

Taylorovy řady

Dáno:

- bod $x_0 \in \mathbb{R}$ (střed Taylorovy řady)
- funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má derivace všech potřebných řádů ("pěkná") např.: $e^x, \sin x, \dots$

Taylorův polynom n -tého řádu funkce f v bodě x_0
je definován vztahem:

$$T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Známí: $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \dots$
 $f^{(0)}(x_0) = f(x_0), f^{(1)}(x_0) = f'(x_0), f^{(2)}(x_0) = f''(x_0), \dots$

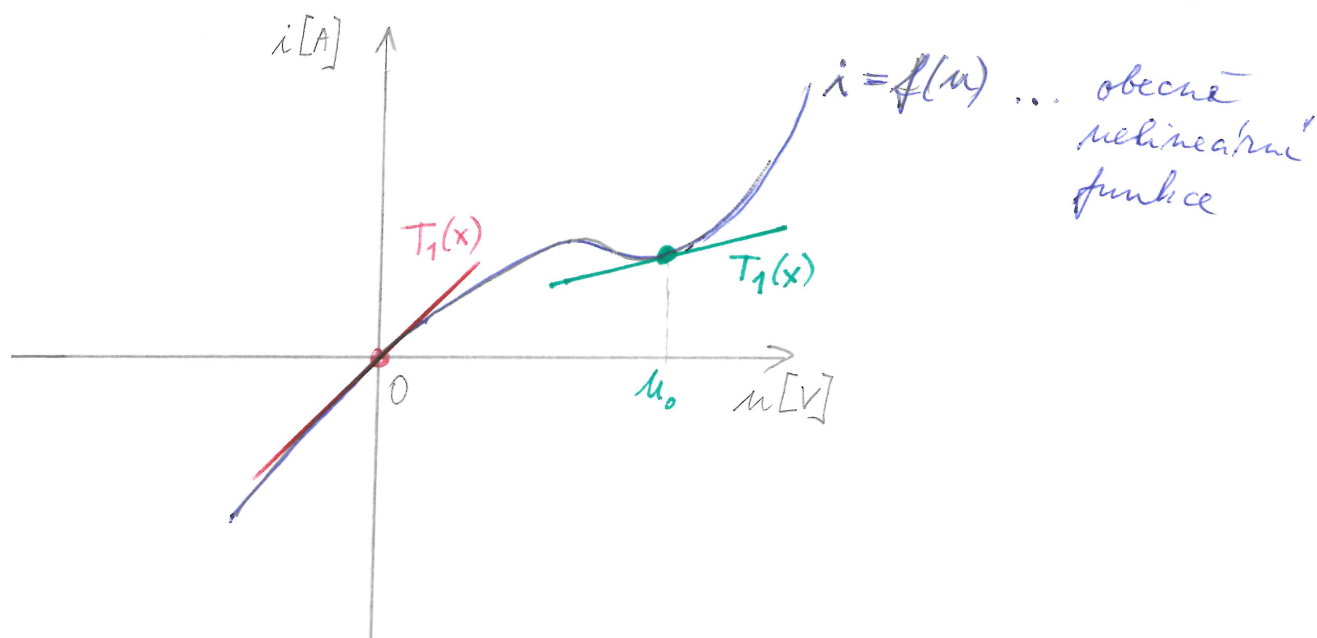
Poznámky:

- $T_n(x)$ závisí na bodě x_0 , ve kterém funkci f aproximujeme. Často bereme $x_0 = 0$, ale samozřejmě může být $x_0 \neq 0$.
- $T_n(x)$ závisí také hlavně na funkci f

Chyba aproximace funkce f Taylorovým polynomen n -tého řádu v bodě x_0 je
 $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$

Poznámka: Pomocí Taylorova polynomu se např. počítá hodnota funkce $e^x, \sin x$ na kalkulačce a PC. Jedná se tedy o aproximaci měřenou s nějakou danou přesností!

Příklad : Voltampérová charakteristika součástky



závislost i na u nahradíme $T_1(x) \dots$ linearizace

v bodě $u_0 = 0 \dots i = \frac{1}{R} u$ (Ohmův zákon)

v bodě $u_0 \neq 0 \dots$ linearizace v pracovním bodě

grafický význam linearizace je nahrazení sečnou ke grafu funkce v daném bodě

Prüklad: $f(x) = \sin x, x_0 = 0$

-89-

$$\underline{T_0(x)} = f(x_0) = \underline{0}$$

$$f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$\underline{T_1(x)} = \underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)} + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f'(x) = \cos x; f'(x_0) = \cos 0 = 1$$

$$= 0 + 1(x-0) = \underline{x} \dots \sin x \approx x \text{ pro } x \approx 0$$

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \text{ pro } x \rightarrow 0$$

$$T_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T_1(x)} + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$f''(x) = -\sin x; f''(x_0) = -\sin 0 = 0$$

$$\underline{T_2(x)} = x \dots \text{steigung' j\u00e4hro } T_1(x)$$

$$T_3(x) = T_2(x) + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3$$

$$f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$\underline{T_3(x)} = x + \frac{1}{6}(-1)(x-0)^3 = \underline{1 - \frac{x^3}{6}}$$

$$f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$T_4(x) = T_3(x) + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4$$

