

Taylorovy řady

Dáno:

- bod $x_0 \in \mathbb{R}$ (střed Taylorovy řady)
- funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má derivace všech potřebných řádů („pěkná“) např. e^x , $\sin x$, ...

Taylorův polynom n -tého stupně funkce f v bodě x_0 je definován vztahem:

$$T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Značení: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, ...

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0), \quad f^{(1)}(x_0) = f'(x_0), \quad f^{(2)}(x_0) = f''(x_0), \quad \dots$$

Poznámky:

- $T_n(x)$ závisí na bodě x_0 , ve kterém funkci f aproximujeme. Často bereme $x_0 = 0$, ale může být $x_0 \neq 0$.
- $T_n(x)$ závisí také hlavně na funkci f .

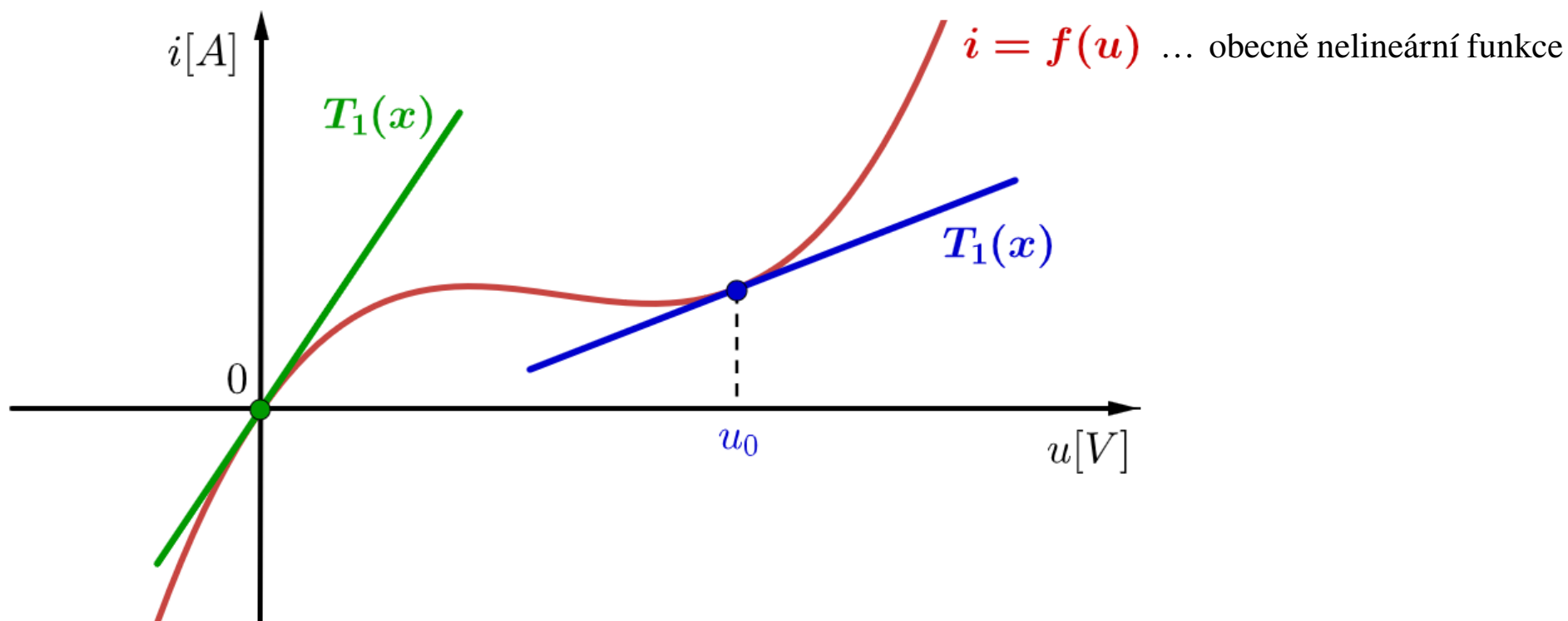
Chyba aproximace funkce f Taylorovým polynomem n -tého stupně v bodě x_0 je $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$.

Poznámka:

Pomocí Taylorova polynomu se např. počítá hodnota funkce e^x , $\sin x$ na kalkulačce a PC.

Jedná se tedy o aproximaci určenou s nějakou danou přesností.

Příklad: Voltampérová charakteristika součástky



závislost $\underline{i}$ na $\underline{u}$ nahradíme $T_1(x)$... linearizace

v bodě $u_0 = 0$... $i = \frac{1}{R} u$ (Ohmův zákon)

v bodě $u_0 \neq 0$... linearizace v pracovním bodě

Grafický význam linearizace je náhrada tečnou ke grafu funkce v daném bodě.

