REKAPITULACE

Dáno: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}$ ($\to$ chceme ji aproximovat)

"pěkná", tj. existují derivace všech potřebných řádů

Taylorův polynom: $$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Chyba: $$R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1},$$ kde

ξ leží někde mezi x a x_0.

Taylorova řada: $$T(x) := \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad x \in K$$

obor konvergence

Ukázali jsme si příklad:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

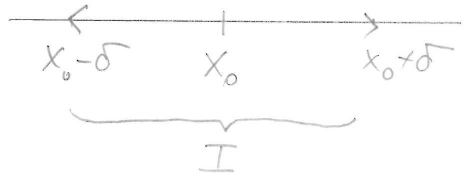
$$T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1;1) = K$$

$f(x) \neq T(x)$, $x \in D(f)$ $\boxed{\text{ALE}}$ $f(x) = T(x)$, $x \in K$!

Odpovězme na otázku, pro jaké funkce f toto platí

<u>Platí</u>: Jestliže f má stejnoměrně omezené derivace všech řádů na intervalu $I = \langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$, $\delta>0$; tj.

$$\exists M>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall z\in I: |f^{(n)}(z)|<M;$$



potom $$f(x) \overset{!}{=} T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset K.$$

<u>Praktický význam</u>:
$f(x)$ aproximujeme konečnou řadou $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
čím větší n vezmeme, tím bude aproximace přesnější.

<u>Terminologie</u>: Říkáme, že f lze v bodě x_0 rozvinout v Taylorovu řadu a $T(x)$ se nazývá Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0.

<u>Zdůvodnění</u>: Zvolíme lib. $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset K$

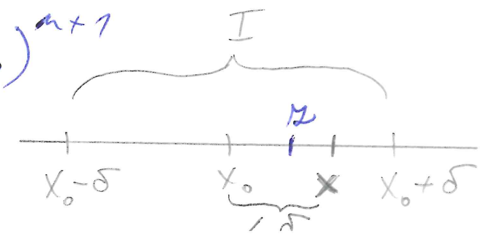
$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \Rightarrow f(x) = R_n(x) + T_n(x) \quad / \lim_{n\to+\infty}$$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} R_n(x) + \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$$

$$f(x) = \underset{0}{\overset{???}{\shortparallel}} \qquad \overset{\shortparallel}{T(x)}$$

<u>Víme</u>: $$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)(x-x_0)^{n+1}$$

(kde z leží mezi x_0 a x)



Takže:

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \cdot |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot M \cdot \delta^{n+1} = M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = M \lim_{n\to+\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$= M \cdot 0 = 0$, protože „$\delta^n \ll n!$, př. $10^n \ll n!$"

(viz 1. semestr)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0}$$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$:

(pro $|a|<1$ ... zřejmé)

pro $a \geq 1$

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} =$$

$\left(\exists n_0 \in \mathbb{N} : a < n_0, \text{ tj. } \frac{a}{n_0} < 1\right)$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n_0} \cdot \underbrace{\frac{a}{(n_0+1)}}_{<1} \cdot \underbrace{\ldots}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{a}{(n-1)}}_{<1} \cdot \frac{a}{n} \leq$$

$$\leq \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a}{n} =$$

$$= \underbrace{\frac{a^{n_0+1}}{n_0!}}_{=\text{konst}} \cdot \frac{1}{n} \to 0$$

$\frac{1}{n} \to 0$

(platí podle věty o sevření)

pro $a<0$:

