

Taylorovy řady - aproximace funkce f pomocí polynomů

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Taylorův polynom

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{a_k} (x-x_0)^k$$

Taylorova řada

$$f(x) = T(x), x \in K$$

↖ nebo konvergence

Fourierovy řady - aproximace dané funkce součtem goniometrických funkcí (periodické)

Dáno: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodická se základní periodou $T > 0$.

$$\omega := \frac{2\pi}{T} \text{ (úhlová frekvence)}$$

Fourierův (trigonometrický) polynom funkce f řádu n je definován vztahem

$$\tilde{F}_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x), \text{ kde}$$

Fourierovy koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ jsou dány vztahy:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin(k\omega x) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

kde α volíme tak, aby integrace byla co nejjednodušší.

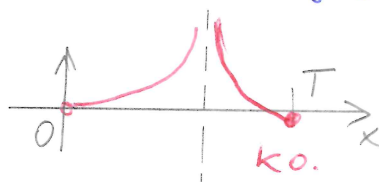
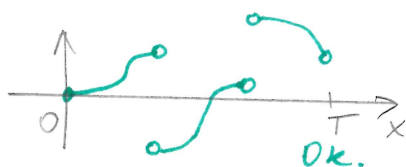
Fourierova (trigonometrická) řada funkce f je
pro dané $x \in \mathbb{R}$ definována vztahem

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) =: \bar{F}(x)$$

součtová funkce
Fourierovy řady

Platí: jestliže

- (i) f je periodická s periodou $T > 0$;
- (ii) f i f' mají v každém intervalu periody nejvýše konečný počet bodů nespojitosti nejvýše 1. druhu (skok);



potom $\forall x \in \mathbb{R}: \bar{F}(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{n \rightarrow x+} f(n) + \lim_{n \rightarrow x-} f(n) \right]. \quad (*)$

↑ hodnota Fourierovy řady v bodě x
(takto se prakticky spočítá)

Poznámky:

- f je spojitá v bodě x , tj. platí, že

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow x} f(n) = \lim_{n \rightarrow x+} f(n) = \lim_{n \rightarrow x-} f(n).$$

Potom $\underline{\bar{F}(x)} = \frac{1}{2} [f(x) + f(x)] = \frac{1}{2} \cdot 2f(x) = \underline{f(x)} !$

- Graf součtové funkce Fourierovy řady $\bar{F}$ lze kreslit bez znalosti hodnot Fourierových koeficientů $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$! Vědí díky vztahu $(*)$

Definice: Systém funkcí $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ je ortogonální na intervalu (a, b) , pokud jsou funkce f_m na sebe kolmé, tj.:

$$\int_a^b f_m(x) \cdot f_n(x) dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$$

Definice: Posloupnost $\{1, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \dots\}$ se nazývá trigonometrický systém funkcí ($\omega \dots$ frekvence)

Věta: Trigonometrický systém je ortogonální na libovolném intervalu délky $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Speciálně: $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ ortogonální na intervalu délky $T = 2\pi$, tj. např. $(-\pi, \pi)$

$m \neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0$$

$n = m$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

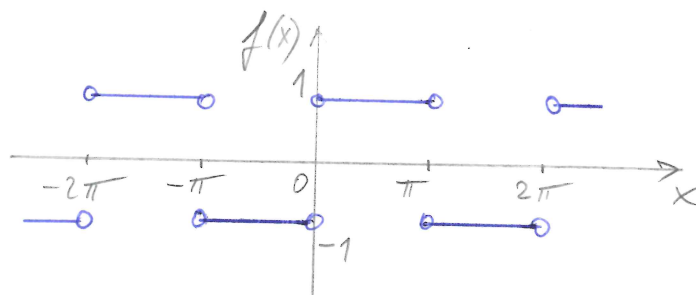
$$\int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$$

Príklad: $T = 2\pi$ a

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

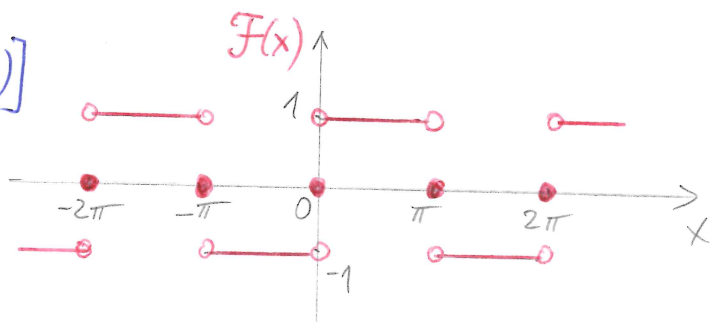
-104-

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$



$$\begin{aligned} \underline{F(0)} &= \frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) + \lim_{h \rightarrow 0^-} f(h) \right] \\ &= \frac{1}{2} [1 + (-1)] = \underline{0} \end{aligned}$$

... podobne v ostatných
bodech nespojitosť.