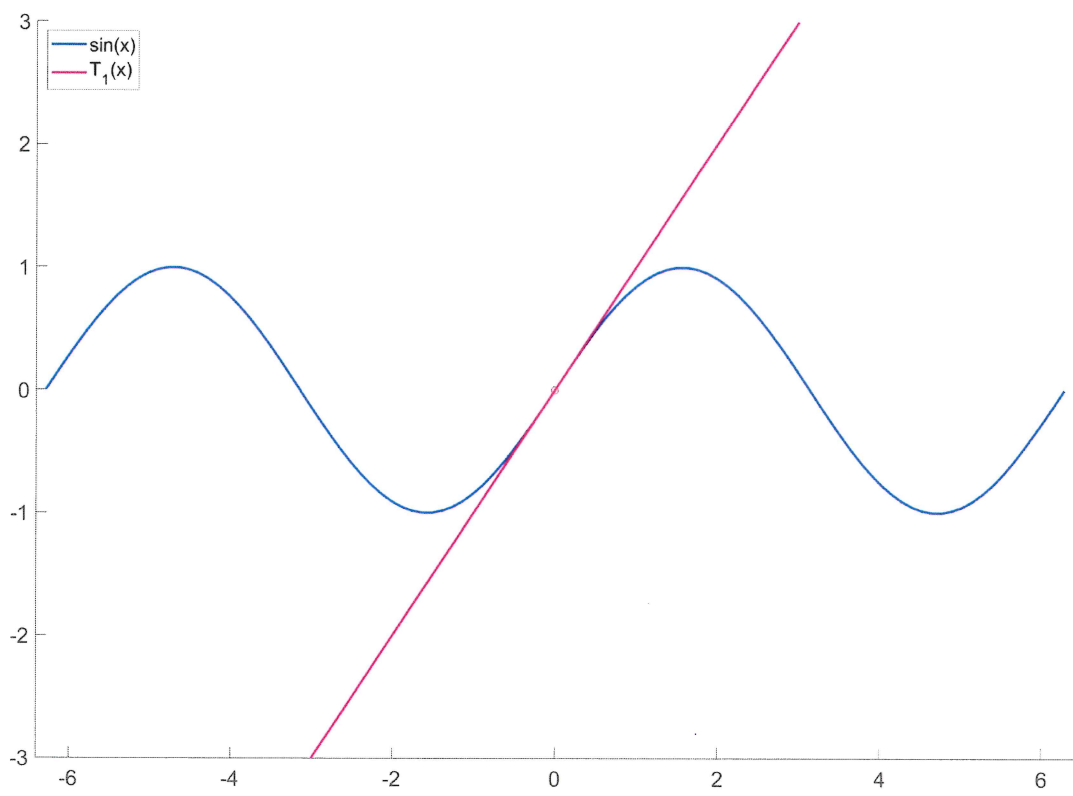
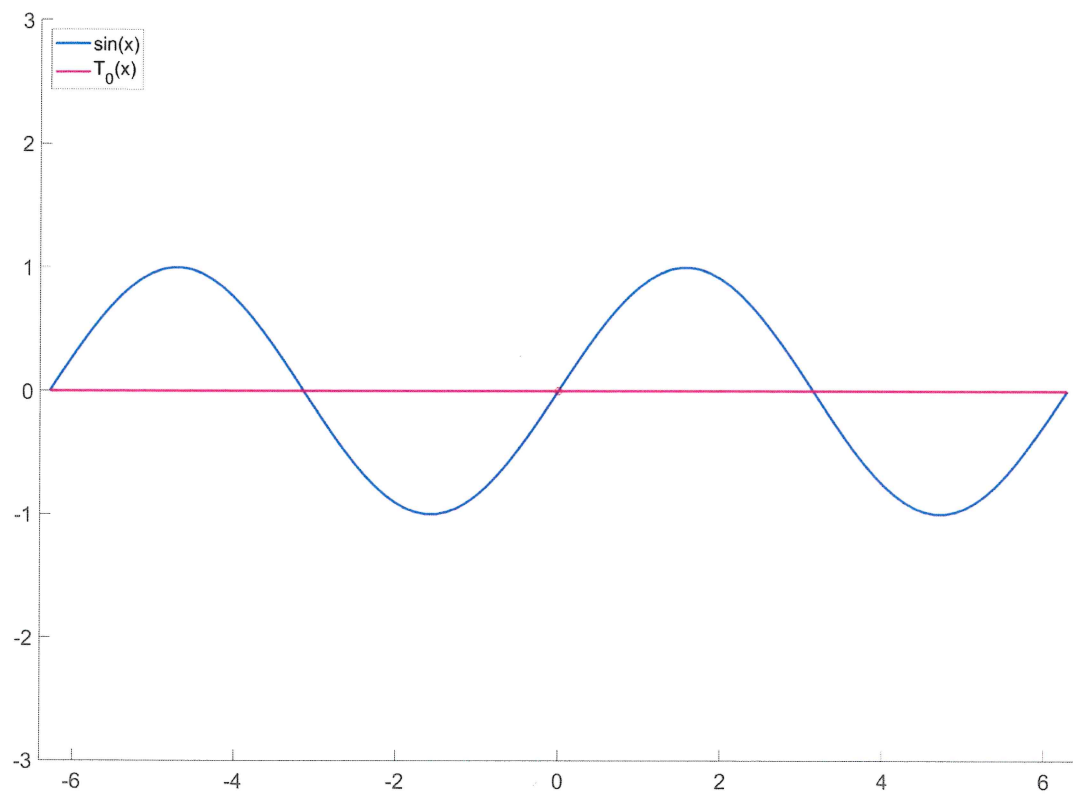
$$f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x$$

