

REKAPITULACE

Taylorovy řady - aproximace funkce f pomocí polynomů

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{Taylorův polynom}$$

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{Taylorova řada}$$

$$f(x) = T(x), \quad x \in K \quad \dots \text{ obor konvergence}$$

Fourierovy řady - aproximace funkce f součtem goniometrických funkcí ($f \dots$ periodická funkce)

Dáno: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodická funkce se základní periodou $T > 0$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$ (úhlová frekvence)

Fourierův (trigonometrický) polynom funkce f řádu n je definován vztahem

$$\mathcal{F}_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \quad \text{kde}$$

Fourierovy koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ jsou dány vzorci:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad k = \underline{0}, 1, 2, \dots \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin(k\omega x) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

kde α volíme tak, aby integrace byla co nejjednodušší.

Fourierova (trigonometrická) řada funkce f je pro dané $x \in \mathbb{R}$ definována vztahem

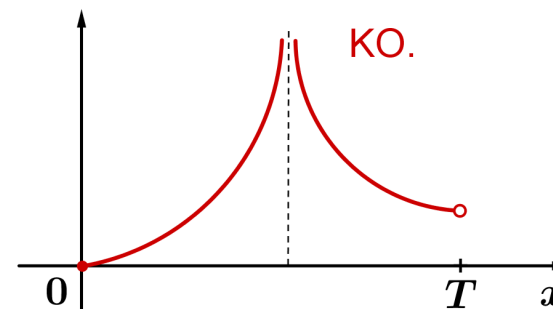
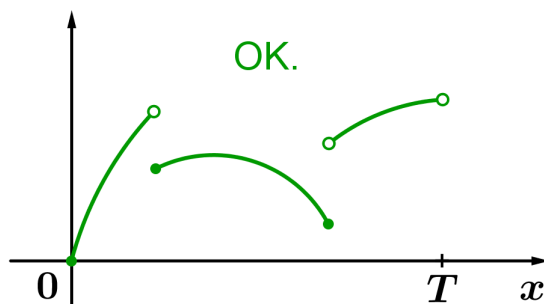
$$\mathcal{F}_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x) =: \mathcal{F}(x)$$

↓

součtová funkce Fourierovy řady

Platí: Jestliže

- (i) f je periodická s periodou $T > 0$
- (ii) f i f' mají v základním intervalu periody nejvýše konečný počet bodů nespojitosti nejvýše 1. druhu (skok),



potom

$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{u \rightarrow x_-} f(u) + \lim_{u \rightarrow x_+} f(u) \right]. \quad (*) \quad (\text{takto se prakticky spočítá})$$

Poznámky:

- Ať f je spojitá v bodě x , tj. platí, že $f(x) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = \lim_{u \rightarrow x_-} f(u) = \lim_{u \rightarrow x_+} f(u)$.

$$\text{Potom } \underline{\mathcal{F}(x)} = \frac{1}{2} [f(x) + f(x)] = \frac{1}{2} \cdot 2f(x) = \underline{f(x)} !$$

- Graf součtové funkce Fourierovy řady $\mathcal{F}$ lze kreslit bez znalosti hodnot Fourierových koeficientů a_k, b_k .

Vše díky vztahu (*)

Definice: Systém funkcí $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ je ortogonální na intervalu (a, b) , pokud jsou funkce f_n na sebe kolmé, tj.

$$\int_a^b f_m(x) \cdot f_n(x) dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$$

Definice: Posloupnost $\{1, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \dots\}$ se nazývá trigonometrický systém funkcí.
($\omega \dots$ frekvence)

Věta: Trigonometrický systém je ortogonální na libovolném intervalu délky $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Speciálně: $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ ortogonální na intervalu délky $T = 2\pi$, tj. např. $(-\pi, \pi)$.

$$n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$n = m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$$

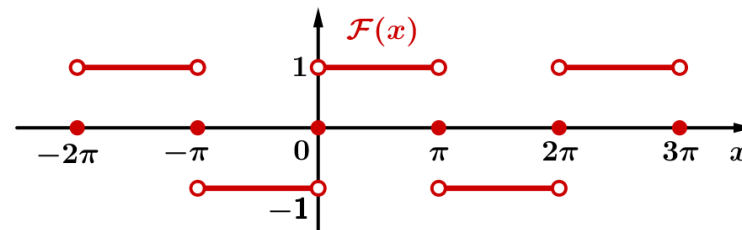
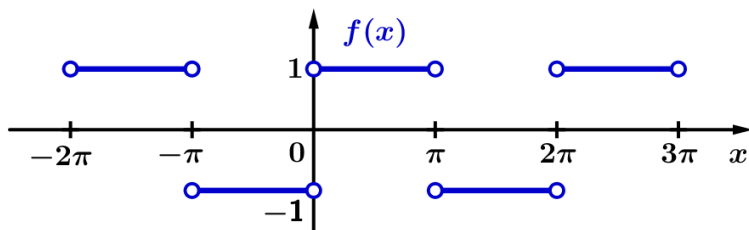
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