Vypočítame Fourierovy koeficienty:

$k=0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cdot \underbrace{\cos(0 \cdot \omega x)}_{=1} dx = \left| \begin{array}{l} T=2\pi, \omega=1 \\ \alpha=-\pi \Rightarrow \alpha+T=-\pi+2\pi=\pi \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

Výpočet A: "Brutálna síla"

$$\begin{aligned} \underline{a_0} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left([-x]_{-\pi}^0 + [x]_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} (0 - (-(-\pi)) + \pi - 0) = \frac{1}{\pi} (-\pi + \pi) = \underline{0} \end{aligned}$$

Výpočet B: "Chytá"

$$\begin{aligned} \underline{a_0} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \left| \begin{array}{l} f \text{ je lichá funkcia} \\ \text{integrujeme přes interval symetrický okolo 0} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 0 = \underline{0} \end{aligned}$$

$$k=1, 2, \dots$$

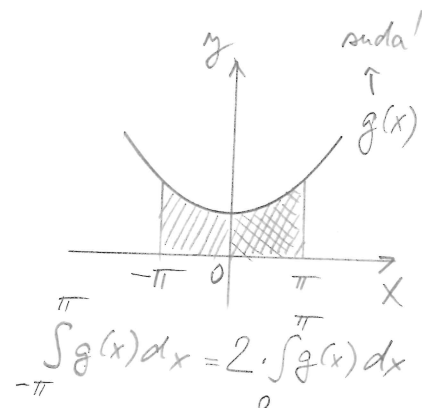
$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos(k\omega x) dx = \left| \begin{array}{l} T=2\pi ; \omega=1 \\ \alpha=-\pi \Rightarrow \alpha+T=\pi \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx = \underline{0}$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{lička'}} \cdot \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{suda'}} = \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{lička'}}$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin(k\omega x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{lička'}} \cdot \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{lička'}} = \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{suda'}}$

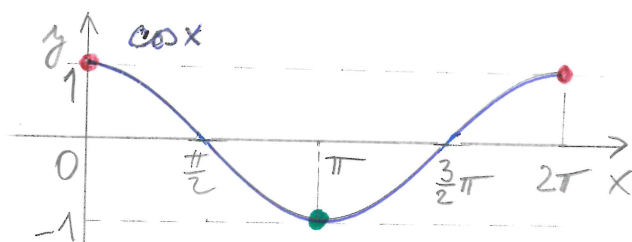


$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} (1) \cdot \sin(kx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) (\cos(k\pi) - \cos(k \cdot 0))$$

$$= -\frac{2}{k\pi} (\cos(k\pi) - 1) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{k\pi} (-1 - 1) = \frac{4}{k\pi}, & k \dots \text{lička'} \\ -\frac{2}{k\pi} (1 - 1) = \underline{0}, & k \dots \text{suda'} \end{cases}$$

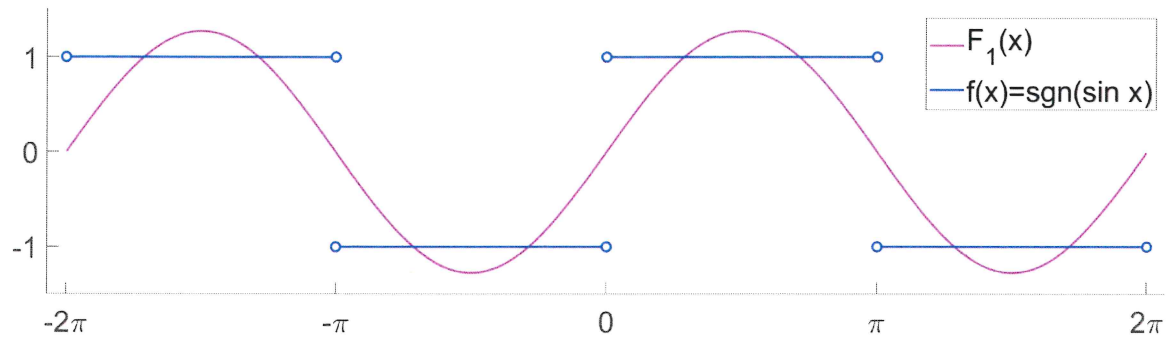


$$F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{4}{(2l-1)\pi} \sin((2l-1)x) =$$

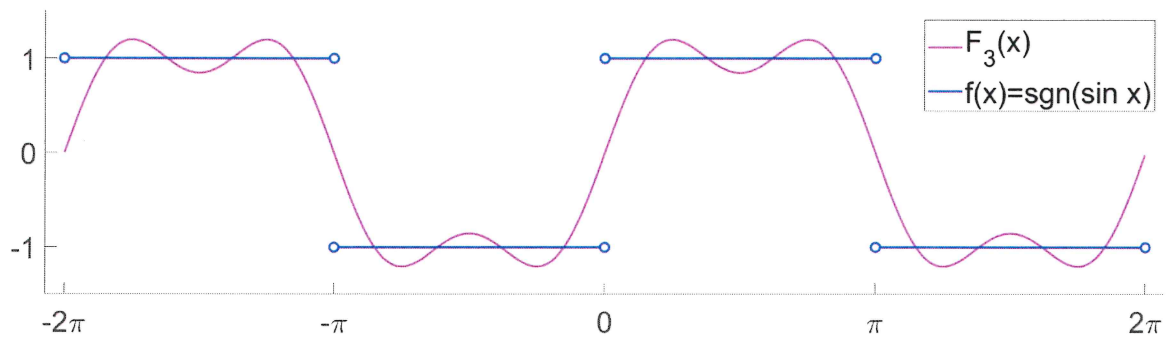
$$= \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots$$

$$\left(\begin{array}{l} l=1, 2, 3, \dots \\ k=2l-1=1, 3, 5, \dots \end{array} \right)$$

