aby pravá strana $b(t)$ byla spojitá. Pomocí Laplaceovy transformace lze zobrazit i nespojité funkce, které nemají nespojitosti II. druhu. Umíme tedy řešit i rovnice s nespojitou pravou stranou, např.



význam $b(t)$... zdroje

odpovídá střídavému zapnutí, vypnutí, ...

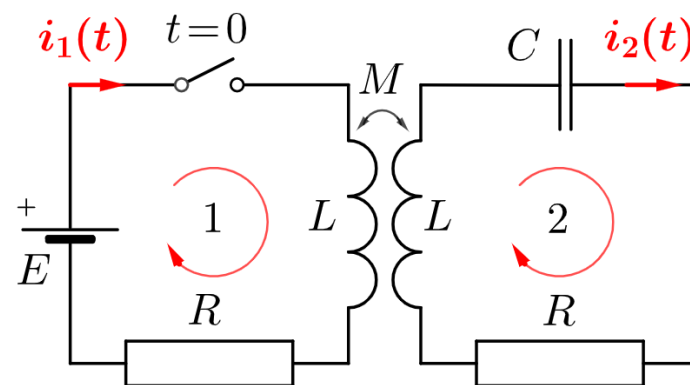
- ② Funguje i na integro-diferenciální rovnice, resp. jejich soustavy.

Příklad:

soustava dvou integro-diferenciálních rovnic
induktivně vázané dvě smyčky, M ... přenos

Kirchhoffovy zákony:

(součet napětí v každé smyčce je roven 0)



$$L i_1'(t) + M i_2'(t) + R i_1(t) = E$$

$$L i_2'(t) + M i_1'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + R i_2(t) = 0$$

$\mathcal{L}$ ↪

$$I_1(p) = \mathcal{L}[i_1(t)]; \quad I_2(p) = \mathcal{L}[i_2(t)]; \quad \text{poč. podm.: } i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$$

$$L p I_1(p) + M p I_2(p) + R I_1(p) = \frac{E}{p}$$

$$L p I_2(p) + M p I_1(p) + \frac{1}{C} \frac{1}{p} I_2(p) + R I_2(p) = 0$$

$$\mathcal{L}[E] = \mathcal{L}[E \cdot 1] = E \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{E}{p}$$

$$\mathcal{L}[i_1'] = p \cdot \mathcal{L}[i_1] - \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0+} i_1(t)}_{=0}$$

- Řešením soustavy $\mathbf{A}\vec{I} = \vec{b}$ vypočítáme $I_1(p)$ a $I_2(p)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R + Lp & Mp \\ Mp & R + Lp + \frac{1}{Cp} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} E \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{pmatrix}$$

$$\vec{I} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{E (CLp^2 + CRp + 1)}{p (CL^2p^3 + 2CLR p^2 + Lp - CM^2p^3 + CR^2p + R)} \\ -\frac{CEMp}{CL^2p^3 + 2CLR p^2 + Lp - CM^2p^3 + CR^2p + R} \end{pmatrix}$$

např. pro $E = C = L = R = M = 1$:

$$I_1(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p(2p^2 + 2p + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p + 1}{2p^2 + 2p + 1} = \dots = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p + \frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

$$I_2(p) = -\frac{p}{2p^2 + 2p + 1} = \dots = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p + \frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

- Provedeme $\mathcal{L}^{-1}$

$$\underline{i_1(t)} = \mathcal{L}^{-1}[I_1(p)] = \underline{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

$$\underline{i_2(t)} = \mathcal{L}^{-1}[I_2(p)] = \underline{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

③ Existují i jiné transformace ! Volba vhodné transformace závisí na řešeném problému.

- Fourierova transformace ... frekvenční analýza spojitého signálu (f)
- diskrétní Fourierova transformace ... frekvenční analýza diskrétního signálu (Σ)
- transformace Z ... řešení diferenčních rovnic

Opět jsou odvozeny vlastnosti těchto transformací a případně slovníky. Podrobnosti viz literatura, google, atd.

Ve stručnosti uvedme základní informace k Fourierově transformaci v porovnání s Laplaceovou transformací.

Základní vzorce Laplaceovy transformace

Def	<u>DEFINICE</u>	$\mathcal{L}[f(t)](p) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$
V1	<u>LINEARITA</u>	$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2]$
V2	<u>ZMĚNA MĚŘÍTKA</u>	$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
V3	<u>POSUNUTÍ V OBRAZU</u>	$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = F(p - a)$
V4	<u>DERIVACE OBRAZU</u>	$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{dp} F(p)$
V5	<u>OBRAZ DERIVACE</u>	$\mathcal{L}[f'(t)] = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$
V6	<u>OBRAZ INTEGRÁLU</u>	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{1}{p} F(p)$

Základní vzorce Fourierovy transformace

Def DEFINICE

$$\mathcal{F}[f(t)](j\omega) := F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

V1 LINEARITA

$$\mathcal{F}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{F}[f_1] + \beta \mathcal{F}[f_2]$$

V2 ZMĚNA MĚŘÍTKA

$$\mathcal{F}[f(at)](j\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

V3 POSUNUTÍ V OBRAZU

$$\mathcal{F}[e^{jat} \cdot f(t)] = F(j(\omega - a))$$

V4 DERIVACE OBRAZU

$$\mathcal{F}[t \cdot f(t)] = j \frac{d}{d\omega} F(j\omega)$$

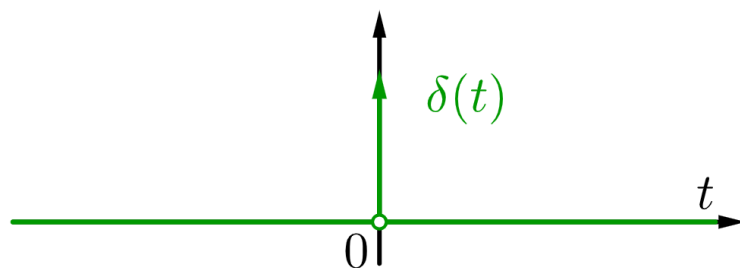
V5 OBRAZ DERIVACE

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(j\omega)$$

V6 OBRAZ INTEGRÁLU

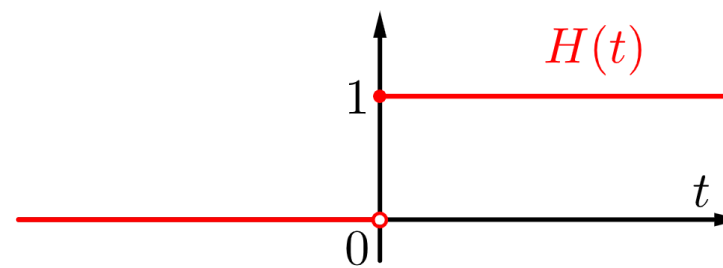
$$\mathcal{F}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

Diracův (jednotkový) impuls



$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Heavisideova (skoková) funkce



$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Slovník Laplaceovy transformace

$f(t)$... vzor	$F(p)$... obraz
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$

Slovník Fourierovy transformace

$f(t)$... vzor	$F(j\omega)$... obraz
Diracův (jednotkový) impuls $\delta(t)$	1
Heavisideova (skoková) funkce $H(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\cos(at)$	$\pi [\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)]$
$\sin(at)$	$j\pi [\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at} H(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$t e^{-at} H(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$e^{-at} \cos(bt) H(t), a > 0$	$\frac{a + j\omega}{b^2 + (a + j\omega)^2}$
$e^{-at} \sin(bt) H(t), a > 0$	$\frac{b}{b^2 + (a + j\omega)^2}$