Příklad

$$T = 2\pi \quad \text{a} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$



$$\mathcal{F}(0) := \frac{1}{2} \left[\lim_{u \rightarrow 0_-} f(u) + \lim_{u \rightarrow 0_+} f(u) \right] = \frac{1}{2} [(-1) + 1] = 0$$

... podobně v ostatních bodech nespojitosti

Vypočteme Fourierovy koeficienty:

$$\underline{k=0} \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \underbrace{\cos(0 \omega x)}_{=1} dx = \left| \begin{array}{l} T = 2\pi, \quad \omega = 1 \\ \alpha = -\pi \Rightarrow \alpha + T = -\pi + 2\pi = \pi \end{array} \right| = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Varianta A - „Brutální síla“

$$\underline{a_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left([-x]_{-\pi}^0 + [x]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (0 - \pi + \pi - 0) = \underline{0}$$

Varianta B - „Chytře“

$$\underline{a_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \left| \begin{array}{l} f \text{ je lichá funkce a integrujeme} \\ \text{přes interval symetrický okolo } 0 \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = \underline{0}$$

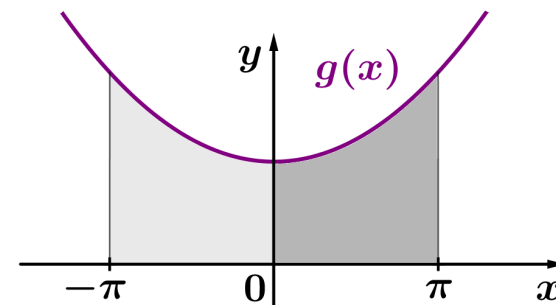
$$\underline{k = 1, 2, \dots}$$

$$\underline{a_k} = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos(k\omega x) dx = \left| \begin{array}{l} T = 2\pi, \quad \omega = 1 \\ \alpha = -\pi \Rightarrow \alpha + T = \pi \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{lichá}} \cdot \underbrace{\cos(kx)}_{\text{sudá}} dx = \underline{0}$$

lichá

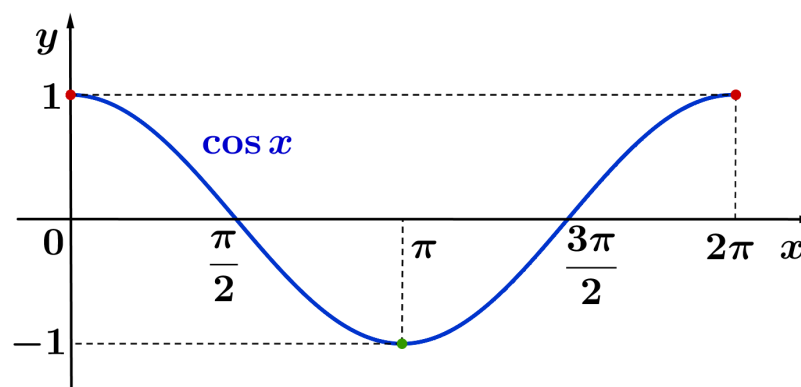
$$\underline{b_k} = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin(k\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{lichá}} \cdot \underbrace{\sin(kx)}_{\text{lichá}} dx =$$

sudá



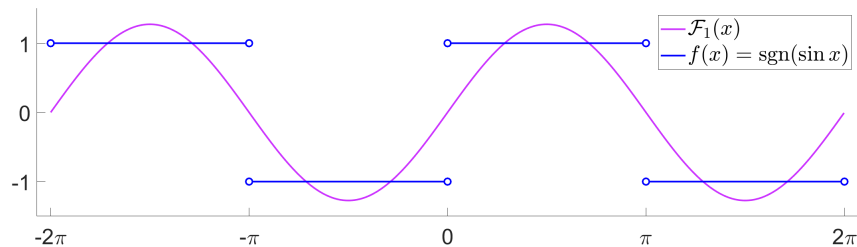
$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cdot (\cos(k\pi) - \cos(0)) = -\frac{2}{k\pi} (\cos(k\pi) - 1) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{k\pi} (\underline{-1} - 1) = \frac{4}{k\pi}, & k \dots \underline{\text{liché}} \\ -\frac{2}{k\pi} (\underline{1} - 1) = \underline{0}, & k \dots \underline{\text{sudé}} \end{cases}$$