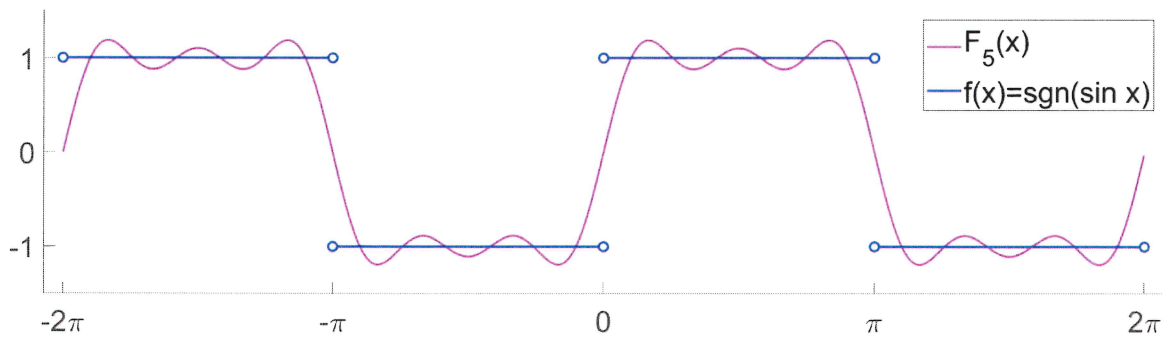
$$F_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x)$$



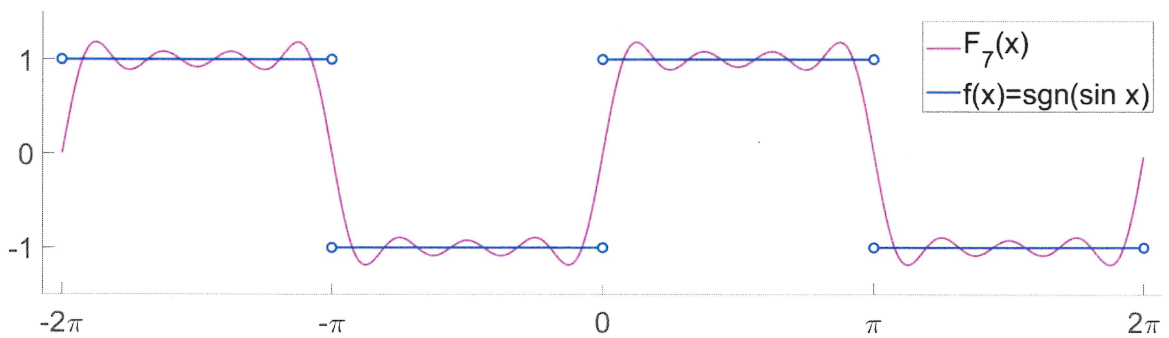
$$F_3(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x)$$



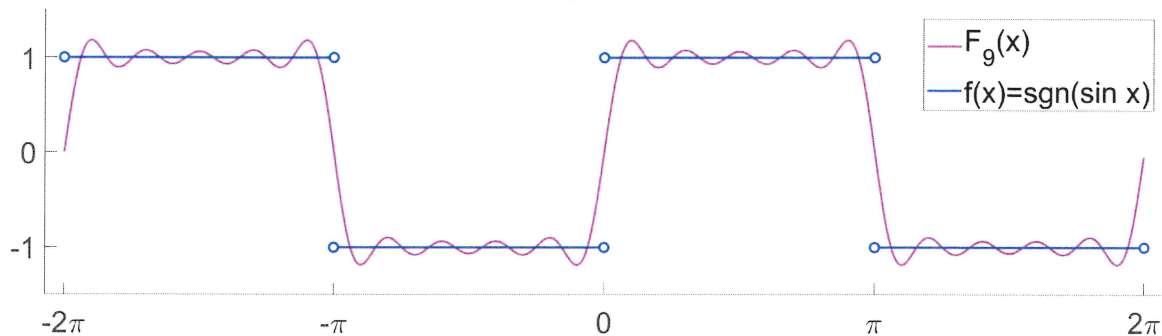
$$F_5(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x)$$