Příklad:

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$$

$$\underline{T_0(x)} = f(x_0) = \underline{0}$$

$$f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$\underline{T_1(x)} = \underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)} + f'(x_0)(x - x_0) = 0 + 1 \cdot (x - 0) = \underline{x}$$

$$f'(x) = \cos x; \quad f'(x_0) = \cos 0 = 1$$

$$\Rightarrow \sin x \approx x \quad \text{pro } x \approx 0 \quad \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{pro } x \rightarrow 0$$

$$\underline{T_2(x)} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 = \underline{x}$$

$$f''(x) = -\sin x; \quad f''(x_0) = -\sin 0 = 0$$

$$\Rightarrow T_2(x) = x \quad \dots \quad \text{stejný jako } T_1(x)$$

$$\underline{T_3(x)} = T_2(x) + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

$$f'''(x) = -\cos x; \quad f'''(x_0) = -\cos 0 = -1$$

$$\underline{T_4(x)} = T_3(x) + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

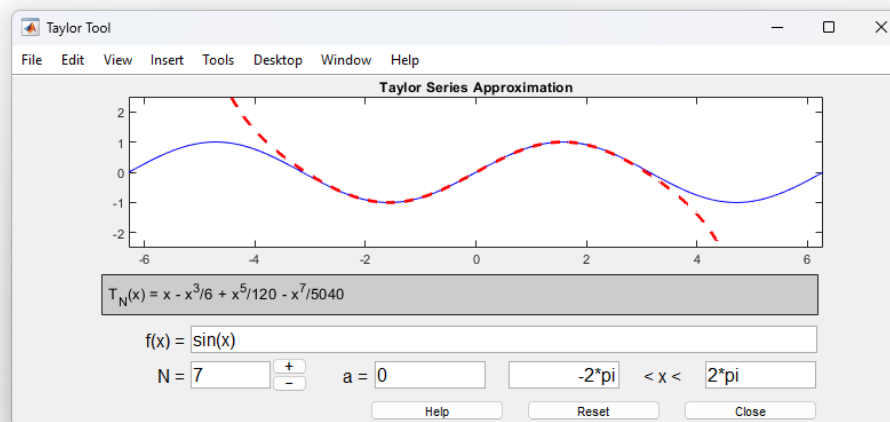
$$f^{(4)}(x) = \sin x; \quad f^{(4)}(x_0) = \sin 0 = 0$$