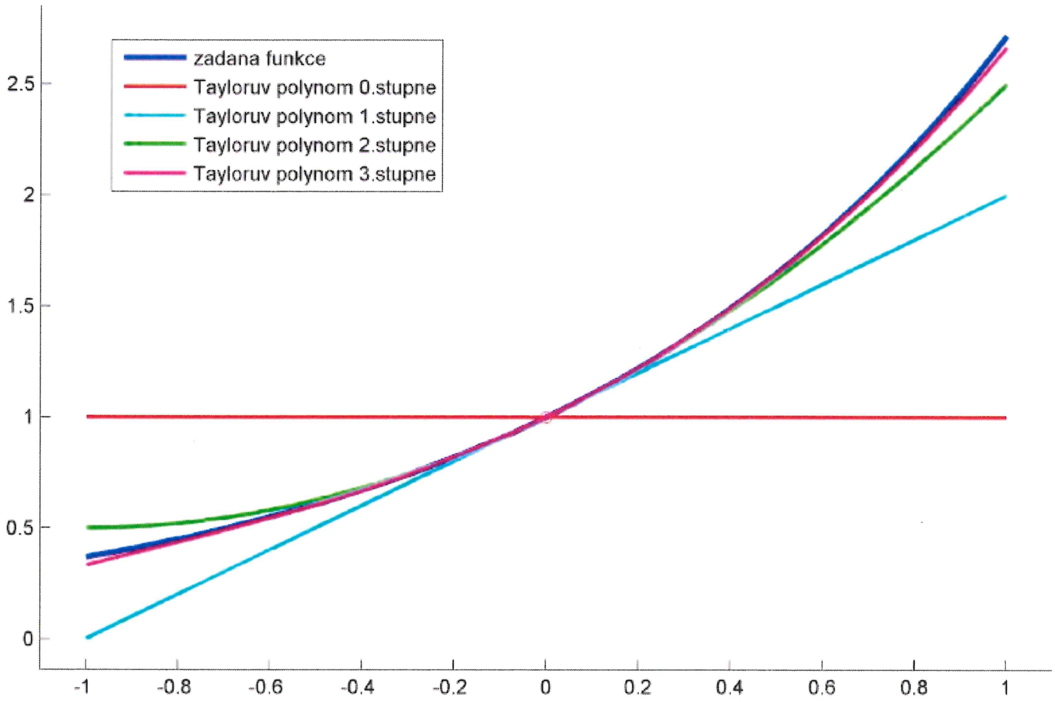
$\left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \frac{|a|^n}{n!} \to 0$ pro $n \to +\infty$, tj. platí pro $a \in \mathbb{R}$

Příklad Stanovte odhad chyby aproximace Taylorovým polynomem 10. stupně funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě $x_0 = 0$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

$$f^{(j)}(x) = \mathrm{e}^x,\ j = 0, 1, \dots; \quad f^{(j)}(0) = 1,\ j = 0, 1, \dots$$

$$\boxed{T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}}$$

$$e(x) = \mathrm{e}^x - T^{10}(x) = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{11!}x^{11} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|e(x)| \leq \frac{\mathrm{e}}{11!} \leq 7.10^{-8}}$$



Příklad: $\boxed{f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0}$ (již minule)

1) $T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

$f(x) = \sin x \qquad f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(x_0) = f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(x_0) = f''(0) = -\sin 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(x_0) = f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x = f^{(0)}(x) \qquad f^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0 = f(0)$

$\vdots$ derivace se dále po čtveřicích opakují

$T_3(x) = 0 + 1\cdot(x-0) + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(x-0)^2 + \frac{1}{3\cdot2\cdot1}\cdot(-1)\cdot(x-0)^3$

$= x - \frac{1}{6}x^3$

$T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3 \; (= T_3(x))$ (členy se sudou mocninou $= 0$)

2) $T(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \dots =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}_{\text{Taylorovy koeficienty}} x^{2k+1}, \quad x \in K = ???$$

3) $K = ??$ (viz str. -96-) $\boxed{\forall z \in R}\,\forall n \in N: |f^{(n)}(z)| \leq 1$

buď $\sin z, \cos z, -\sin z$ nebo $-\cos z$

$$\Rightarrow f(x) = T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \boxed{x \in R} = K$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in R}$$

Příklad Určete stupeň Taylorova polynomu funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$ tak, aby jeho chyba na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ byla nejvýše 10^{-5}, resp. (10^{-12}).

