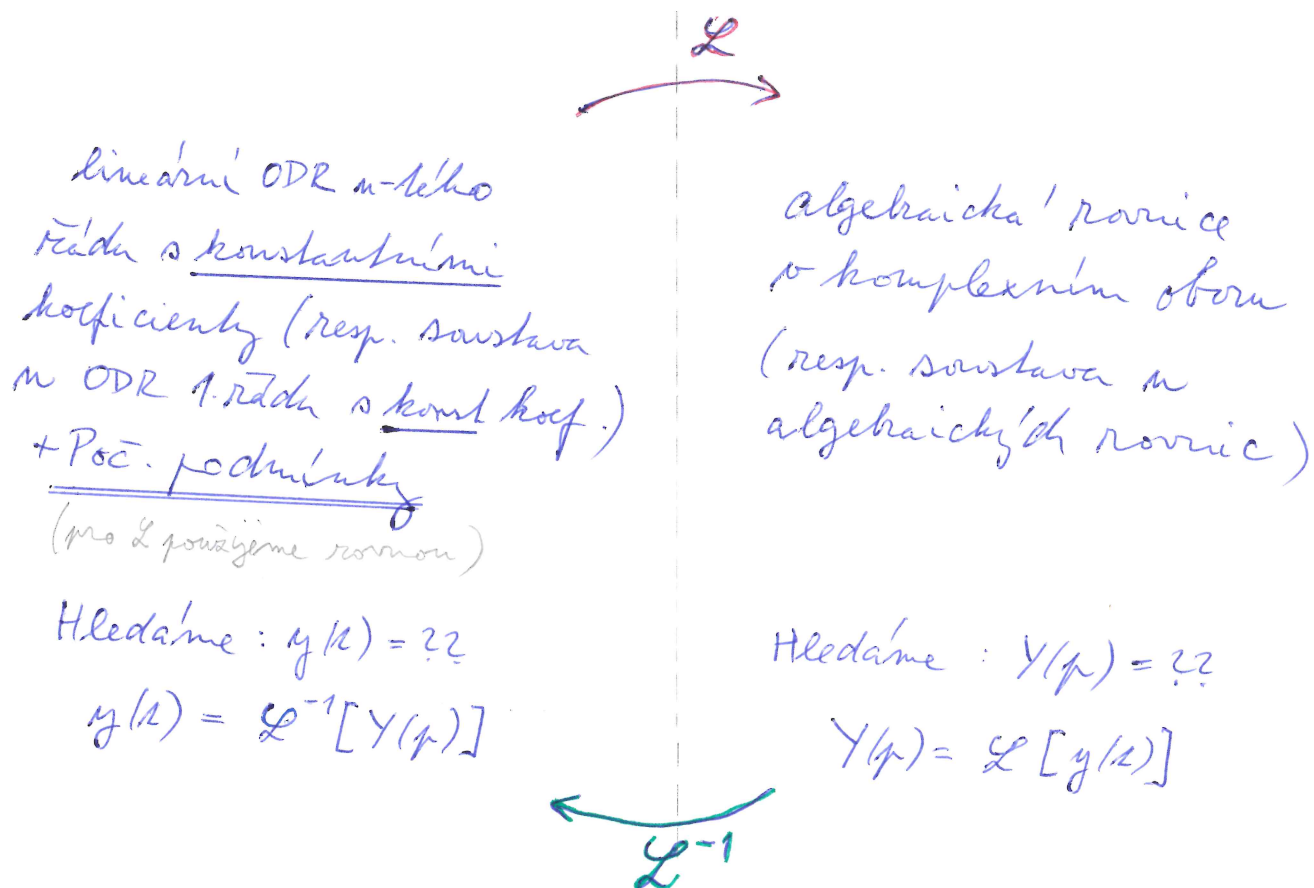
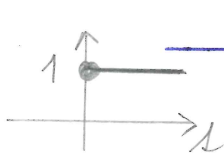
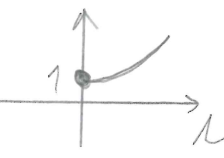


Schéma řešení ODR pomocí Laplaceovy transformace



Poznámka: Uvedené schéma připomíná symbolicko-komplexní metodu z odborných předmětů, ta ovšem funguje jen na situace, kdy zdroje v obvodu jsou harmonické (sin, cos...) a hledáme tzv. ustálené stavy, tj. jak například průběh proudu v obvodu po odeznění všech přechodných dějů. Na rozdíl od toho, Laplaceova transformace zahrne i tyto přechodné děje a hlavně i zdroje, které nejsou nutně harmonické.