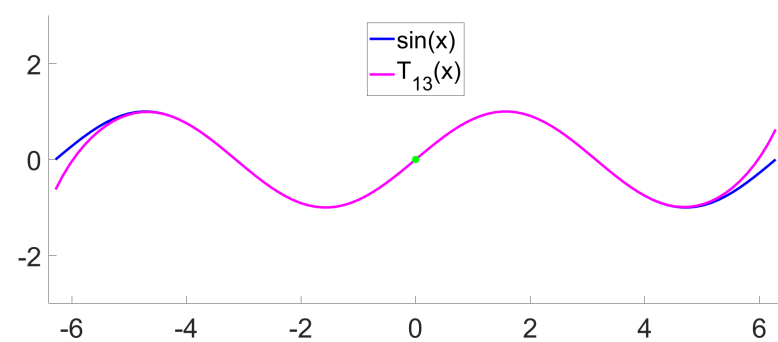
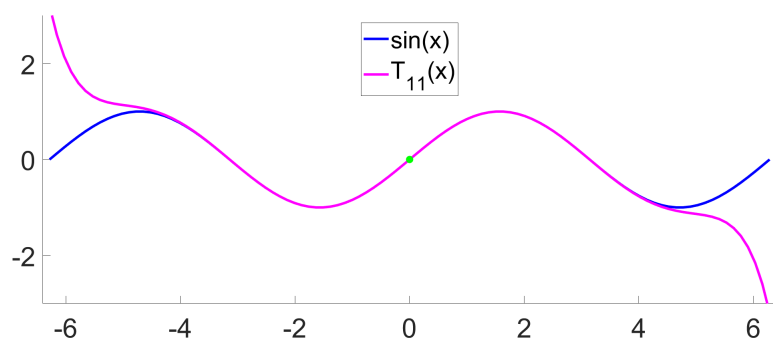
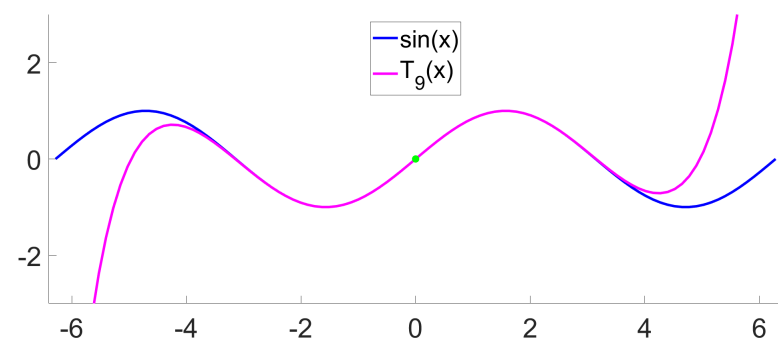
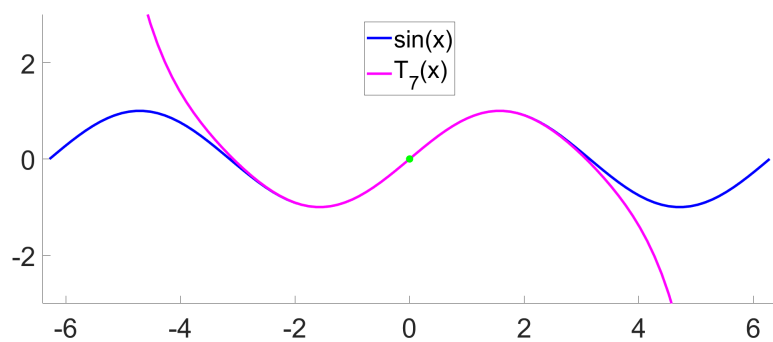
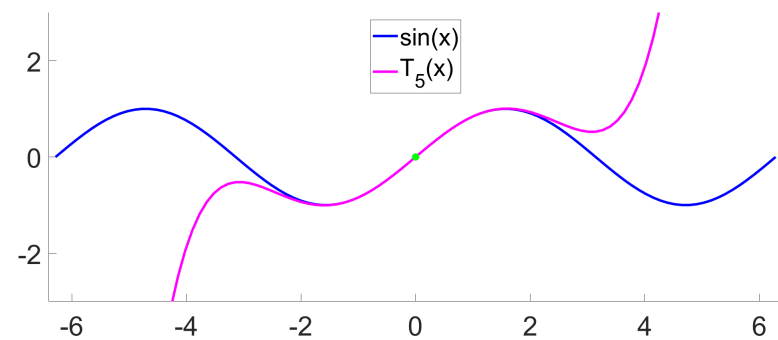
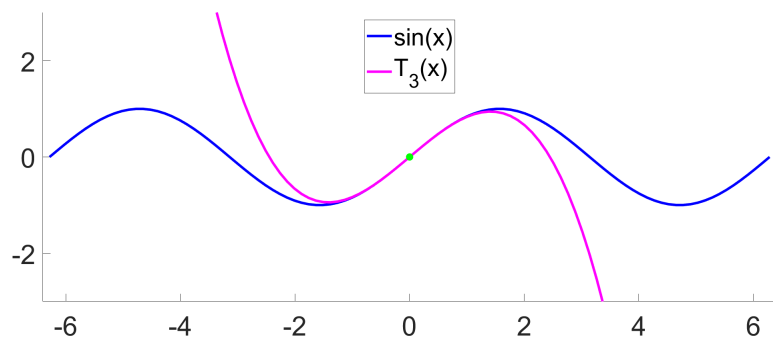
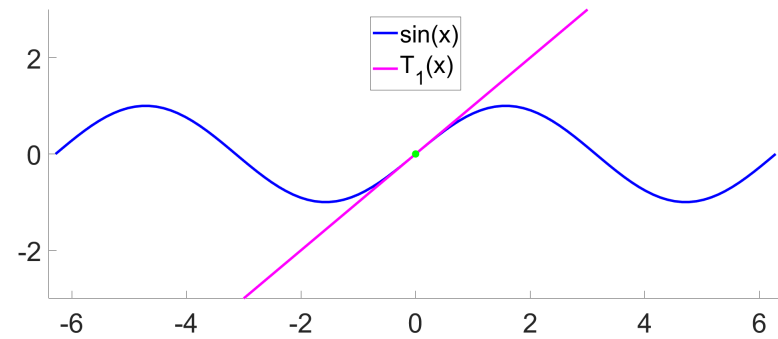
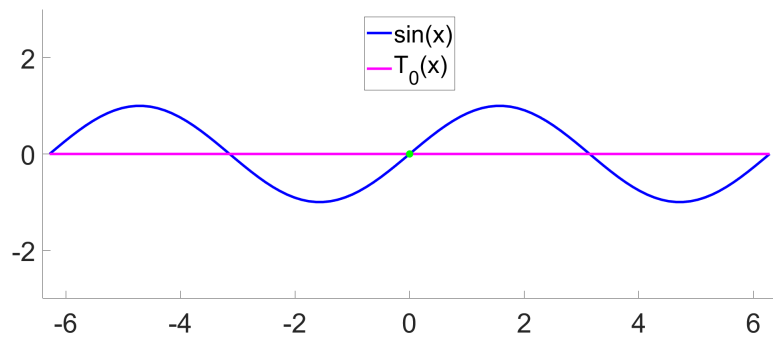
$\vdots$

$$\Rightarrow T_4(x) = x \quad \dots \quad \text{stejný jako } T_3(x)$$

MATLAB

... taylortool



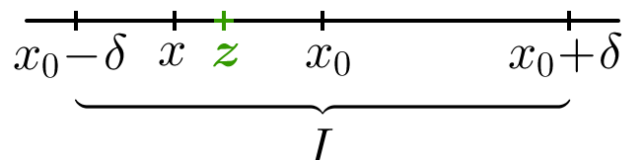


Jak je to s chybou aproximace $R_n(x)$?