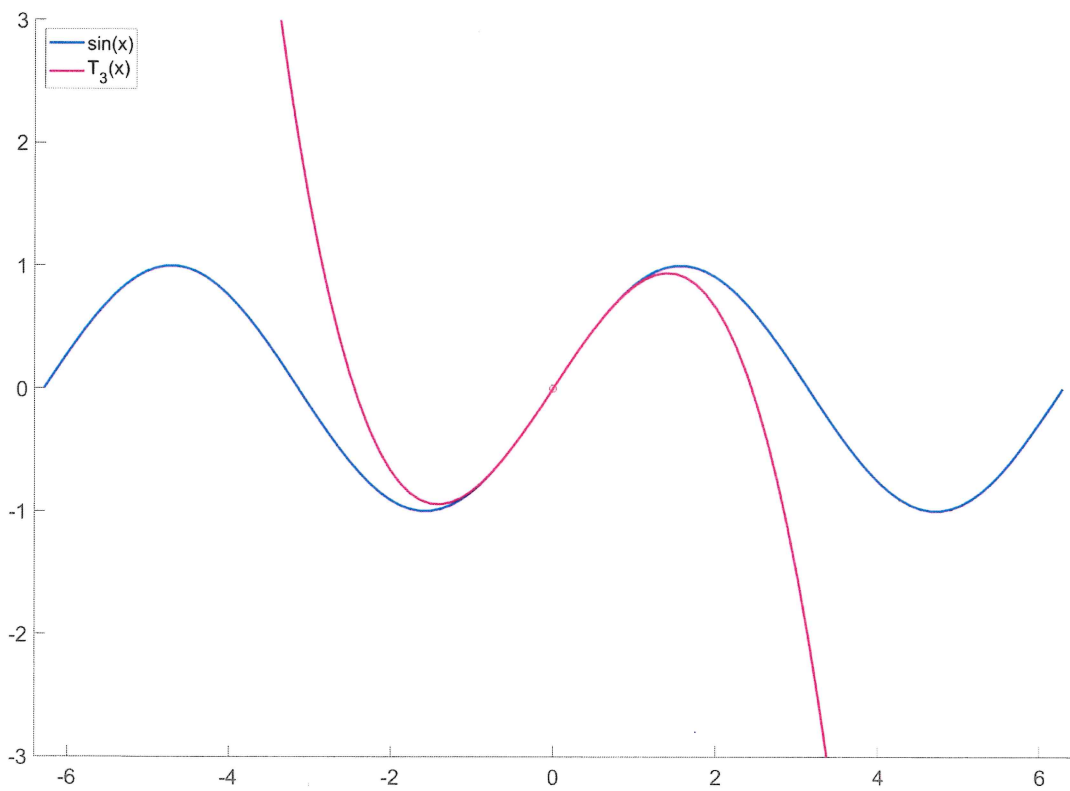
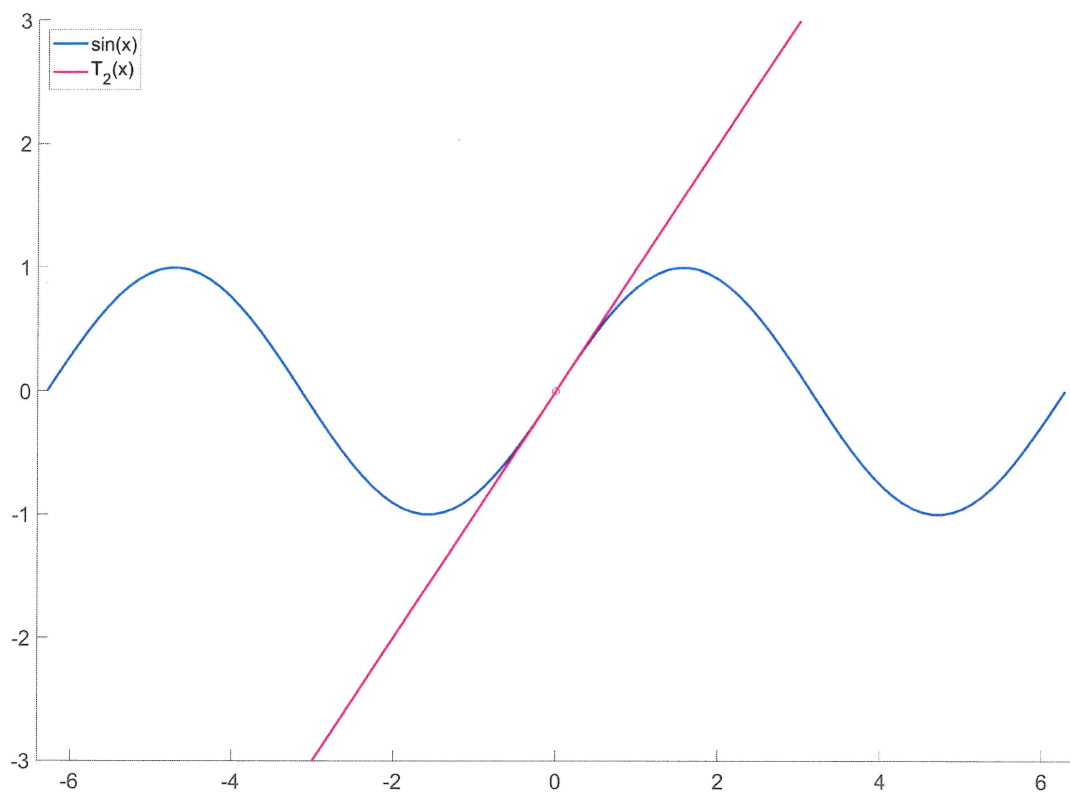
$$\underline{T_4(x)} = 1 - \frac{x^3}{6} = T_3(x)$$