Tři použitelná slovníka Laplaceovy transformace si uvědomme:

	$f(t)$	$F(p)$
	$1, t \geq 0$	$\frac{1}{p} \quad p > 0, p \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{Re} p > 0, p \in \mathbb{C})!$
	$e^{at}, t \geq 0$	$\frac{1}{p-a} \quad p > a \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a, p \in \mathbb{C})!$
	$\vdots$	$\vdots$

Príklad

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 4 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

cl: $y(x) = ??$

Označme: $Y(p) = \mathcal{L}[y(x)]$

$$\mathcal{L}[y'(x) + 2y(x)] = \mathcal{L}[4]$$

$$\mathcal{L}[y'(x)] + 2 \cdot \mathcal{L}[y(x)] = 4 \cdot \mathcal{L}[1]$$

$$pY(p) - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)}_{y(0)=0} + 2Y(p) = 4 \cdot \frac{1}{p}$$

$$pY(p) + 2Y(p) = 4 \frac{1}{p} \quad \text{cl: } Y(p) = ?$$

$$(p+2)Y(p) = \frac{4}{p} \quad | : (p+2) \neq 0$$

$$Y(p) = \frac{4}{p(p+2)}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{p(p+2)}\right] = 4 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] = ??$$

→ neru' priamo s našim slovníkom

Víme, ale: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1$; $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] = e^{-2x}$ (ke slovníku)

Varovanie: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] \neq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right]$

Víme: $\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2] = \alpha F_1(p) + \beta F_2(p) \quad | \cdot \mathcal{L}^{-1}$
 $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)] = \alpha \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_1(p)]}_{f_1(x)} + \beta \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_2(p)]}_{f_2(x)}$
 (linearita $\boxed{V1}$)

Cil: miesto součinnu chceme mít $\oplus$, tj. použijeme

ROZKLAD NA PARCIAĽNÍ ZLOMKY = METODA A

Chceme: $\frac{1}{p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} \quad | \cdot p(p+2)$

$$1 = A(p+2) + Bp$$

$$p=0: 1 = A(0+2) + B \cdot 0 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow \underline{A = \frac{1}{2}}$$

$$p=-2: 1 = A(-2+2) + B \cdot (-2) \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow \underline{B = -\frac{1}{2}}$$

(dosadili jsme za p nulové body)

jina možnost:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \cdot p + 1 = A p + 2A + B p \\ 0 \cdot p + 1 = (A+B)p + 2A \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{A = \frac{1}{2}} \\ \underline{B = -\frac{1}{2}} \end{array}$$

(porovnáme koeficienty na obou stranách rovnice)

Dosazujeme:

$$\frac{1}{p(p+2)} = \overset{=A}{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{p} + \overset{=B}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{p+2}$$

Takže:

$$\begin{aligned} \underline{y(z)} &= 4 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2} \right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+2} \right] = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+2} \right] \right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-2z} \right) = \\ &= \underline{2 - 2e^{-2z}}, \quad t \geq 0! \end{aligned}$$

Shrnutí: • zobrazení jsme počáteční úlohu $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ algebraickou rovnicí pro $Y(p)$.

• vypočítali jsme $Y(p)$

• zobrazení jsme $Y(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(z)$

použili jsme rozklad na parciální zlomky, lineární $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^{-1}$ a slovník

(rozklad na parciální zlomky není nutný při použití jiné metody, která využívá konvoluci funkcí.)

METODA B

vyniká konvoluce funkcí $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f * g)(\lambda) := \int_0^\lambda f(\tau) g(\lambda - \tau) d\tau \stackrel{(*)}{=} \int_0^\lambda f(\lambda - s) g(s) ds$$

Důkaz: $(*)$ pomocí substituce v určitém integrálu

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda f(\tau) g(\lambda - \tau) d\tau &= \left. \begin{array}{l} s = \lambda - \tau \Leftrightarrow \tau = \lambda - s \\ ds = -d\tau \Leftrightarrow d\tau = -ds \\ \tau = 0 \Leftrightarrow s = \lambda \\ \tau = \lambda \Leftrightarrow s = 0 \end{array} \right| = \\ &= \int_\lambda^0 f(\lambda - s) g(s) (-ds) = - \int_\lambda^0 f(\lambda - s) g(s) ds = \int_0^\lambda f(\lambda - s) g(s) ds \end{aligned}$$