Jestliže má funkce f na intervalu $I := \langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$ derivace až do řádu $n + 1$, potom lze zbytek $R_n(x)$ vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) (x - x_0)^{n+1}$$

kde bod z leží mezi x_0 a $x \in I$.



Poznámky:

- Existují i jiné tvary zbytku - Peanův, Cauchyův (viz Google).
- Vztah pro $R_n(x)$ je odvozen na základě věty o střední hodnotě.
- Nevíme, kde přesně bod z leží !

Příště se podíváme na to, jakým způsobem lze odhadnout $R_n(x)$ a co platí, pokud budeme n zvětšovat do $+\infty$.

Taylorova řada funkce f v bodě x_0 je definována vztahem:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$$

(nekonečná řada)

Poznámky:

- Pro dané $x \in \mathbb{R}$ se jedná o součet nekonečně mnoha čísel, který nemusí existovat, tj. příslušná číselná řada nemusí konvergovat (viz zimní semestr)

např. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \dots$ konverguje, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \dots$ diverguje

- $T_n(x)$ má význam n -tého částečného součtu řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \quad (s_n)_{n=1}^{+\infty} \dots \text{ posloupnost částečných součtů}$$

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{součet řady}}}{S} \dots \text{ konvergentní řada}$$

- $T_n(x)$ závisí na hodnotě $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ pro nějaká x může řada mít součet, ale pro jiná x nikoli !

Množina $x \in \mathbb{R}$, pro která příslušná číselná řada konverguje, se nazývá **obor konvergence** a značí se **K** .

- Součtová funkce Taylorovy řady** je definována vztahem:

$$T(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in K$$

Příklad:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

1) Určete $T_n(x)$:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad (x_0 = 0)$$

$$f'(x) = [(1-x)^{-1}]' = -1 \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''(x_0) = \frac{2}{(1-0)^3} = 2$$

$$f'''(x) = 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1-x)^4} \cdot (-1) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$$

$$f'''(x_0) = \frac{2 \cdot 3}{(1-0)^4} = 2 \cdot 3 = 6 = 3!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-x)^5} \quad \dots \text{ ověřte si}$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-0)^5} = 4!$$

$\vdots$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(1-x)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = n!$$

$$\begin{aligned} \underline{T_n(x)} &= 1 + 1 \cdot (x-0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-0)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (3!) \cdot (x-0)^3 + \frac{1}{4!} \cdot (4!) \cdot (x-0)^4 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot (n!) \cdot (x-0)^n = \\ &= \underline{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n} \end{aligned}$$

Tedy:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

... Taylorův polynom n -tého stupně funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ v bodě $x_0 = 0$

Pro konkrétní volbu x získáme hodnotu $T_n(x)$, tj. např.

$$x = \frac{1}{2} \quad \dots \quad T_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$x = 2 \quad \dots \quad T_n(2) = \sum_{k=0}^n 2^k$$

atd.

2) Určete obor konvergence K a součtovou funkci $T(x)$:

$$\underline{T(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \underline{\frac{1}{1-x}}, \quad \boxed{x \in (-1; 1) = K}$$

↑

číselná nekonečná geometrická řada $\forall x$

$$q = x, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro } |q| < 1$$

SHRNUTÍ:

Vstup: $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Výstup: $T(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1; 1) = K$

↳ Taylorova řada funkce f v bodě x_0 (pro jiné x_0 získáme obecně jinou Taylorovu řadu)

Tedy: $f(x) \neq T(x) \quad x \in D(f)$

ALE: $\boxed{f(x) = T(x) \quad x \in K = (-1; 1)}$

Otázky na příště:

- Pro jaké funkce existuje $T(x)$?
- Jaký je obor konvergence K ?
- Kdy platí, že $f(x) = T(x)$?

Poznámka:

Využití pro výpočet např. $\sin 2,34$ na kalkulačce

(např. $\sin 2,34 \approx T_{50}(2,34)$)

Chyba této aproximace závisí na $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) (x - x_0)^{n+1}$

Příklad k procvičení:

Určete Taylorovu řadu pro funkci $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.