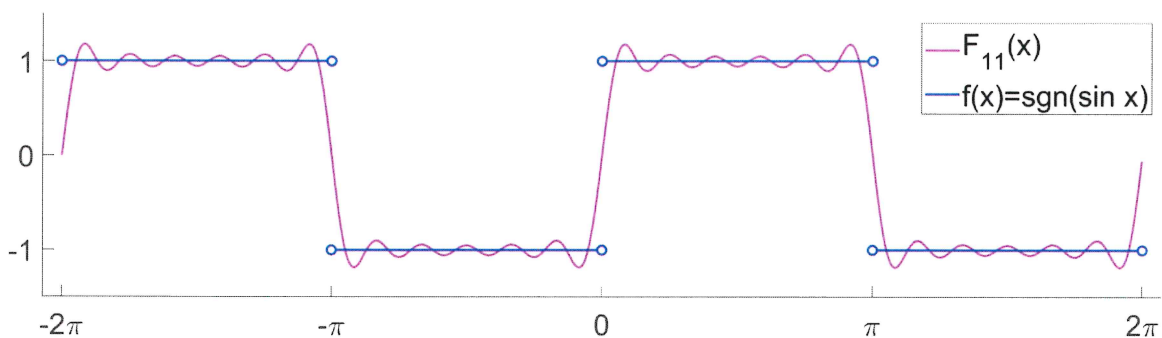
$$F_7(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \frac{4}{7\pi} \sin(7x)$$



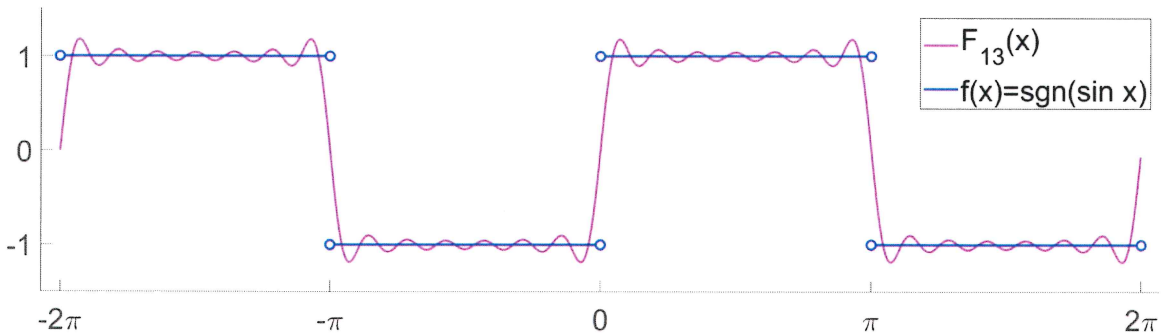
$$F_9(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \frac{4}{7\pi} \sin(7x) + \frac{4}{9\pi} \sin(9x)$$



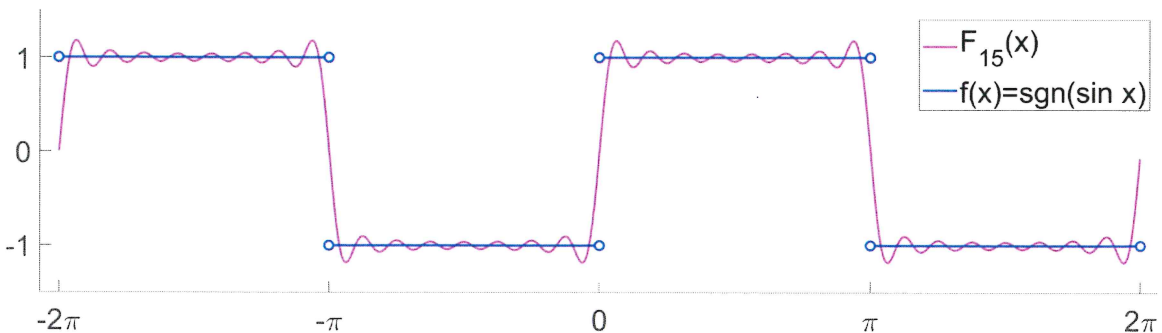
$$F_{11}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \frac{4}{7\pi} \sin(7x) + \frac{4}{9\pi} \sin(9x) + \frac{4}{11\pi} \sin(11x)$$



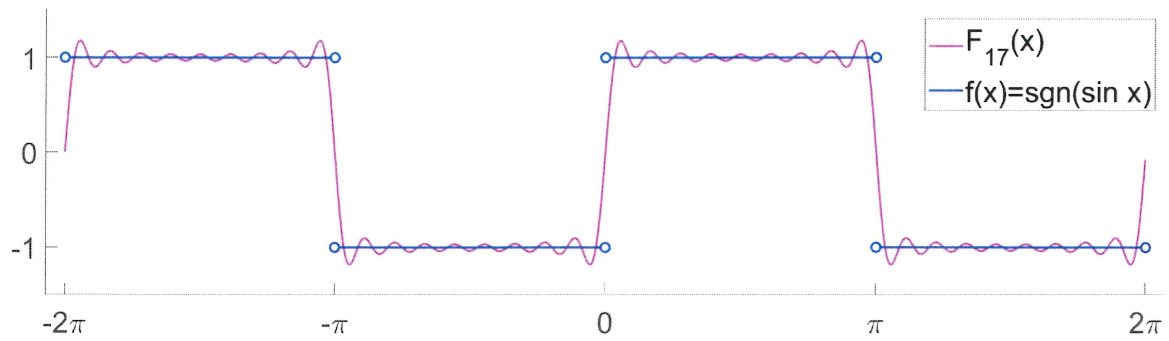
$$F_{13}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots + \frac{4}{13\pi} \sin(13x)$$