Pro chybu platí

$$\boxed{e(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}.$$

Zajímá nás chyba na intervalu délky $2\pi \quad \Rightarrow \quad$ odhad pro $f^{(n+1)}(x)$ je $\underbrace{\left| f^{(n+1)}(x) \right|}_{(*)} \leq 1 \quad \forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$(*)$ buď $\pm \sin x$ nebo $\pm \cos x$ - tento odhad je vždy nejmenší možný

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq 10^{-5} \quad \forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5} \quad (\text{resp. } 10^{-12})$$

n	$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$
0	3.141592653589793
1	4.934802200544679
2	5.167712780049969
3	4.058712126416768
4	2.550164039877345
5	1.335262768854589
6	0.599264529320792
7	0.235330630358893
8	0.082145886611128
9	0.025806891390014
10	0.007370430945714
11	0.001929574309404
12	0.000466302805768
13	0.000104638104925
14	0.000021915353448
15	**0.000004303069587** $< 10^{-5}$
16	0.000000795205400
17	0.000000138789525
18	0.000000022948429
19	0.000000003604731
20	0.000000000539266
21	0.000000000077007
22	0.000000000010518
23	0.000000000001377
24	**0.000000000000173** $< 10^{-12}$

Jak vypadá Taylorův polynom $T_n(x)$?

$$\begin{array}{llll}
f(x) & = \sin x & f(0) & = 0 \\
f'(x) & = \cos x & f'(0) & = 1 \\
f''(x) & = -\sin x & f''(0) & = 0 \\
f'''(x) & = -\cos x & f'''(0) & = -1 \\
\hline
f^{(4)}(x) & = \sin x & f^{(4)}(0) & = 0 \\
& \vdots & & \vdots
\end{array}$$

$$T_n(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\to 0} + \underbrace{f'(x_0)}_{\to 1}(x - \underbrace{x_0}_{\to 0}) + \frac{1}{2!}\underbrace{f''(x_0)}_{\to 0}(x - \underbrace{x_0}_{\to 0})^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - \underbrace{x_0}_{\to 0})^n$$

$$\boxed{T_{15}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!}}$$

Má-li kalkulačka vypočítat např. $\sin 0{,}4$ a má povolenou chybu 10^{-5}, určí $\boxed{\sin 0{,}4 \doteq T_{15}(0{,}4)}$.

Pro dodržení chyby 10^{-12} stačí určit $\boxed{\sin 0{,}4 \doteq T_{24}(0{,}4)}$, tj. přičíst další 4 členy.

<u>Poznámka:</u>

Stejný postup lze užít i pro výpočet v bodech mimo interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Stačí využít periodičnosti funkce $\sin x$.

Příklad: a) $\boxed{f(x)=\frac{1}{x}\ ,\ x_0=1}$

VARIANTA A: Brutální síla – jako dříve, výpočet derivací...

VARIANTA B: (Chytře) Víme: $\sum_{k=0}^{+\infty} \otimes^k = \frac{1}{1-\otimes}\ ,\ \otimes \in (-1,1)\ ;\ \otimes_0 = 0$

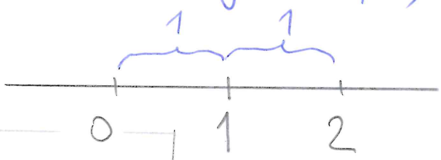
$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-(-x+1)} = \left| \begin{array}{l} \otimes = -x+1 = 1-x \\ x_0 = 1 \Rightarrow \otimes_0 = 0 \\ |\otimes| < 1,\ \text{tj } |x-1|<1 \end{array} \right| =$$

(chceme použít něco, co známe)

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \big((-1)(x-1)\big)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^k}_{a_k} \underbrace{(x-1)^k}$$

a_k – Taylorův koef.