Platí: $\mathcal{L}[(f * g)(\lambda)] = \mathcal{L}[f(\lambda)] \cdot \mathcal{L}[g(\lambda)] = F(p) \cdot G(p) \quad [V7]$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(p) \cdot G(p)] = (f * g)(\lambda) \quad (\text{provozní } \text{Věrovašník})$$

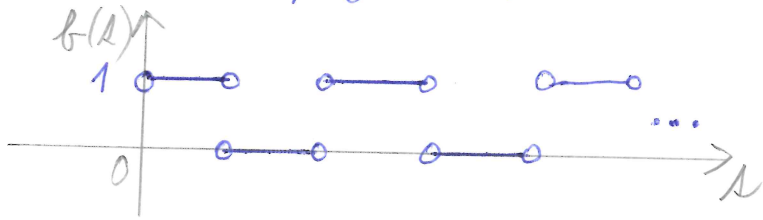
Dokážeme pouze na příkladu:

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{p(p+2)}\right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] \stackrel{[V7]}{=} 4 \cdot \left(1 \stackrel{f}{*} e^{-2\lambda} \stackrel{g}{*}\right) = \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{použijeme 2. integrál} \\ \text{z definice } (f(\lambda) = 1, \forall \lambda) \end{array} \right) = 4 \cdot \int_0^\lambda 1 \cdot e^{-2s} ds = 4 \cdot \left[\frac{e^{-2s}}{-2} \right]_0^\lambda = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{e^{-2\lambda}}{-2} - \frac{1}{-2} \right) = \underline{\underline{-2e^{-2\lambda} + 2}}, \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme stejný výsledek jako při pomocí rozkladu na parciální zlomky.

Závěrečné poznámky:

- ①. U všech rovnic, např. $y' + 2y = b(t)$, jsme požadovali, aby pravá strana $b(t)$ byla spojita. Pomocí Laplaceovy transformace lze rozbít i nespojité funkce, které nemají nespojitosti II. druhu. Umíme tedy řešit i rovnice s nespojitou pravou stranou, např.

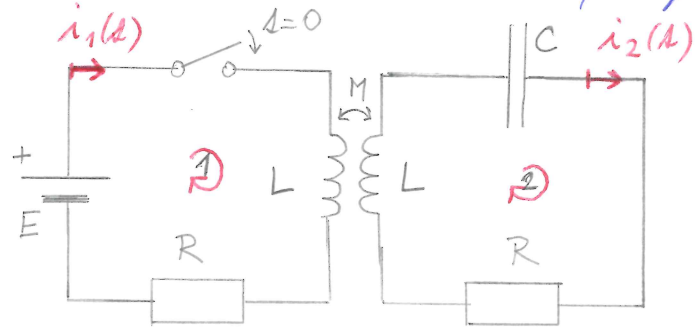


význam $b(t)$... zdroje
odpovídá 'zapnutí',
'vypnutí', ...

- ②. Funguje i na integro-diferenciálních rovnicích, resp. jejich soustavách.

Příklad:

Soustava dvou rovnic integro-diferenciálních



indukčně vázané
dvě smyčky
M... přenos

Kirchhoffovy zákony:

(součet napětí v každé smyčce = 0)

$$L i_1'(t) + M i_2'(t) + R i_1(t) = E$$

$$L i_2'(t) + M i_1'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + R i_2(t) = 0$$

$\mathcal{L}$ $I_1(p) = \mathcal{L}[i_1(t)]$; $I_2(p) = \mathcal{L}[i_2(t)]$; Poč. podmínky: $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$

$$\begin{aligned} L p I_1(p) + M p I_2(p) + R I_1(p) &= \frac{E}{p} \\ L p I_2(p) + M p I_1(p) + \frac{1}{C} \frac{1}{p} I_2(p) + R I_2(p) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}, \mathcal{L}[E] = \mathcal{L}[E \cdot 1] = E \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{E}{p} \right) \\ \left(\mathcal{L}[i_1'] = p \cdot \mathcal{L}[i_1] - \lim_{t \rightarrow 0+} i_1(t) = 0 \right) \end{aligned}$$