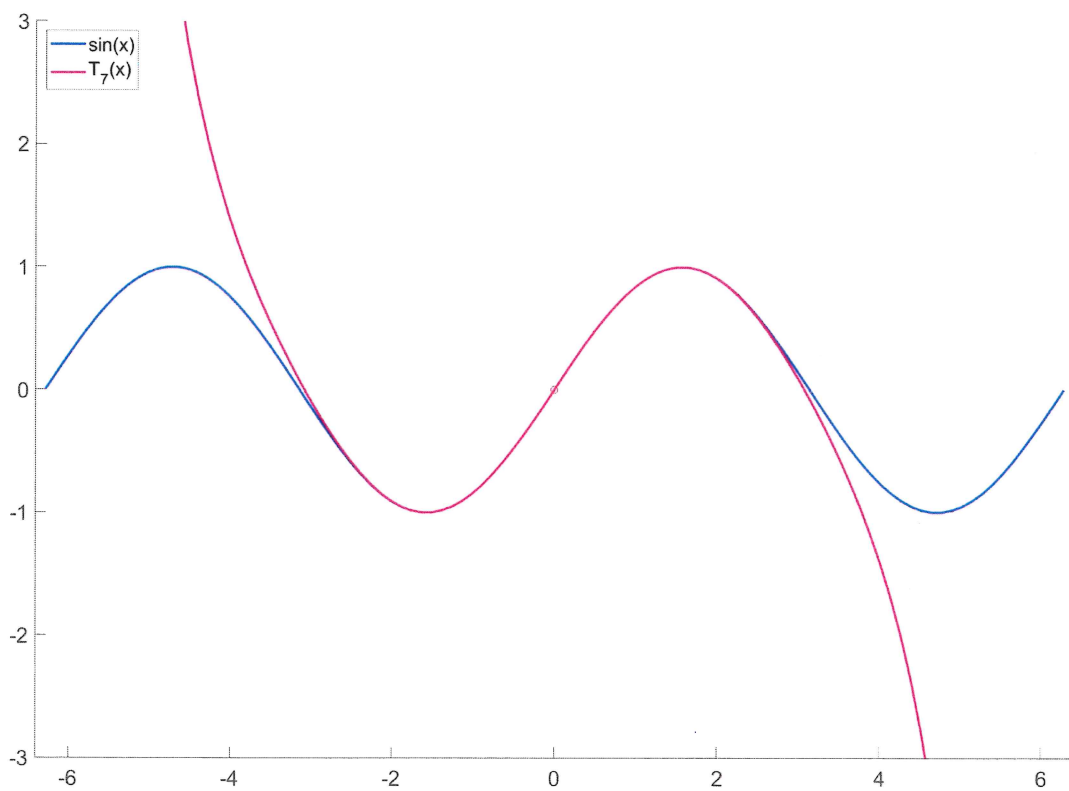
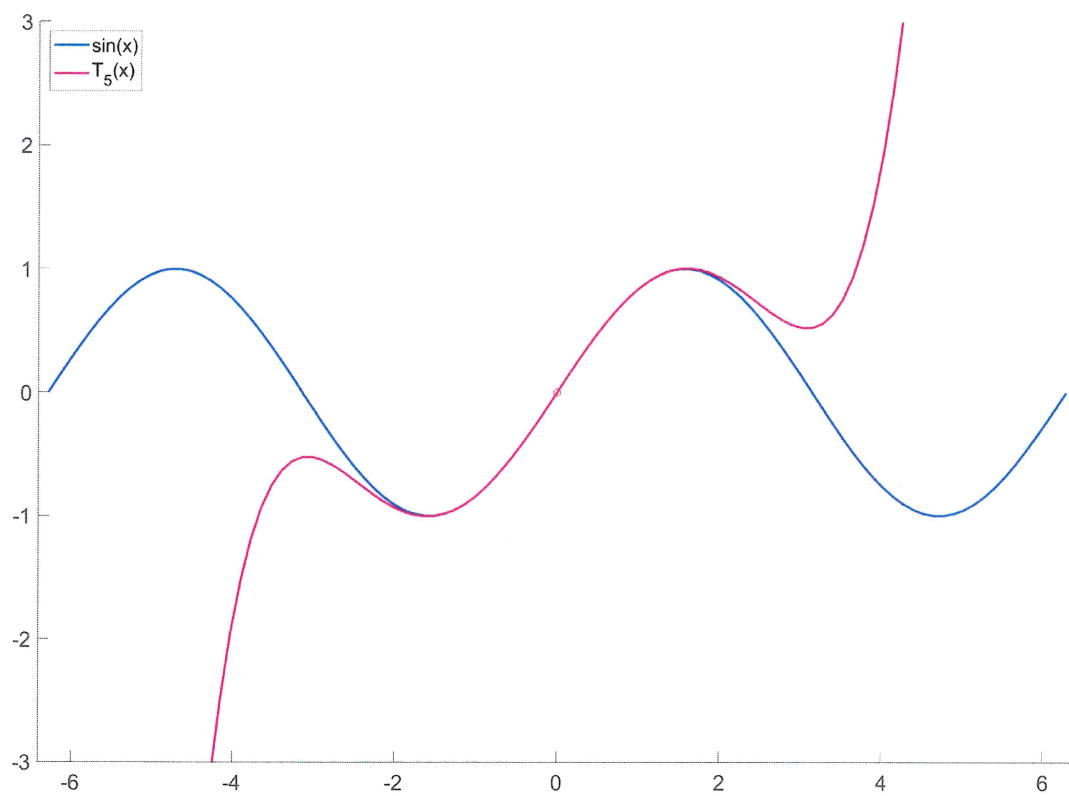
$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$$