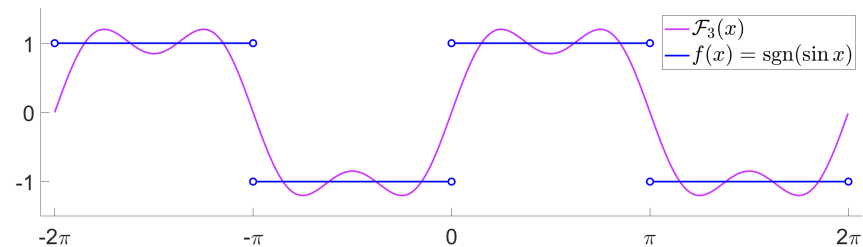


$$\underline{\mathcal{F}(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2l-1)\pi} \sin((2l-1)x) = \underline{\underline{\frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots}}$$

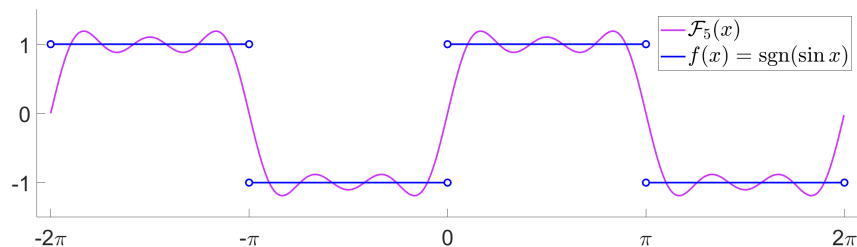
$$\mathcal{F}_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x)$$



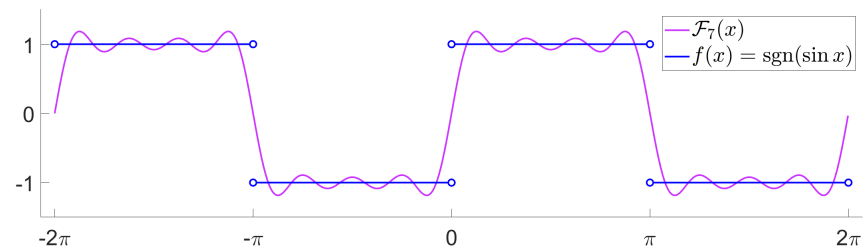
$$\mathcal{F}_3(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x)$$



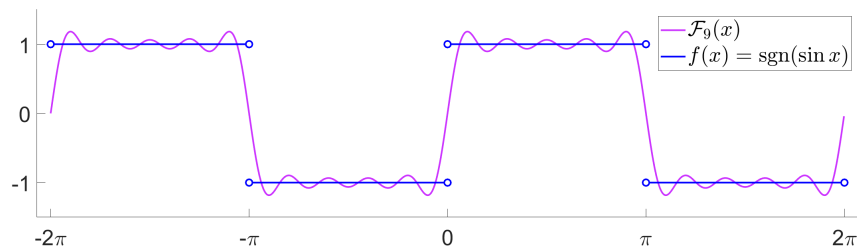
$$\mathcal{F}_5(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x)$$



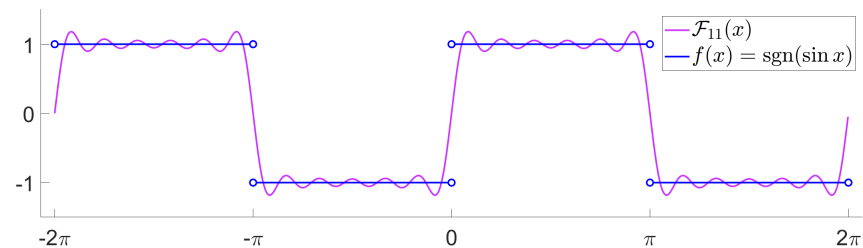
$$\mathcal{F}_7(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \frac{4}{7\pi} \sin(7x)$$



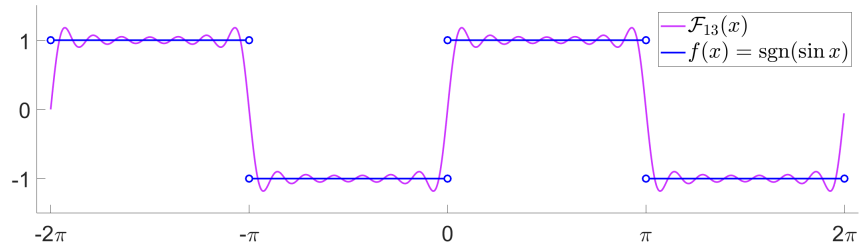
$$\mathcal{F}_9(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{9\pi} \sin(9x)$$