Hypotéza: $I_1(p)$ a $I_2(p)$

Provedeme $\mathcal{L}^{-1}$: $i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_1(p)] = \dots$

$$i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_2(p)] = \dots$$

$$(Lp + R) I_1(p) + Mp I_2(p) = \frac{E}{p}$$

$$Mp \cdot I_1(p) + (Lp + R + \frac{1}{Cp}) I_2(p) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} R + Lp & Mp \\ Mp & R + Lp + \frac{1}{Cp} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{E}{p} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}b =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{E(CLp^2 + CRp + 1)}{p(CL^2p^3 + 2CLRp^2 + Lp - CM^2p^3 + CR^2p + R)} \\ -\frac{CEMp}{CL^2p^3 + 2CLRp^2 + Lp - CM^2p^3 + CR^2p + R} \end{pmatrix}$$

mapr. pro $E=C=L=R=M=1$:

$$I_1(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p(2p^2 + 2p + 1)} = \frac{A}{2p} + \frac{B}{p + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}} + \frac{C}{p + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}}$$

$$I_2(p) = -\frac{p}{2p^2 + 2p + 1} = \frac{D}{2p + 1 - i} + \frac{E}{p + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}}$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-4}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$$

$$A=2$$

$$B = -\frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

$$C = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

$$D = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$E = -\frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

$$i_1(t) = 1 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) \cdot e^{(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})t} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\right) \cdot e^{(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})t}$$

$$i_2(t) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\right) \cdot e^{(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})t} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) \cdot e^{(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})t}$$

...

③ Existují i jiné transformace! Volba vhodné transformace závisí na řešení problému

- Fourierova transformace ... frekvencí analýza spojitého signálu ($\int$)

- diskrétní Fourierova transformace ... frekvencí analýza diskrétního signálu (Σ)

- transformace Z ... řešení diferenciálních rovnic

Typy jsou odvozeny vlastností těchto transformací a případně slovníky. Podrobnosti viz literatura, google, atd.

- Ve stručnosti uvedeme základní informace k Fourierově transformaci v porovnání s Laplaceovou transformací.

Základní vzorce Laplaceovy transformace

1. definice: $\mathcal{L}[f(t)](p) := F(p) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$
2. linearita: $\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1(t)] + \beta \mathcal{L}[f_2(t)]$
3. změna měřítka: $\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$
4. posunutí v obrazu: $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](p) = F(p-a)$
5. derivace obrazu: $\mathcal{L}[t f(t)](p) = -\frac{d}{dp} F(p)$
6. obraz derivace: $\mathcal{L}[f'(t)] = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$
7. obraz integrálu: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} F(p)$

Základní vzorce Fourierovy transformace

1. definice: $\mathcal{F}[f(t)](j\omega) := F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
2. linearita: $\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{F}[f_1(t)] + \beta \mathcal{F}[f_2(t)]$
3. změna měřítka: $\mathcal{F}[f(at)](j\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4. posunutí v obrazu: $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(j(\omega - \omega_0))$
5. derivace obrazu: $\mathcal{F}[t f(t)] = j \frac{d}{d\omega} F(j\omega)$
6. obraz derivace: $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(j\omega)$
7. obraz integrálu: $\mathcal{F}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(j\omega)}{j\omega}$

Slovník Laplaceovy transformace

Obraz	Předmět
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{(n-1)!}{p^n}$	t^{n-1}
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(p-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$
$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\sinh at$
$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\cosh at$
$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \sin \omega t$

Slovník Fourierovy transformace

$f(t)$ Předmět	Obraz $F(j\omega)$
$t^n e^{-at}, a > 0, n > 0$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(a+j\omega)^{n+1}}$
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} \exp(-a \omega) a > 0$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$ t e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{e^{-a t }}{\sqrt{ t }}, a > 0$	$\sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2} + a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{\exp(-a/\sqrt{ t })}{\sqrt{ t }}, a > 0$	$\frac{\sqrt{2}(\cos \sqrt{2\pi \omega } - \sin \sqrt{2\pi \omega })}{ \omega }$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$te^{-at^2}, a > 0$	$-j \frac{\sqrt{\pi}\omega}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\frac{\sin at}{\sqrt{ t }}$	$j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega - a }} - \frac{1}{\sqrt{ \omega + a }} \right)$
$\frac{\cos at}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega - a }} + \frac{1}{\sqrt{ \omega + a }} \right)$
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
$\sin at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{2a} + \frac{\pi}{4}\right)$
$\cos at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{2a} - \frac{\pi}{4}\right)$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

1. definice

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

2. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n c_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{L}(f_i) = \sum_{i=1}^n c_i F_i, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

3. změna měřítka

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0,$$

4. substituce v obrazu

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(p - a), \quad a \in \mathbb{C},$$

5. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(p),$$

6. obraz derivace

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0+),$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \dots - p f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+).$$