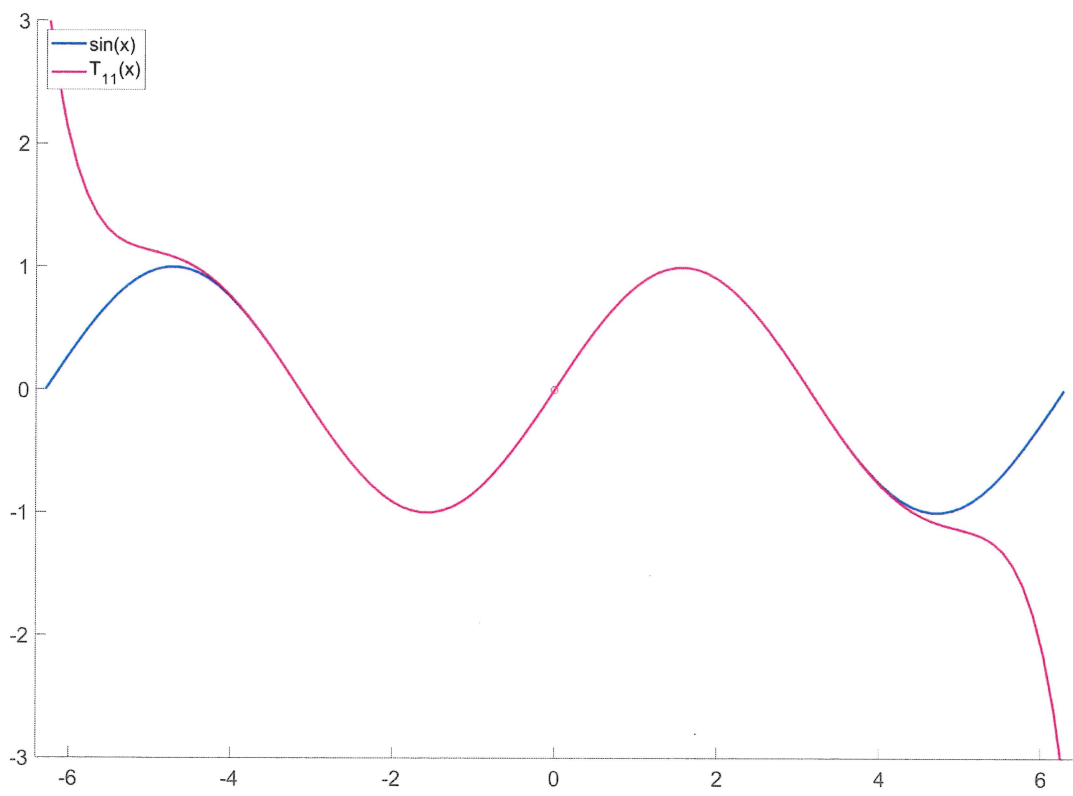
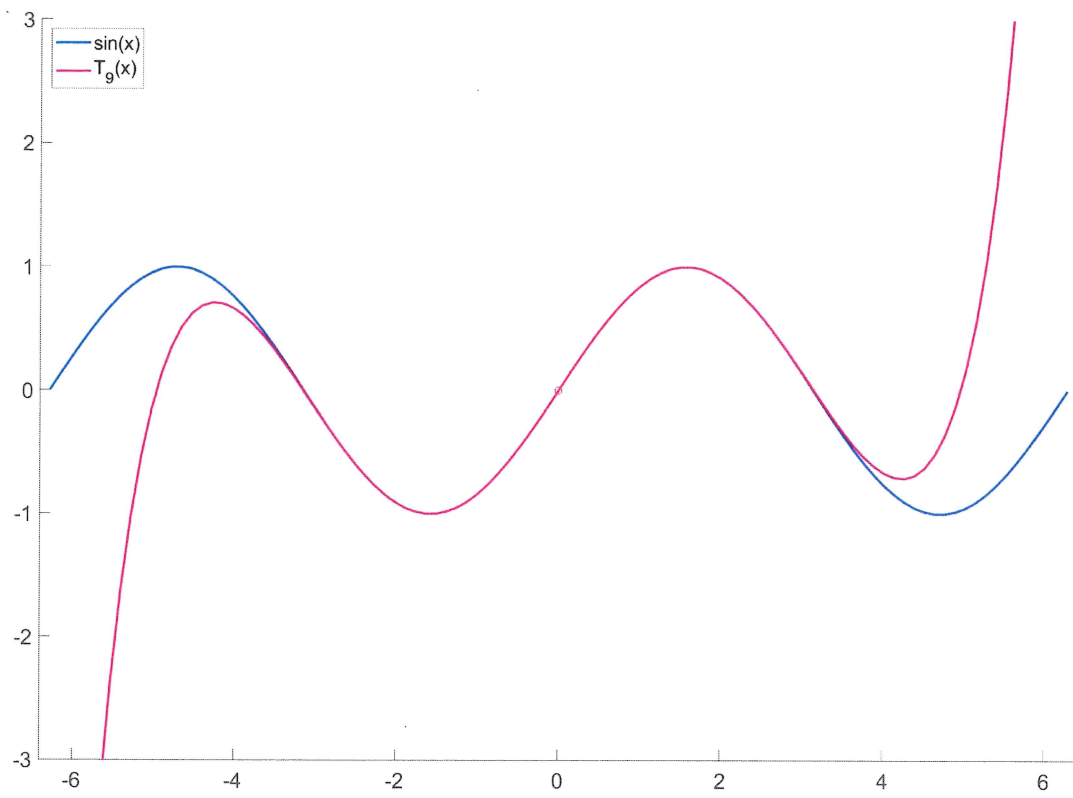
⋮