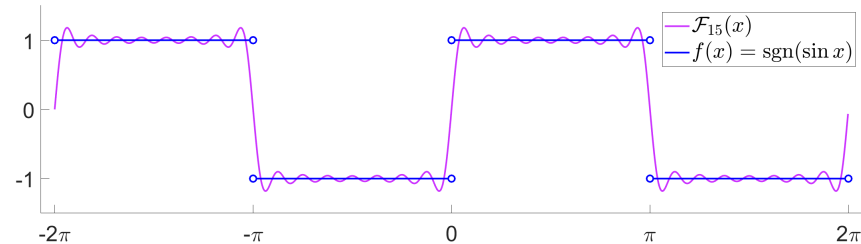
$$\mathcal{F}_{11}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{11\pi} \sin(11x)$$



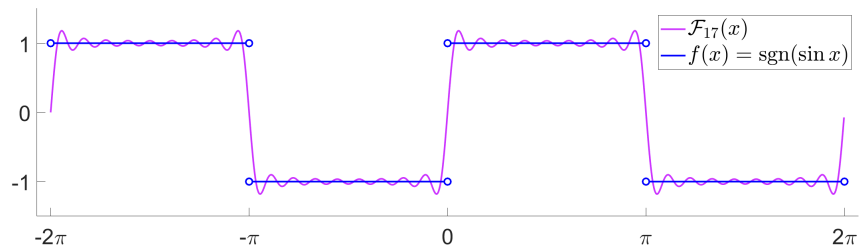
$$\mathcal{F}_{13}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{13\pi} \sin(13x)$$



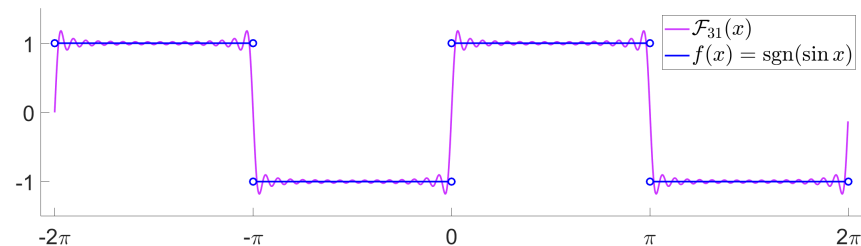
$$\mathcal{F}_{15}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{15\pi} \sin(15x)$$



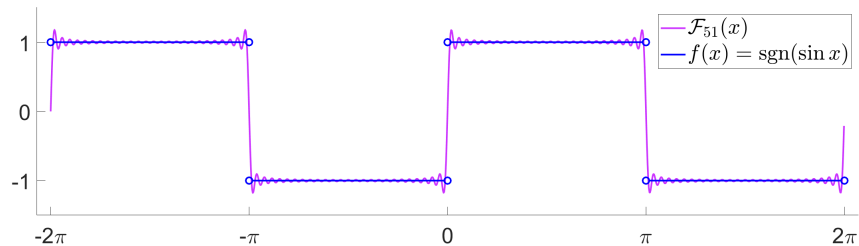
$$\mathcal{F}_{17}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{17\pi} \sin(17x)$$



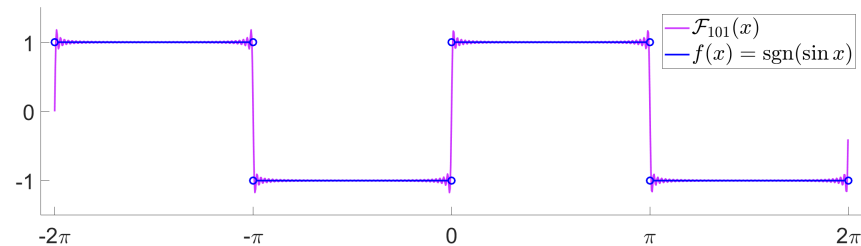
$$\mathcal{F}_{31}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{31\pi} \sin(31x)$$



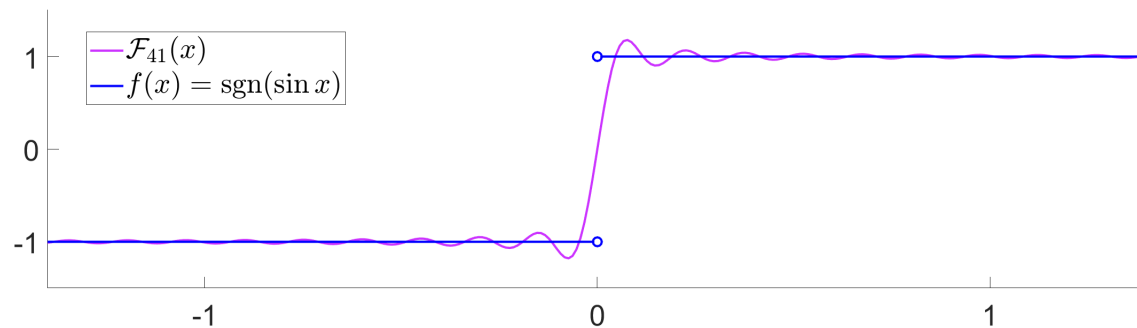
$$\mathcal{F}_{51}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{51\pi} \sin(51x)$$



