

REKAPITULACE

Dáno: funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}$ (f chceme aproximovat)

↑
„pěkná“, tj. existují derivace všech potřebných řádů

Taylorův polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Chyba: $R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)(x - x_0)^{n+1}$, kde z leží někde mezi x a x_0 .

Taylorova řada:

$$T(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in K$$

↑
obor konvergence

Ukázali jsme si příklad:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k \longrightarrow T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1; 1) = K$$

$$f(x) \neq T(x), \quad x \in D(f) \quad \boxed{\text{ALE}} \quad \underline{f(x) = T(x), \quad x \in K!}$$

↑

Odpovězme na otázku, pro jaké funkce f toto platí

Platí: Jestliže má f stejnoměrně omezené derivace všech řádů na intervalu $I = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, $\delta > 0$, tj.

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in I : |f^{(n)}(z)| < M,$$

potom $f(x) \stackrel{!}{=} T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset K.$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} | & | & | \\ x_0 - \delta & & x_0 & & x_0 + \delta \\ \hline & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & I & \end{array} \end{array}$$

Praktický význam:

Funkci f aproximujeme konečnou řadou $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

a čím větší n vezmeme, tím bude aproximace přesnější.

Terminologie:

Říkáme, že funkce f lze v bodě x_0 rozvinout v Taylorovu řadu a $T(x)$ se nazývá Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 .

Zdůvodnění:

Zvolíme libovolné $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset K$

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = R_n(x) + T_n(x) \quad \Bigg/ \quad \lim_{n \rightarrow +\infty}$$

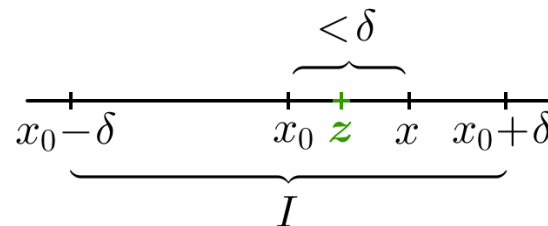
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$$

$$\begin{array}{ccccc} & \parallel & ??? & \parallel & \\ f(x) = & 0 & + & T(x) & \end{array}$$

Víme:

$$R_n(x) := \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) (x - x_0)^{n+1}$$

(kde z leží někde mezi x a x_0)



Takže:

$$|R_n(x)| := \frac{1}{(n+1)!} \cdot |f^{(n+1)}(z)| \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot M \cdot \delta^{n+1} = M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = M \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{*}{=} M \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0}$$

*

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$$

pro $|a| < 1$ zřejmě

pro $a \geq 1$

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n} = \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N} : a < n_0, \text{ tj. } \frac{a}{n_0} < 1)$$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot \textcolor{teal}{a} \cdots \textcolor{blue}{a} \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n_0 \cdot \textcolor{teal}{(n_0 + 1)} \cdots \textcolor{blue}{(n-1)} \cdot n} \leq$$

$$\leq \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a}{n} = \underbrace{\frac{a^{n_0+1}}{n_0!}}_{= \text{konst.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (\text{podle věty o sevření})$$

$$\underbrace{\text{pro } a \leq -1} \quad \left| \frac{a^n}{n!} \right| \leq \frac{|a|^n}{n!} \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty$$

tj. platí pro $a \in \mathbb{R}$

Příklad:

$$\boxed{f(x) = \sin x, x_0 = 0} \quad (\text{již minule})$$

$$1) \quad \underline{T_n(x)} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

$$f(x) = \sin x \qquad f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(x_0) = f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(x_0) = f''(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(x_0) = f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$$

$\vdots$

derivace se dále po čtveřicích opakují

$$T_3(x) = 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x - 0)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (-1) \cdot (x - 0)^3 = x - \frac{1}{6} x^3$$

$$T_4(x) = x - \frac{1}{6} x^3 \quad (= T_3(x)) \quad \text{členy se sudou mocninou} = 0$$

$$2) \quad \underline{T(x)} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in K = ???$$

$\downarrow$ Taylorovy koeficienty

$$3) \quad \underline{K = ???} \quad (\text{viz str. 114}) \quad \boxed{\forall z \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: |f^{(n)}(z)| \leq 1,}$$

$\uparrow$

bud' $\sin z$, $\cos z$, $-\sin z$ nebo $-\cos z$

$$\Rightarrow f(x) = T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \boxed{x \in \mathbb{R}} = K$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Příklad:

Pomocí Taylorovy řady funkce $\sin x$ v bodě $x_0 = 0$ aproximujte hodnotu $\sin x$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ tak, aby chyba byla nejvýše 10^{-5} , resp. 10^{-12} . (Pro $x \notin \langle -\pi, \pi \rangle$ využijeme periodicitu $\sin x$.)