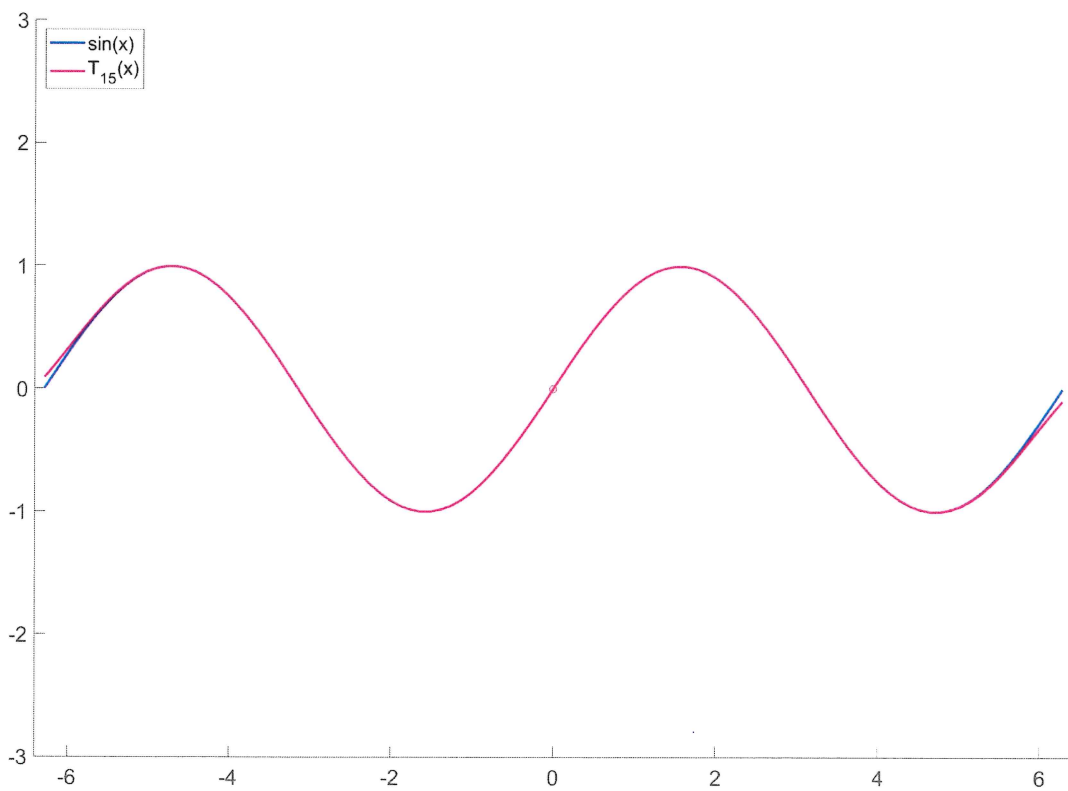
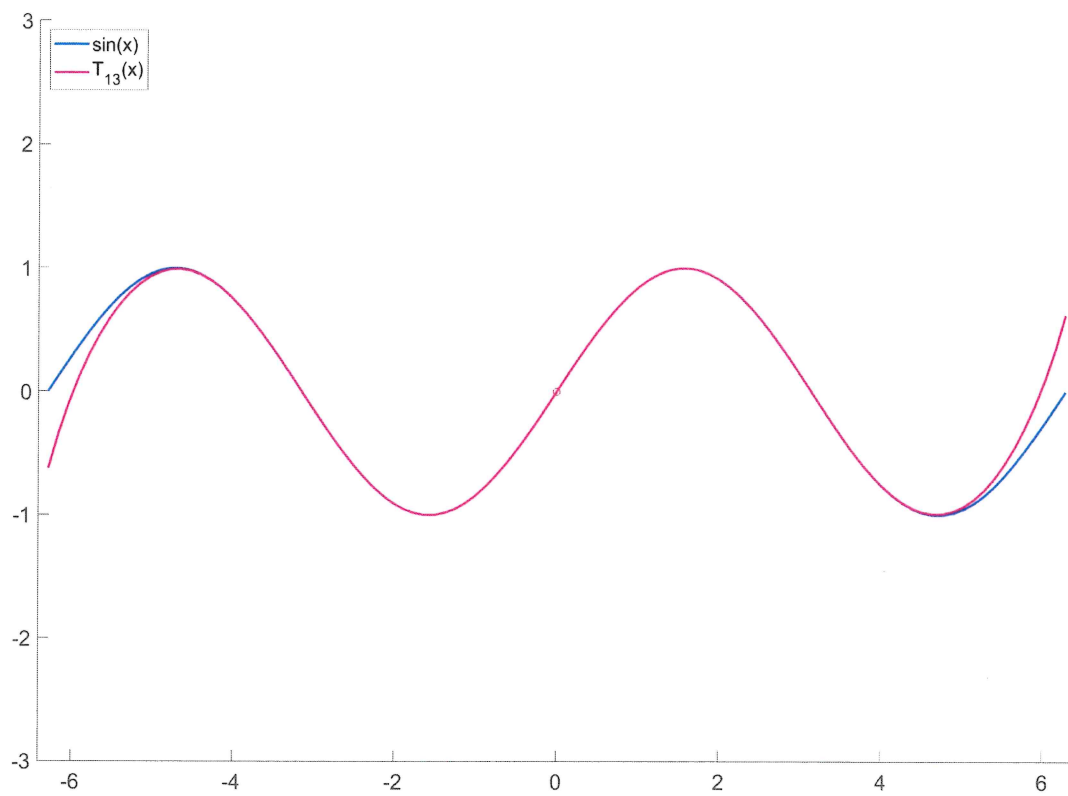
MATLAB: `taylorTool`