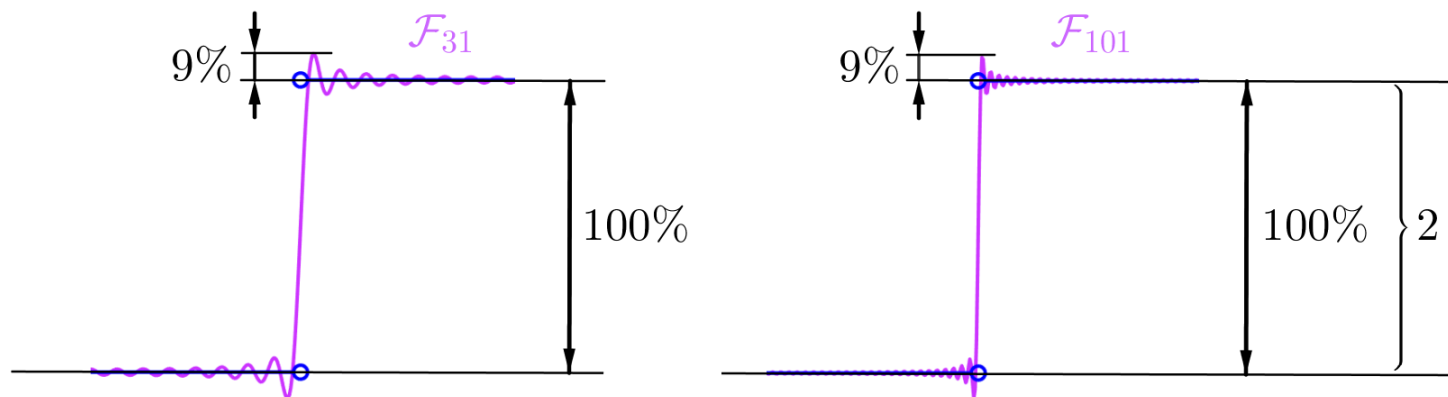
$$\mathcal{F}_{101}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{101\pi} \sin(101x)$$



Gibbsův jev



- pokud nespojitou funkci aproximujeme spojitými siny a kosiny, dochází k překmitnutí o velikosti 18% skoku
- velikost překmitu se s rostoucím počtem použitých funkcí v součtu nemění, pouze se zužuje



Uvažujme Fourierův polynom o n sčítancích, tj.

$$\mathcal{F}_{2n-1}(x) = \sum_{l=1}^n \frac{4}{(2l-1)\pi} \cdot \sin((2l-1)x) \quad / \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \mathcal{F}_{2n-1}(x) = \sum_{l=1}^n \frac{\sin((2l-1)x)}{(2l-1)} = \sum_{l=1}^n \int_0^x \cos((2l-1)t) dt = \int_0^x \sum_{l=1}^n \cos((2l-1)t) dt$$

víme, že platí:
$$\frac{\sin((2l-1)x)}{(2l-1)} = \int_0^x \cos((2l-1)t) dt$$

Pro součet kosinové řady platí:

$$\sum_{l=1}^n \cos((2l-1)t) = \cos t + \cos 3t + \cos 5t + \dots + \cos(2n-1)t = \frac{\cos nt \cdot \sin nt}{\sin t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2nt}{\sin t}$$

Tedy:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \mathcal{F}_{2n-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$$

tj. pro lokální extrémy musí platit:

$$\mathcal{F}'_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2nx}{\sin x} = 0 \quad x_k = \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

tj. první extrém nabývá pro $x_1 = \frac{\pi}{2n}$ a má hodnotu

$$\mathcal{F}_{2n-1}(x_1) = \mathcal{F}_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \left. \begin{array}{l} y = 2nt \Rightarrow t = \frac{y}{2n} \\ dt = \frac{1}{2n} dy \\ t = 0 \Rightarrow y = 0 \\ t = \frac{\pi}{2n} \Rightarrow y = \pi \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2n \cdot \sin \frac{y}{2n}} dy =$$

pro velké n a malé $t = \frac{y}{2n}$ lze použít přibližný vzorec $\sin \frac{y}{2n} \approx \frac{y}{2n}$, takže

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = \dots \doteq \underline{1,1789797}$$

↳ „překmit“ o přibližně 9% velikosti skoku (= 2)

Poznámka:

Gibbsův jev nastává u Fourierova polynomu lib. řádu $\mathcal{F}_n(x)$ a velikost „překmitu“ nezávisí na počtu sčítanců.