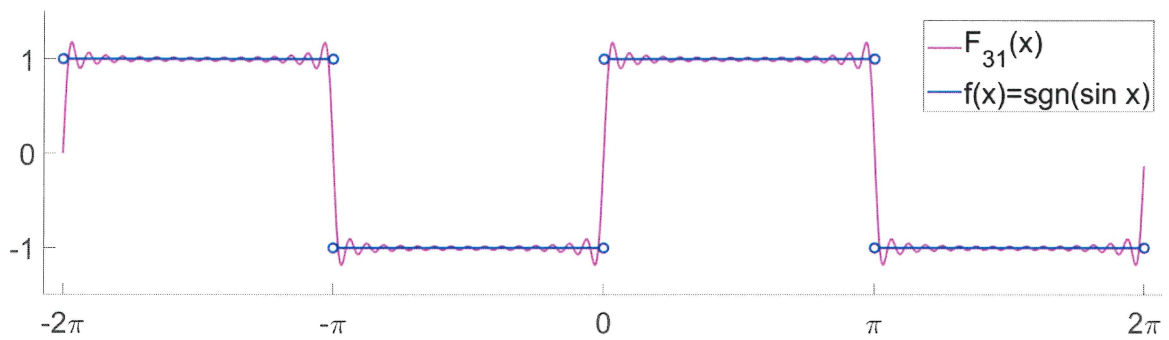
$$F_{15}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots + \frac{4}{15\pi} \sin(15x)$$



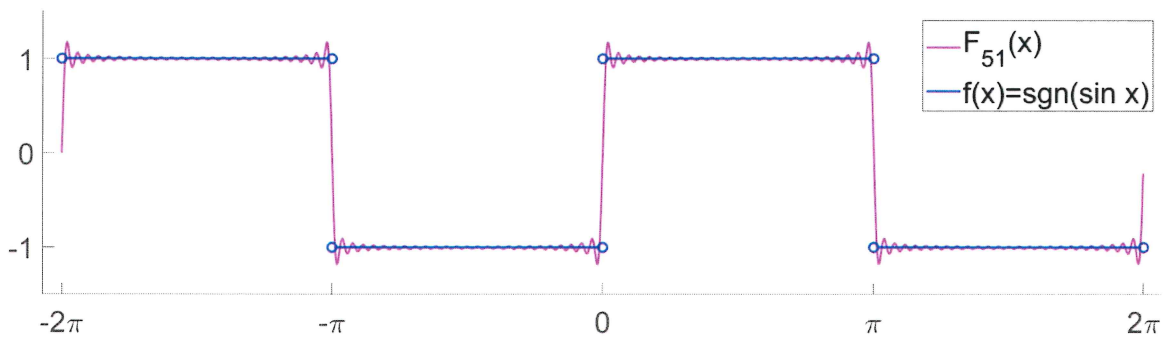
$$F_{17}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots + \frac{4}{17\pi} \sin(17x)$$



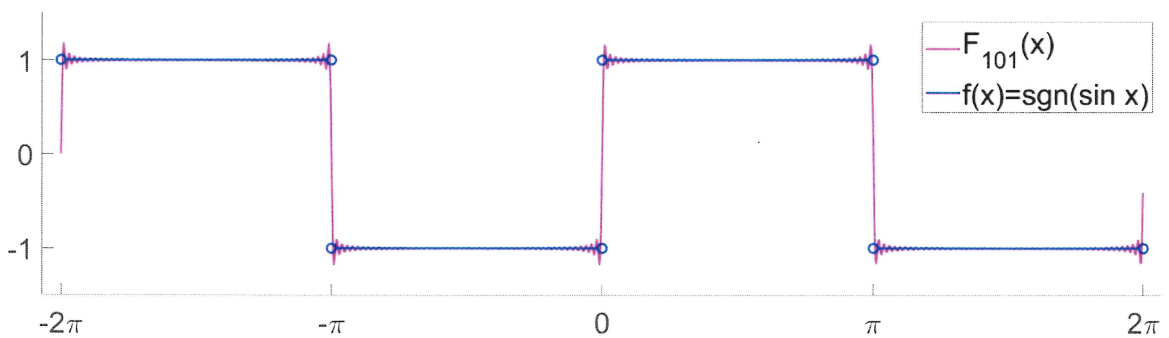
$$F_{31}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots + \frac{4}{31\pi} \sin(31x)$$