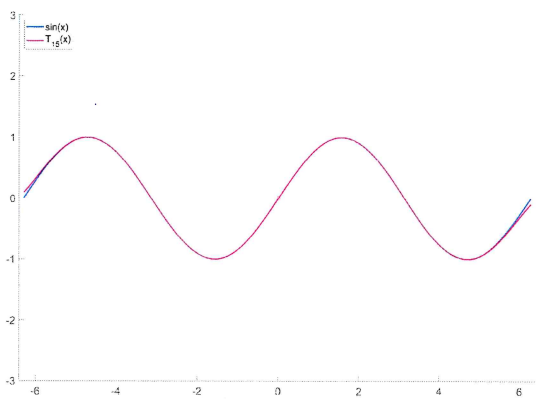
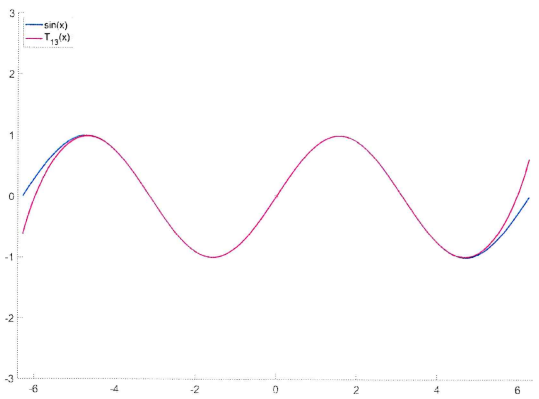
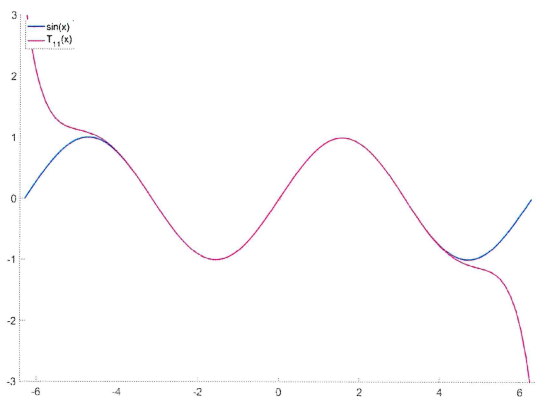
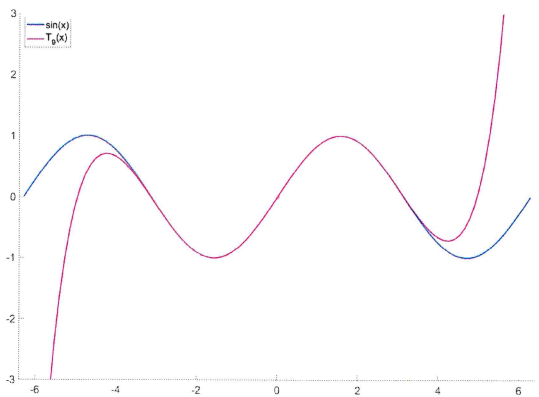
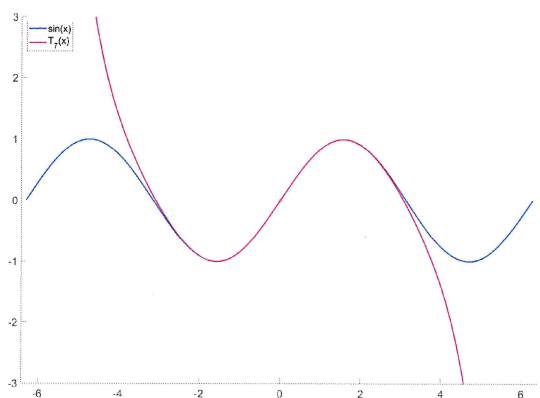
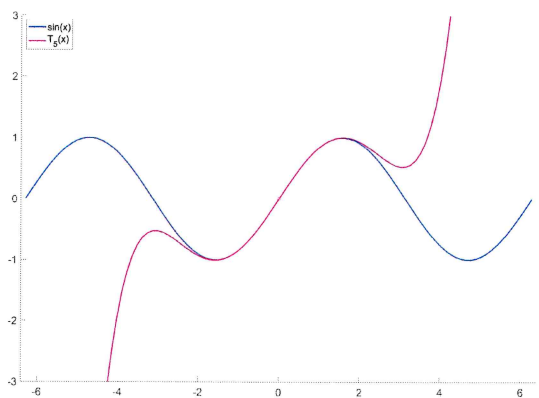
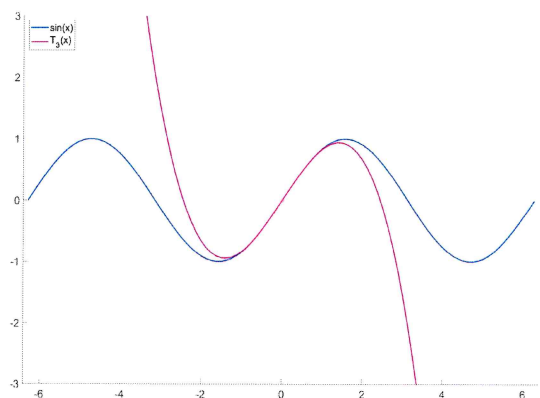
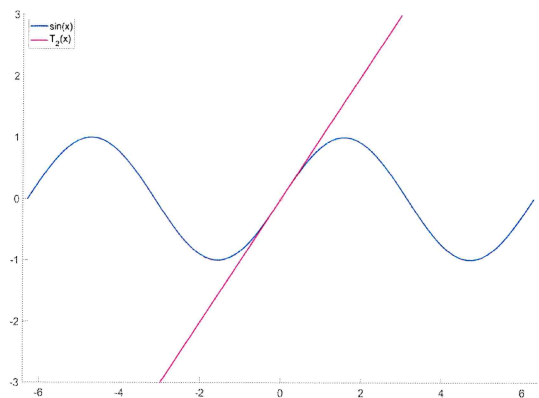
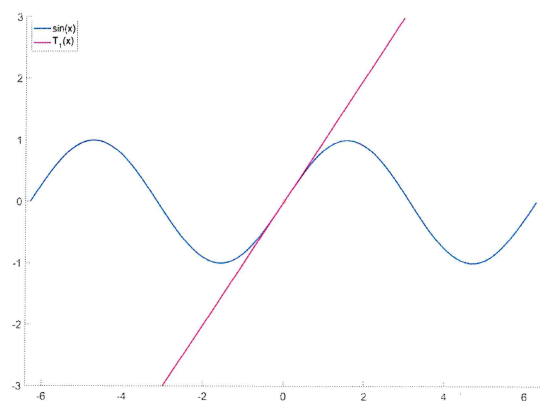
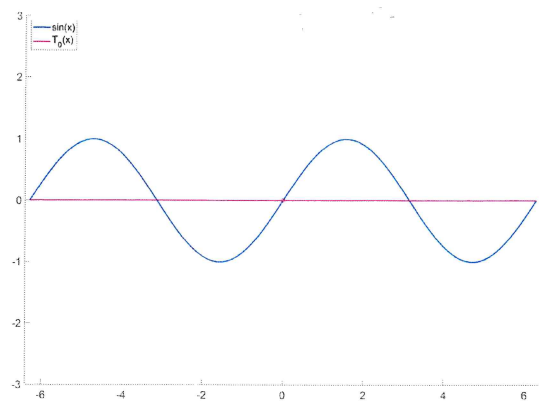