U součtové funkce $\mathcal{F}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x)$ již Gibbsův jev nenastává.

(V praxi ovšem vždy použijeme konečný počet sčítanců.)

Poznámka:

Pokud chceme sestavit Fourierovu řadu pro lichou funkci, vypadnou všechny členy obsahující kosinus (sudá funkce), dostaneme tzv. sinovou řadu.

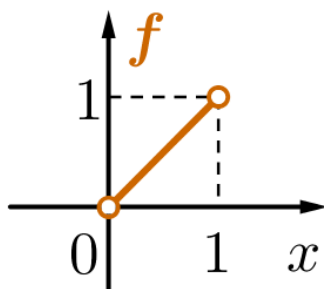
Analogicky při výpočtu Fourierovy řady sudé funkce vypadnou členy obsahující siny (liché funkce) a dostaneme tzv. kosinovou řadu.

Poznámky:

① Co udělat v případě, že f není periodická ?

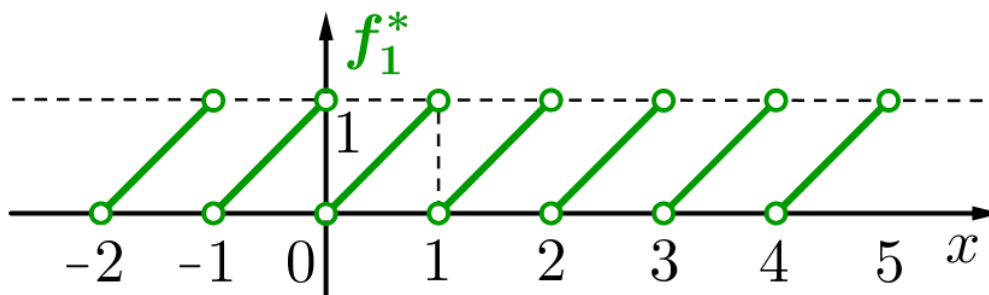
Odpověď: uděláme z ní periodickou (různé možnosti, podle toho, co chci)

Příklad:



$$f(x) = x, \quad x \in (0, 1)$$

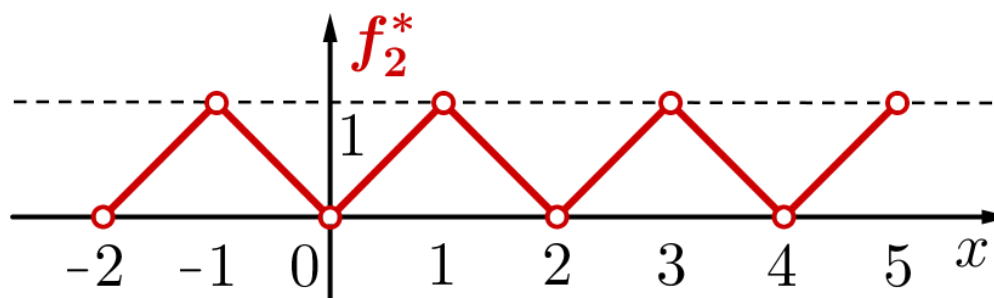
A přímé periodické rozšíření (prodloužení)



Počítej Fourierovu řadu funkce f_1^* , tj.

$$\underline{T = 1} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

B sudé periodické rozšíření (prodloužení)

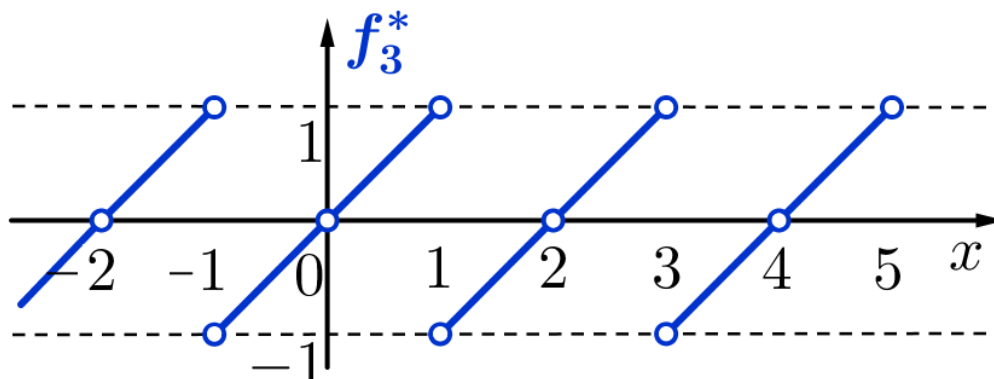


Počítej Fourierovu řadu funkce f_2^* , tj.