$|x-1|<1$, tj $x \in (0,2) = K$



Závěr: $\boxed{f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x-1)^k\ ,\ x \in (0,2)\ ,\ x_0 = 1}$

b) $\boxed{f(x) = \frac{3}{1-2x}\ ,\ x_0 = 0}$

$$f(x) = 3 \cdot \frac{1}{1-2x} = \left| \begin{array}{l} \otimes = 2x \\ x_0 = 0 \Rightarrow \otimes_0 = 0 \\ |\otimes|<1,\ |2x|<1 \Leftrightarrow \underbrace{|x|<\tfrac{1}{2}}_{x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \end{array} \right| =$$

$$= 3 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (2x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{3 \cdot 2^k}_{a_k} x^k\ ,\qquad x \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Závěr: $\boxed{f(x) = \frac{3}{1-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} 3 \cdot 2^k \cdot x^k\ ,\ x \in \left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\ ,\ x_0 = 0}$

c) $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{2-x}\ ,\ x_0=0}$

$$\left|\frac{x}{2}\right|<1$$

$$f(x)=\frac{1}{2\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}x^k,\quad x\in(-2,2)$$

Platí: jestliže $f(x)=T(x)$, $x\in\langle x_0-\delta,x_0+\delta\rangle$, potom

$$f'(x)=T'(x)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k\right)'=\sum_{\boxed{k=1}}^{+\infty}k\cdot a_k\cdot(x-x_0)^{k-1}$$

pro $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

tj. Taylorovu řadu lze derivovat člen po členu

„derivace nekonečného součtu je nekonečný součet derivací"

Schematicky: $\boxed{\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(\quad)\right)'=\sum_{\boxed{k=1}}^{+\infty}(\quad)'}$

Příklad: $\boxed{f(x)=\cos x\ ,\ x_0=0}$

$\boxed{\text{VARIANTA A}}$: Brutální síla: spočítat derivace, ...

$\boxed{\text{VARIANTA B}}$: Chytře – Víme: $\sin x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\ x\in\mathbb{R}$

$$\cos x=(\sin x)'=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)x^{2k}=\sum_{\boxed{k=0}}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\quad \underline{x\in\mathbb{R}}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{aligned}\sin x&=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\dots\\ \cos x&=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\dots\end{aligned}\right\}\text{ rozepsáno pro kontrolu}$$

Poznámka: Funguje i pro integraci!

Příklad:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$ $\qquad |\otimes| < 1$, tj. $|-x| < 1$, $|x| < 1$