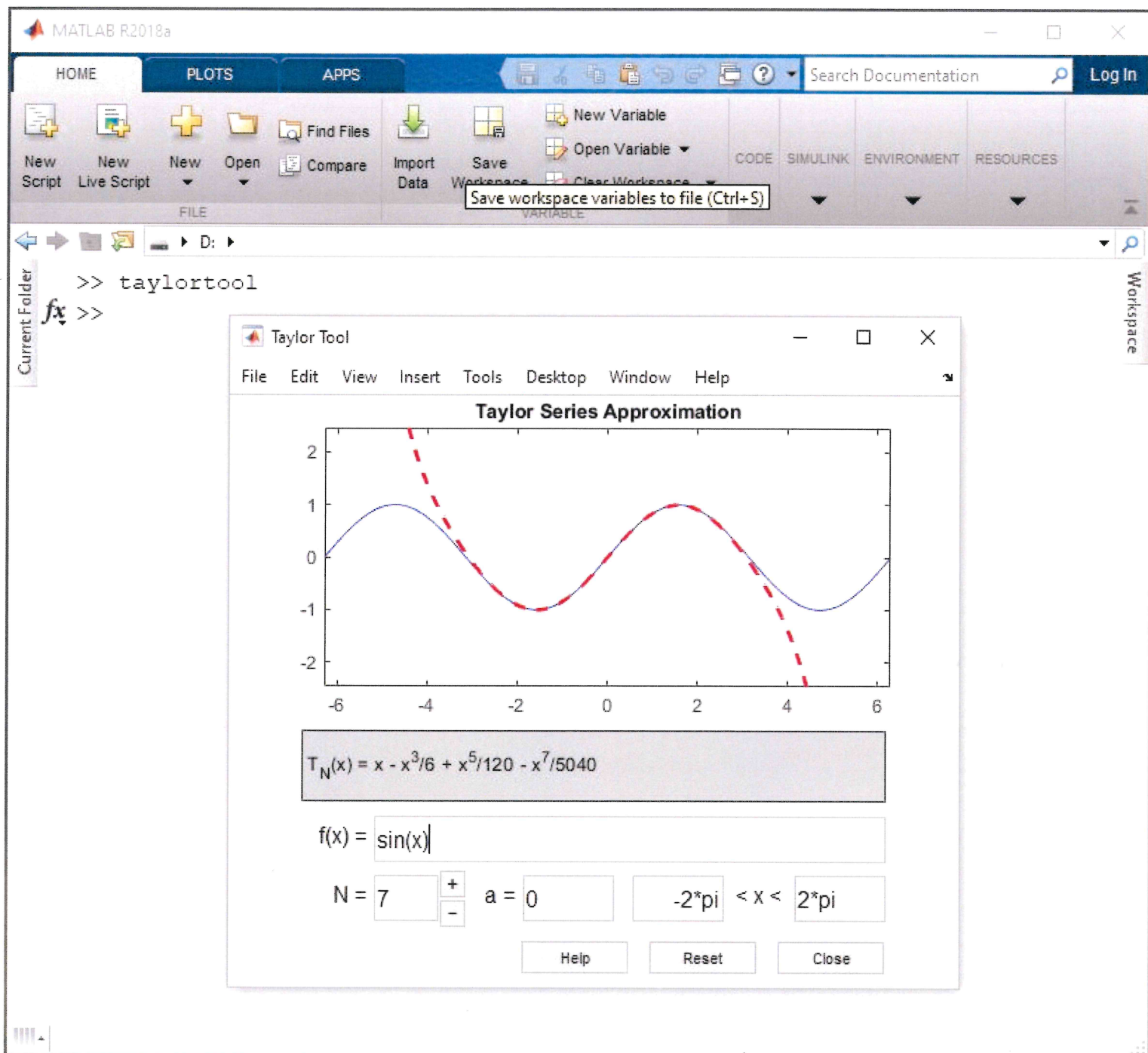










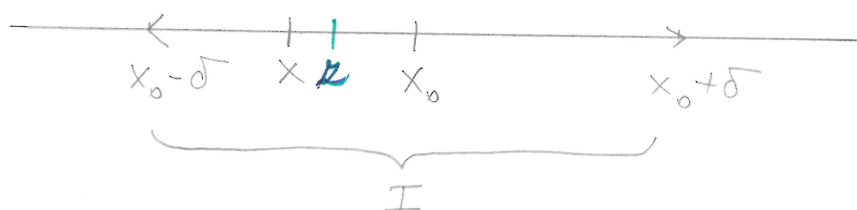


Jak je to s chybou aproximace $R_n(x)$?

Jestliže má funkce f na intervalu $I := \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ derivace až do řádu $n+1$, potom lze zbytek $R_n(x)$ vyjádřit v tv. Lagrangeově tvaru:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1},$$

kde bod ξ leží mezi x_0 a $x \in I$.



Poznámky:

- Existují i jiné tvary zbytku - Peanoův, Cauchyův (viz Google)
- Vztah pro $R_n(x)$ je odvozen na základě věty o střední hodnotě.
- Nevíme, kde přesně bod ξ leží!

Přesto se podíváme na to, jakým způsobem lze odhadnout $R_n(x)$ a co platí, pokud budeme n zvětšovat do $+\infty$.

Taylorova řada funkce f v bodě x_0 je definována vztahem:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$$

(nekonečná řada)

Poznámky:

- Pro dané $x \in \mathbb{R}$ se jedná o součet nekonečné množiny čísel, který nemusí existovat
(tj. příslušná číselná řada nemusí konvergovat)

např. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \dots$ konverguje, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \dots$ diverguje

- viz příklad z minulosti)

- $T_n(x)$ má význam n -tého částečného součtu řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots, (s_n) \text{ posloupnost částečných součtů}$$

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S \dots \text{konvergenční řada}$$

↳ součet řady

- $T_n(x)$ závisí na hodnotě $x \in \mathbb{R}$

⇒ pro nějaká x může řada mít součet,
ale pro jiná x nikoli!

Množina $x \in \mathbb{R}$, pro která příslušná číselná řada konverguje, se nazývá obor konvergence a značí se K .

- Goučtova funkce Taylorovy řady je definována vztahem:

$$T(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in K$$

Průklad:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

1) Napište $T_n(x)$.

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad (x_0=0)$$

$$f'(x) = [(1-x)^{-1}]' = -1 \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1$$

$$f''(x) = -2 \frac{1}{(1-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''(x_0) = \frac{2}{(1-0)^3} = 2$$

$$f'''(x) = 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1-x)^4} \cdot (-1) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$$

$$f'''(x_0) = \frac{2 \cdot 3}{(1-0)^4} = 2 \cdot 3 = 6 = 3!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-x)^5} \dots \text{ověřte si}$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-0)^5} = 4!$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(1-x)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = n!$$

$$\underline{T_n(x) = 1 + 1 \cdot (x-0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-0)^2 + \frac{1}{3!} (3!) (x-0)^3 + \frac{1}{4!} (4!) (x-0)^4 + \dots + \frac{1}{n!} (n!) (x-0)^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n}$$

Teď:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

(Taylorův polynom n -tého řádu
funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ v bodě $x_0 = 0$)

Pro konkrétní volbu x získáme hodnotu $T_n(x)$, tj. např.

$$x = \frac{1}{2} \dots T_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$x = 2 \dots T_n(2) = \sum_{k=0}^n 2^k$$

atd.

2) Určete obor konvergence K a součtovou funkci $T(x)$

$$\underline{T(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \left| \begin{array}{l} \text{číslná 'nekonečná'} \\ \text{geometrická 'řada' } \forall x \end{array} \right| =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{1-x}}}, \quad \boxed{x \in (-1; 1) = K}$$

$$q = x, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \text{ pro } |q| < 1$$

Shrnutí:

Vstup: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Výstup: $T(x) = \frac{1}{1-x}$ $x \in (-1; 1) = K$

↑
Taylorova řada f ce f v bode x_0
(Taylorův rozvoj f ce f v bode x_0)

(Pro jiné x_0
získáme obecně
jinou Taylor. řadu)

Tedy:

$$f(x) \neq T(x) \quad x \in D(f)$$

ALE

$$\boxed{f(x) = T(x) \quad x \in K = (-1; 1)}$$

Otázky na přístě:

- Pro jaké funkce existuje $T(x)$?
- Jaký je obor konvergence K ?
- Kdy platí, že $f(x) = T(x)$?

Poznámka: Využití pro výpočet např. $\sin 2,34$ na kalkulačce

např.: $\sin 2,34 \approx T_{50}(2,34)$ (viz sk -90-)

Chyba této aproximace závisí na $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1}$$

Příklad k procvičení:

Náps Taylorovu řadu pro funkci $f(x) = \sin x$ v $x_0 = 0$.