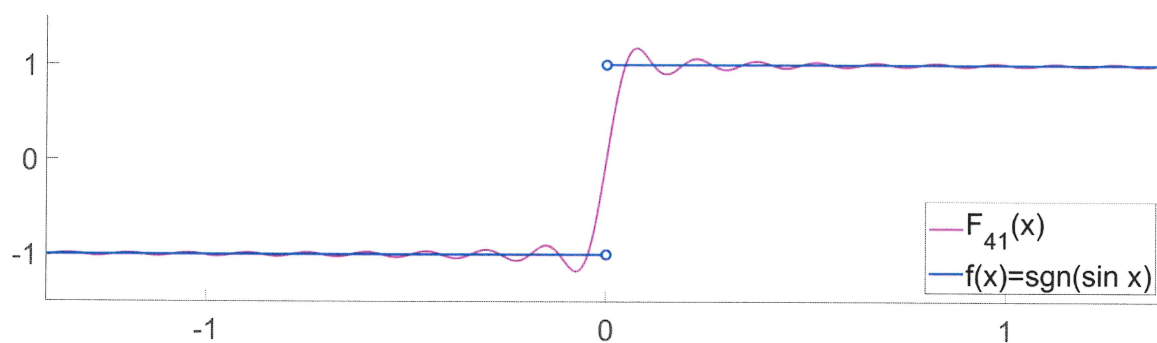


$$F_{51}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots + \frac{4}{51\pi} \sin(51x)$$

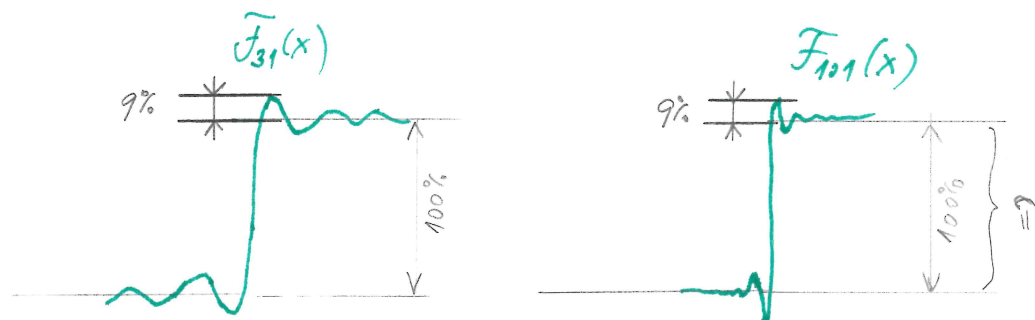


$$F_{101}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots + \frac{4}{101\pi} \sin(101x)$$





- pokud nepojítou funkce aprotimující se spojitémi $\sin$ a $\cos$, dochází k překmitání o velikosti 18% skoku
- velikost přemítání se s rostoucím počtem členů řady funkce v součtu zmenšuje, pouze se posouvá



Wazijnje Fourierův polygon o n stránkách, tj.

$$F_{2n-1}(x) = \sum_{l=1}^n \frac{4}{(2l-1)\pi} \cdot \sin((2l-1)x) \quad / \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot F_{2n-1}(x) = \sum_{l=1}^n \frac{\sin((2l-1)x)}{(2l-1)}$$

nme, re plati:

$$\frac{\sin((2l-1)x)}{2l-1} = \int_0^x \cos((2l-1)t) dt$$

$$= \sum_{l=1}^n \int_0^x \cos((2l-1)t) dt$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{l=1}^n \cos((2l-1)t) \right) dt$$

Pro součet kosinové řady platí:

$$\sum_{l=1}^n \cos((2l-1)L) = \cos L + \cos 3L + \cos 5L + \dots + \cos(2n-1)L =$$

$$= \frac{\cos nL \cdot \sin nL}{\sin L} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2nL}{\sin L}$$

Tedy:

$$\frac{\pi}{4} F_{2n-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \frac{\sin 2nL}{\sin L} dL$$

h. pro lokální extrém musí platit:

$$F'_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{\sin x} = 0$$

$$x_k = \frac{k\pi}{2n}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

h. první extrém nastává pro $x_1 = \frac{\pi}{2n}$ a má hodnotu

$$F_{2n-1}(x_1) = F_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nL}{\sin L} dL =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin y}{2n \cdot \sin \frac{y}{2n}} dy =$$

substituce!

 $y = 2nL \Rightarrow L = \frac{y}{2n}$
 $dL = \frac{1}{2n} dy$

L	0	$\frac{\pi}{2n}$
y	0	π

(pro velké n a malé $L = \frac{y}{2n}$ lze použít přibližný vzorec)

$\sin \frac{y}{2n} \approx \frac{y}{2n}, \text{ takže}$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = \dots = \underline{\underline{1,1789797}}$$

↑ "překmit" o přibližně 9%
"velikosti skoku" (=2)

Poznámka:

Gibbsův jev nastává u Fourierova polynomu lib. řádu $F_n(x)$, a velikost „překytu“ neráží se počtu sčítanců.

U součtové funkce $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$ je Gibbsův jev nenastává.

(V praxi ovšem vždy použijeme konečný počet sčítanců.)

Poznámka:

Pokud chceme sestavit Fourierovu řadu pro lichou funkci, vypadnou všechny členy obsahující kosinus (sudé funkce), dostaneme tzv. sinusovou řadu.

Analogicky při výpočtu Fourierovy řady sudé funkce vypadnou členy obsahující sinus (liche funkce) a dostaneme tzv. kosinovou řadu.