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k, \quad x \in (-1,1)$$

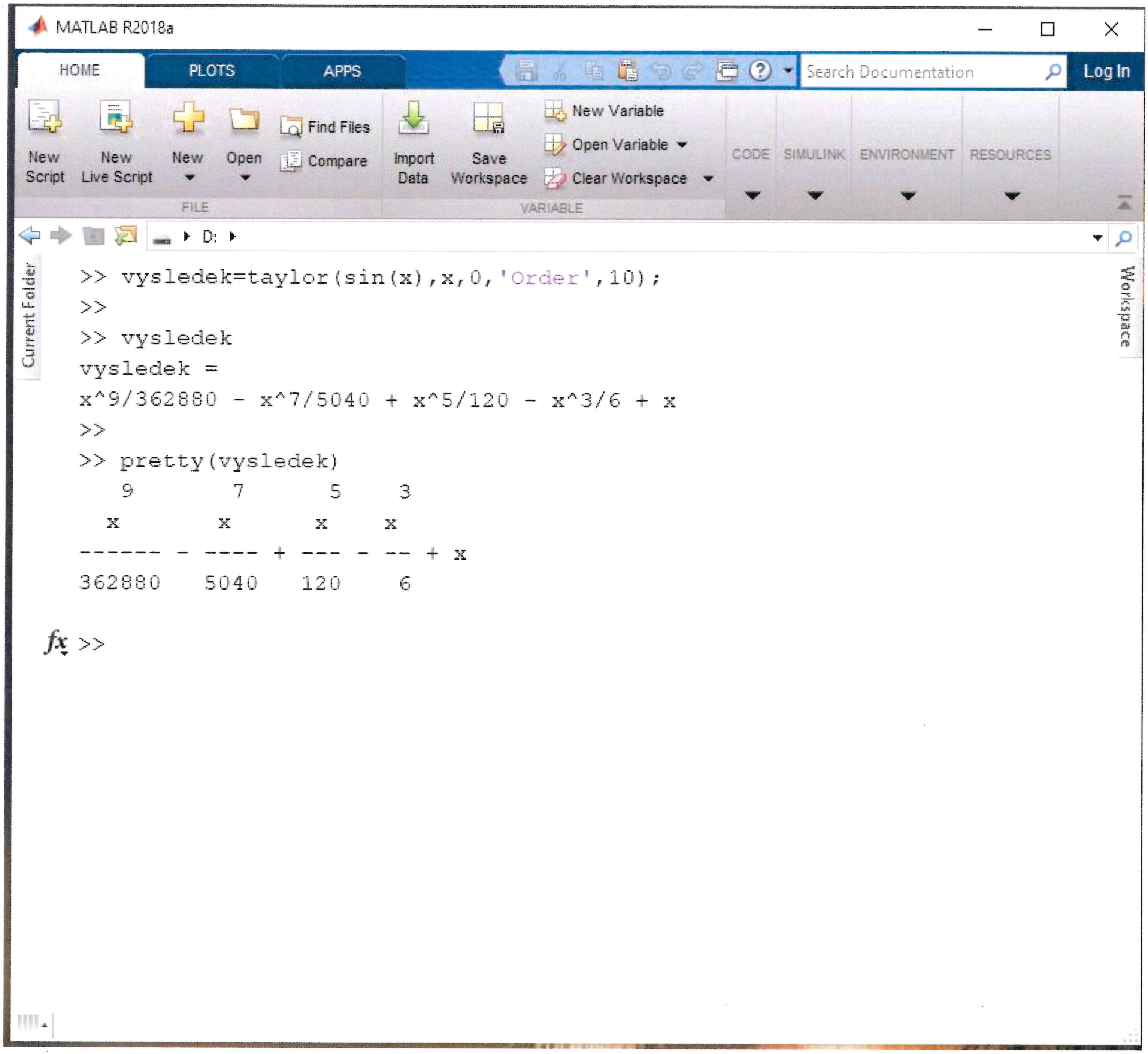
b) $g(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = f(x)$$

$$\left(g(x) = \int_0^x f(u)\,du = [g(u)]_0^x = g(x) - \underset{0}{g(0)} = g(x) \right)$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+u}\,du = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u^k\right) du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k u^k\,du =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-1,1)$$


MATLAB R2018a
HOME
PLOTS
APPS
Search Documentation
Log In
New Script
New Live Script
New
Open
Find Files
Compare
FILE
Import Data
Save Workspace
New Variable
Open Variable
Clear Workspace
VARIABLE
CODE
SIMULINK
ENVIRONMENT
RESOURCES
D:
Current Folder
Workspace
>> vysledek=taylor(sin(x),x,0,'Order',10);
>>
>> vysledek
vysledek =
x^9/362880 - x^7/5040 + x^5/120 - x^3/6 + x
>>
>> pretty(vysledek)
9 7 5 3
x x x x
------ - ---- + --- - -- + x
362880 5040 120 6
fx >>

Základní Maclaurinovy rozvoje

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \qquad x \in (-1,1),$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots, \qquad x \in (-1,1), \quad p \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \qquad x \in (-1,1\rangle,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots, \qquad x \in \langle -1,1\rangle,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \qquad x \in \langle -1,1\rangle,$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{argsinh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(2n-1)!!]^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \dots, \qquad x \in \langle -1,1\rangle,$$

$$\operatorname{argtgh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots, \qquad x \in (-1,1).$$