$$\underline{T = 2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

(kosinová řada)

C liché periodické rozšíření (prodloužení)

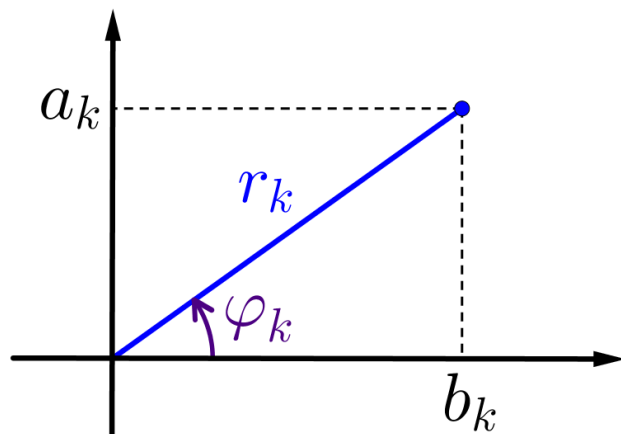


Počítej Fourierovu řadu funkce f_3^* , tj.

$$\underline{T = 2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

(sinová řada)

② Jiný zápis Fourierovy řady



polární souřadnice r_k, φ_k

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$$

pro $k = 1, 2, \dots$

$$r_k^2 = a_k^2 + b_k^2$$

$$\sin \varphi_k = \frac{a_k}{r_k} \Leftrightarrow a_k = r_k \sin \varphi_k$$

$$\cos \varphi_k = \frac{b_k}{r_k} \Leftrightarrow b_k = r_k \cos \varphi_k$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k} \Leftrightarrow \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}$$

Dostaneme:

$$\begin{aligned} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) &= r_k \sin \varphi_k \cos(k\omega x) + r_k \cos \varphi_k \sin(k\omega x) = (\text{součtové vzorce}) = \\ &= r_k \sin(k\omega x + \varphi_k) \end{aligned}$$

↓

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

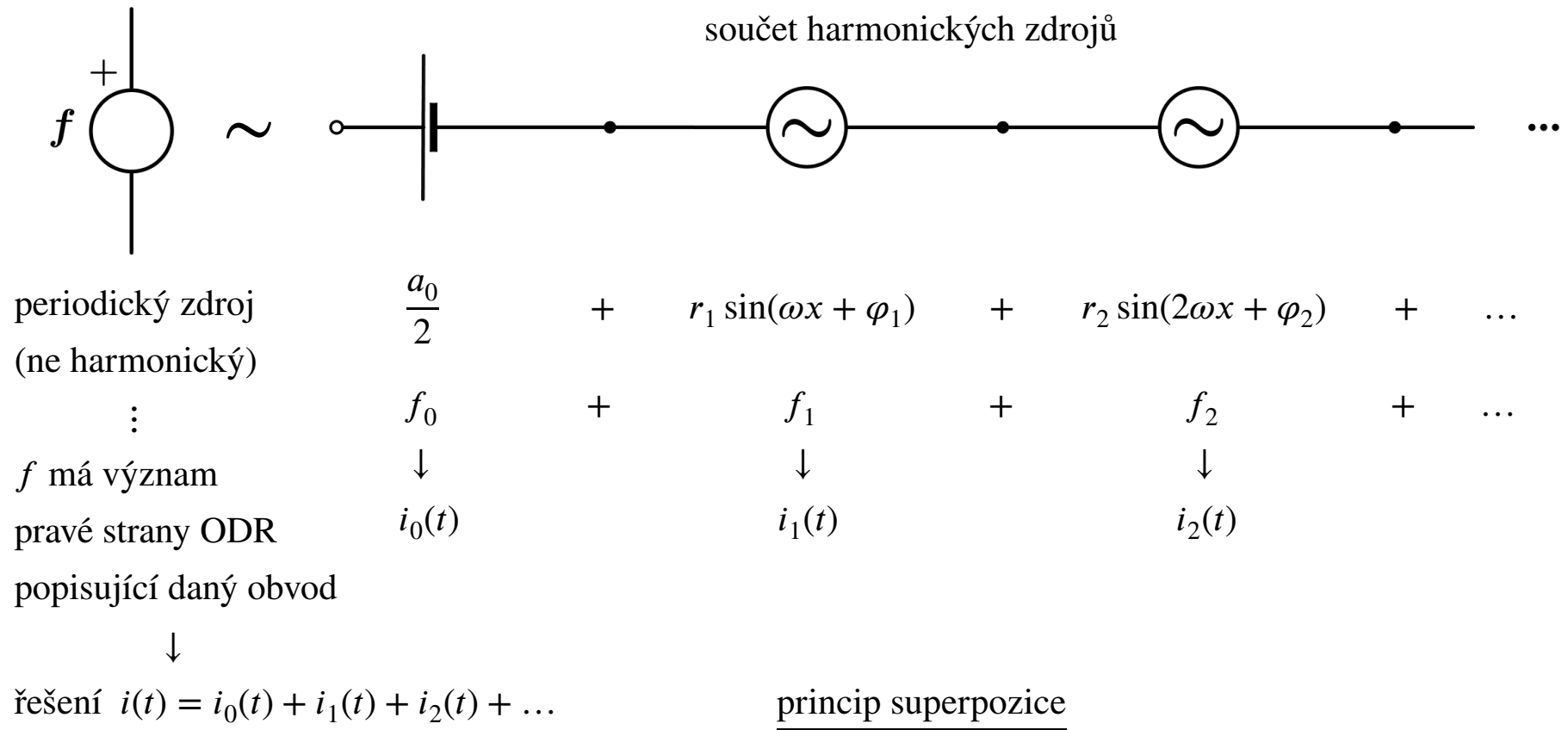
Závěr:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} r_k \sin(k\omega x + \varphi_k)}_{\text{harmonické funkce}}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 amplituda fázové posunutí