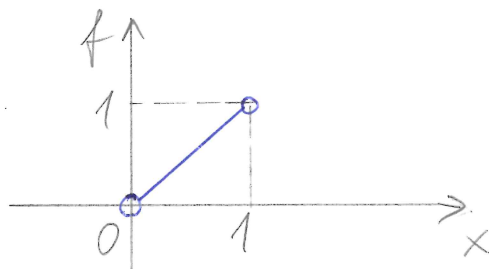
Poznámky:

-109-

① Co dělat v případě, že f není periodická?

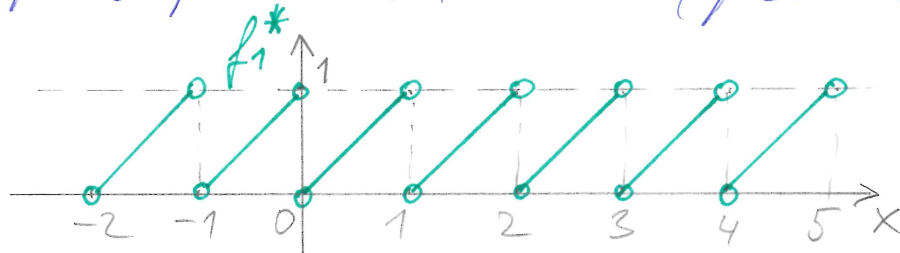
Odpověď: udeíláme z ní periodickou funkci
(různé měřítosti, podle toho, co chceme)

Příklad:



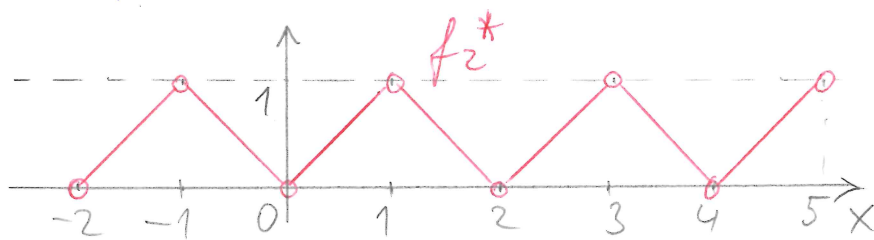
$$f(x) = x, \quad x \in (0, 1)$$

A přímé 'periodické' rozšíření (prodloužení)



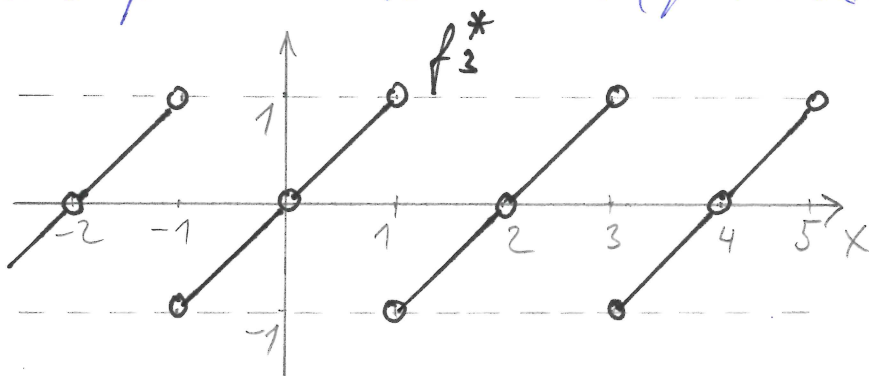
Počítej F. řadu
funkce f_1^* , tj.
 $T=1 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

B sude 'periodické' rozšíření (prodloužení)



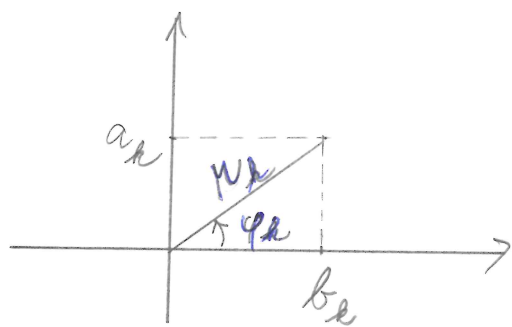
Počítej F. řadu
funkce f_2^* , tj.
 $T=2 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$
(kosinová řada)

C liché 'periodické' rozšíření (prodloužení)



Počítej F. řadu
funkce f_3^* , tj.
 $T=2 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$
(sinová řada)

② jiný xapis Fourierovy řady.