Pro chybu Taylorova polynomu platí:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot |f^{(n+1)}(z)| \leq$$

$$\leq \frac{|(x - x_0)^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot 1 \leq$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5} \text{ (resp. } 10^{-12})$$

$$T_{15}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!}$$

$$T_{24}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{17}}{17!} - \frac{x^{19}}{19!} + \frac{x^{21}}{21!} - \frac{x^{23}}{23!}$$

n	$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$
0	3.141592653589793
1	4.934802200544679
2	5.167712780049969
3	4.058712126416768
4	2.550164039877345
5	1.335262768854589
6	0.599264529320792
7	0.235330630358893
8	0.082145886611128
9	0.025806891390014
10	0.007370430945714
11	0.001929574309404
12	0.000466302805768
13	0.000104638104925
14	0.000021915353448
15	0.000004303069587 < 10^{-5}
16	0.000000795205400
17	0.000000138789525
18	0.000000022948429
19	0.000000003604731
20	0.000000000539266
21	0.000000000077007
22	0.000000000010518
23	0.000000000001377
24	0.000000000000173 < 10^{-12}

Příklad a)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$$

Varianta A

Brutální síla - jako dříve, výpočet derivací, ...

Varianta B

(Chytře) Víme:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\bar{x})^k = \frac{1}{1 - \bar{x}}, \quad \bar{x} \in (-1; 1), \quad \bar{x}_0 = 0$$

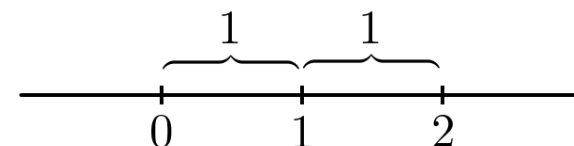
$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1 - (-x + 1)} = \left| \begin{array}{l} \bar{x} = -x + 1 = 1 - x \\ x_0 = 1 \Rightarrow \bar{x}_0 = 0 \\ |\bar{x}| < 1, \text{ tj. } |x - 1| < 1 \end{array} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - x)^k =$$

chceme použít něco, co známe

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} ((-1) \cdot (x - 1))^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \underset{\uparrow}{(-1)^k} \cdot \frac{(x - 1)^k}{}$$

Taylorovy koeficienty a_k

$$|x - 1| < 1, \text{ tj. } x \in (0, 2) = K$$



Závěr:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x - 1)^k, \quad x \in (0, 2), \quad x_0 = 1$$

Příklad b)

$$f(x) = \frac{3}{1-2x}, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = 3 \cdot \frac{1}{1-2x} = \left| \begin{array}{l} \textcircled{x} = 2x \\ x_0 = 0 \Rightarrow \textcircled{x}_0 = 0 \\ |\textcircled{x}| < 1, |2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \end{array} \right| = 3 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (2x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{3 \cdot 2^k}_{a_k} \cdot x^k$$

Závěr:

$$f(x) = \frac{3}{1-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} 3 \cdot 2^k \cdot x^k, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad x_0 = 0$$

Příklad c)

$$f(x) = \frac{1}{2-x}, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} x^k \quad \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$$

Závěr:

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} x^k, \quad x \in (-2, 2), \quad x_0 = 0$$

Platí: Jestliže $f(x) = T(x)$, $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$,

$$\text{potom } f'(x) = T'(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Tj. Taylorovu řadu lze derivovat člen po členu

„derivace nekonečného součtu je nekonečný součet derivací“

Schematicky

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\quad) \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} (\quad)'$$

Příklad d)

$$f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0$$

Varianta A

Brutální síla - výpočet derivací, ...

Varianta B

(Chytře) Víme: $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1) x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad x \in \mathbb{R}$$

rozeepsáno pro kontrolu:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 - \frac{1}{11!} x^{11} + \dots \\ \frac{d}{dx} \curvearrowright \cos x &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 - \frac{1}{10!} x^{10} + \dots \end{aligned}$$

$\curvearrowright \int dx$

Poznámka: Funguje i pro integraci!

Příklad

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k, \quad x \in (-1, 1)}$$

$$g(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = f(x)$$

$$g(x) = \int_0^x f(u) \, du = [g(u)]_0^x = g(x) - g(0) = g(x)$$

$$\begin{aligned} \underline{g(x)} &= \int_0^x \frac{1}{1+u} \, du = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u^k \right) \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k u^k \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Základní Maclaurinovy řady (Taylorovy řady pro $x_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots & x \in (-1, 1) \\
 (1+x)^p &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p}{n} x^n &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots & x \in (-1, 1), \quad p \in \mathbb{R} \\
 e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots & x \in \mathbb{R} \\
 \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots & x \in (-1, 1) \\
 \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots & x \in \mathbb{R} \\
 \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots & x \in \mathbb{R} \\
 \arcsin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots & x \in \langle -1, 1 \rangle \\
 \operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots & x \in \langle -1, 1 \rangle \\
 \sinh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots & x \in \mathbb{R} \\
 \cosh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots & x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$