$r_k \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow +\infty$

harmonické funkce s vysokými frekvencemi
mají menší a menší vliv



Na závěr ukážeme užití funkčních řad pro řešení počátečních a okrajových úloh.

Metoda neurčitých koeficientů

Příklad:

$$y'' = xy, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

lineární ODR 2. řádu s nekonstantními koeficienty !

(neumíme řešit !)

řešení hledáme ve tvaru mocninné řady:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad a_n = ?$$

→ z počátečních podmínek:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y(0) = a_0 = 0$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$y'(0) = a_1 = 1$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \rightarrow \boxed{a_2 = 0} \wedge \boxed{(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \quad a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, \quad a_5 = \frac{a_2}{5 \cdot 4} = 0, \quad a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \quad \dots$$

$$y(x) = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^9}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \dots \right)$$

$$\boxed{y(x) = x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \dots}$$

Fourierova metoda (pro periodické a okrajové úlohy)

Příklad:

$$\begin{aligned} y'' + y &= 3 \sin 2x + 7 \sin 5x, & x \in (-\pi, \pi) \\ y(\pi) &= 0, & y(-\pi) = 0 \end{aligned}$$

okrajová úloha, homogenní Dirichletovy podmínky

$$x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow T = 2\pi, \omega = 1$$

řešení hledáme ve tvaru Fourierovy řady

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \rightarrow \quad y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (-n^2) \cdot \cos nx + b_n \cdot (-n^2) \cdot \sin nx$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-n^2 a_n \cos nx - n^2 b_n \sin nx) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 3 \sin 2x + 7 \sin 5x$$

trigonometrický systém - lineárně nezávislý

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (1 - n^2) a_n &= 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_0 &= 0 \\ (1 - n^2) b_n &= 0 & \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 5\} \\ (1 - 2^2) b_2 &= 3 \\ (1 - 5^2) b_5 &= 7 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 \dots &\text{libovolné} \\ a_n &= 0, n \geq 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} b_1 \dots &\text{libovolné} \\ b_2 &= -1 \\ b_n &= 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 5\} \\ b_5 &= -\frac{7}{24} \end{aligned}$$

řešení ODR:

$$y(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x - \sin 2x - \frac{7}{24} \sin 5x$$

+ okraj. podm.:

$$y(\pi) = a_1 \cdot (-1) + b_1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$a_1 = 0$$

$$b_1 \dots \text{libovolné}$$

$$y(-\pi) = a_1 \cdot (-1) + b_1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

řešení okraj. úlohy:

$$y(x) = b_1 \sin x - \sin 2x - \frac{7}{24} \sin 5x, \quad b_1 \dots \text{libovolné}$$

Příklad:

$$\begin{cases} y'' + 2y = f(x) \\ y \dots 2\pi\text{-periodická} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ 0 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

- periodická jinde

$$T = 2\pi, \quad \omega = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Pravou stranu rozvineme ve Fourierovu řadu

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin nx$$

Dosadíme do rovnice

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [(2 - n^2) a_n \cos nx + (2 - n^2) b_n \sin nx] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin nx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_0 = 1} \quad (2 - n^2) a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$(2 - n^2) b_n = \frac{1}{n\pi} \cdot (1 - (-1)^n) \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi(2 - n^2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Závěr:

$$y(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi(2 - n^2)} \sin nx$$