(polární souřadnice)
 r_k, φ_k

$$(a_k, b_k) \rightarrow (r_k, \varphi_k)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$$

pro $k=1, 2, \dots$

$$r_k^2 = a_k^2 + b_k^2$$

$$\sin \varphi_k = \frac{a_k}{r_k} \Rightarrow a_k = r_k \sin \varphi_k$$

$$\cos \varphi_k = \frac{b_k}{r_k} \Rightarrow b_k = r_k \cos \varphi_k$$

$$\text{tg } \varphi_k = \frac{a_k}{b_k} \Rightarrow \varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}$$

Dostaneme:

$$\begin{aligned} & a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = \\ & = r_k \sin \varphi_k \cos(k\omega x) + r_k \cos \varphi_k \sin(k\omega x) = (\text{součtové vzorce}) \\ & = r_k \sin(k\omega x + \varphi_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Závěr:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} r_k \sin(k\omega x + \varphi_k)$$

↑
amplituda

↑
fázové posunutí

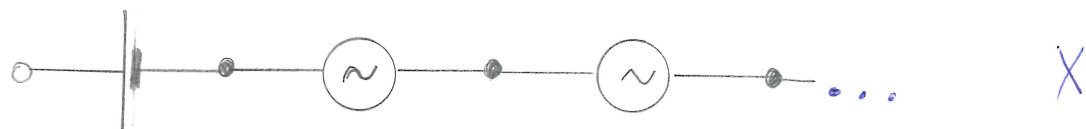
harmonické funkce

$$(r_k \rightarrow 0 \text{ pro } k \rightarrow +\infty)$$

harmonické funkce s vysokými frekvencemi
mají menší a menší vliv.

součet harmonických zdrojů:

f^+  $\sim$
periodický
zdroj
(ne harmonický)



$$\frac{a_0}{2} + r_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + r_2 \sin(2\omega x + \varphi_2) + \dots$$

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots$$

f_0 $\downarrow$ řešení $i_0(k)$ SKM
 f_1 $\downarrow$ řešení $i_1(k)$ SKM

f_2 $\downarrow$ řešení $i_2(k)$ SKM (symbolická - komplexní metoda)
hledáme ustálený stav

v praxi:

f má význam
prave' strany

ODR popisující daný
obvod $\downarrow$

Řešení $i(k) = i_0(k) + i_1(k) + i_2(k) + \dots$

princip superpozice

Náti' funkčn'ch řád pro řešení počátečn'ch a okrajov'ch úloh

Metoda neurč'j'ch koeficientů

Příklad:

$$y'' = xy, \quad y(0) = 0 \\ y'(0) = 1$$

lineární ODR 2. řádu
s konst. koeficienty!
(nemáme řešení!)

řešení hledáme ve tvaru mocninne řady:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n; \quad a_n = ?$$

→ k poč. podmínkám:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y(0) = a_0 = 0$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$y'(0) = a_1 = 1$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$$

$$\Rightarrow a_2 = 0$$

∧

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = a_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \quad a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, \quad a_5 = \frac{a_2}{5 \cdot 4}, \quad a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \dots$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^9}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \dots \right) +$$

$$+ a_1 \left(x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \dots \right)$$

0
=1

$$y(x) = x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \dots$$

2. c.
řádu

Fourierova metoda

- pro periodické a okrajové úlohy

Příklad:

$$y'' + y = 3 \sin 2x + 7 \sin 5x; \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$y(\pi) = 0, \quad y(-\pi) = 0$$

okrajová úloha, homogenní Dirichlet. podm.

$$x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow T = 2\pi, \quad \omega = 1$$

Řešení hledáme ve tvaru Fourierovy řady

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (-n^2) \cdot \cos nx + b_n \cdot (-n^2) \cdot \sin nx$$

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 a_n \cos nx - n^2 b_n \sin nx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) &= \\ &= 3 \sin 2x + 7 \sin 5x \end{aligned}$$

trigonometrický systém - lin. rovnice

$$\Rightarrow (1-n^2)a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = 0$$

$$(1-n^2)b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 5\}$$

$$(1-2^2)b_2 = 3$$

$$(1-5^2)b_5 = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 \dots \text{libovolné} \\ a_n = 0, n \geq 2 \\ b_1 \dots \text{libovolné} \\ b_2 = -1 \\ b_5 = -\frac{7}{24} \\ b_n = 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 5\} \end{array} \right\}$$

Řešení ODR: $y(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x - \sin 2x - \frac{7}{24} \sin 5x$

+ okraj. podm: $y(\pi) = a_1 \cdot (-1) + b_1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$$y(-\pi) =$$

- " -

$$\Rightarrow \boxed{b_1 \dots \text{lib}}$$

Řešení okraj.
úlohy:

$$y(x) = b_1 \sin x - \sin 2x - \frac{7}{24} \sin 5x \quad \boxed{b_1 \dots \text{lib}}$$

Príkład:

$$\begin{cases} y'' + 2y = f(x) \\ y \dots 2\pi\text{-periodická} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ 0 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

-periodická' funkce

-114-

$$T = 2\pi, \omega = 1 \Rightarrow y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Pravou stranu rozvineme ve Fourierovu řadu:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin nx$$

Dosadíme do rovnice

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(2 - n^2)a_n \cos nx + (2 - n^2)b_n \sin nx] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin nx$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = 1} \quad (2 - n^2)a_n = 0 \Rightarrow \boxed{a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$(2 - n^2)b_n = \frac{1}{n\pi} \cdot (1 - (-1)^n) \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi(2 - n^2)}, \quad n \in \mathbb{N}}$$

Závěr:

$$y(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi(2 - n^2)} \sin nx$$