

# Schurova věta

# Podobnostní transformace

a výpočet vlastních čísel

## Obecný princip:

- Řešíme-li **matematickou úlohu**, je často velmi vhodné **hledat** její **ekvivalentní formulaci** tak, aby se řešení úlohy stalo zjevným  $\rightarrow$  transformace úlohy.

## Úloha:

- Uvažujme matici  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a **úlohu nalezení** jejího **spektra**.
- **Podobnostní transformace** pomocí regulární matice  $S$ ,

$$B = S^{-1} A S,$$

zachovává Jordanův kanonický tvar, tj. i spektrum.

- Jak volit regulární matici transformace  $S$ ?

# Praktické výpočty

- Vstupní **data zatížena chybami**,  $A$  obsahuje kromě původních dat  $\hat{A}$  rovněž chyby reprezentované maticí chyb  $E$ ,

$$A = \hat{A} + E.$$

- Hledáme podobnostní transformaci

$$B = S^{-1} A S = S^{-1} \hat{A} S + S^{-1} E S$$

- $B$  je podobná  $\hat{A}$  až na **transformovanou** matici chyb  $S^{-1} E S$ .
- Její normu pro jednoduchost charakterizujeme odhadem

$$\|S^{-1} E S\| \leq \kappa(S) \|E\|$$

- Je-li  $\kappa(S) = \|S\| \|S^{-1}\| \gg 1$ , může podobnostní transformace **výrazně** zvětšit chyby obsažené ve vstupních datech.

# Jaké podobnostní transformace používat?

ortogonální, unitární

$$B = S^{-1} A S.$$

- Při  $\kappa(S) \gg 1$  může dojít k výraznému **zvětšení chyb**.
- Vlastní čísla  $B$  se pak **mohou podstatně lišit** od vlastních čísel  $\hat{A}$ .
- Jaké transformace používat?  
Ty, co **velikosti chyb** výrazně **nezvětší**,

$$\kappa(S) \approx 1.$$

- Příklad: **unitární transformace**.

# Unitární (ortogonální) transformace

- Řekneme, že čtvercová matice  $U$  je **unitární**, jestliže

$$U^*U = UU^* = I.$$

Je-li  $U$  reálná, hovoříme o **ortogonální** matici.

**Unitární (ortogonální) transformace** jsou transformace realizované unitárními (ortogonálními) maticemi.

- Je-li  $S$  unitární, pak

$$\|S^{-1}ES\| = \|S^*ES\| = \|E\|.$$

- V kapitole o singulárním rozkladu ukážeme, že

$$\kappa(S) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad S \text{ je násobek unitární matice.}$$

# Na jaký tvar transformovat matici $A$

abychom mohli z tvaru vyčíst vlastní čísla?

$$B = S^{-1}AS$$

- **Jordanův kanonický tvar** → podstatný praktický problém:  $S$  může být velmi **špatně podmíněna**.
- Postačí, když  $B$  bude **v horním trojúhelníkovém tvaru** → **vlastní čísla** jsou **na diagonále**.
- Dva požadavky:
  - ① **Vynulovat** všechny poddiagonální prvky.
  - ② Transformace nesmí zvětšovat podstatně velikosti chyb → omezíme se na **unitární** podobnostní transformace.
- Je to proveditelné?

# Schurova věta

## Schurova věta

Pro libovolnou čtvercovou matici  $A$  existuje unitární matice  $U$  tak, že matice

$$R = U^* A U$$

je horní trojúhelníková s vlastními čísly matice  $A$  na diagonále v libovolném předepsaném pořadí.



$$R = U^* A U \quad \Leftrightarrow \quad A = U R U^*.$$

- Rozklad  $A = U R U^*$  nazveme **Schurovým rozkladem**  $A$ .
- Velmi **důležitý rozklad**, základ algoritmů pro výpočet vlastních čísel matic, funkcí matic aj.
- Lze jej spočítat (aproximovat) numericky stabilním způsobem (pomocí unitárních transformací).

# Výpočet Schurova rozkladu

Schurův rozklad nelze obecně vypočítat konečným algoritmem

- Korespondence - problémy hledání  
**vlastních čísel matice**  $\leftrightarrow$  **kořenů polynomu**.
- Existuje vzorec, který pro obecný polynom libovolného řádu určí s použitím  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$  a  $\sqrt{\phantom{x}}$  jeho kořeny?

## Věta (Abel, Galois)

Obecná polynomiální rovnice  $n$ -tého stupně není pro  $n \geq 5$  řešitelná v radikálech.

**Důsledek:** **Vlastní čísla** matice řádu  $n \geq 5$  **nelze obecně spočítat v konečném počtu kroků**  $\Rightarrow$  ani Schurův rozklad obecně vypočítat konečným algoritmem.

# Důsledky Schurovy věty

## Spektrální rozklad pro normální matice

**Definice:** Čtvercová matice  $A$  se nazývá **normální**, platí-li

$$A^* A = A A^*.$$

### Věta (Spektrální věta pro normální matice)

Matice  $A$  je normální právě tehdy, když existuje unitární matice  $U$  a diagonální matice  $D$  tak, že

$$U^* A U = D, \quad \text{neboli} \quad A = U D U^*.$$



# Důsledky

- $A$  je normální  $\Leftrightarrow$  existují **unitární**  $U$  a **diagonální**  $D$  tak, že

$$AU = UD.$$

- Označme  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , rozepišme po sloupcích,

$$Au_j = \lambda_j u_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sloupce  $U$  jsou normalizované **vlastní vektory**  $A$  a prvky na diagonále  $D$  jsou **vlastní čísla**  $A$ .

Vlastnosti spektrálního rozkladu normální matice

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je normální  $\Leftrightarrow$  existuje **ortogonální báze** prostoru  $\mathbb{C}^n$  složená z **vlastních vektorů**  $A$ .

# Dyadický rozklad (rozvoj) normální matice

- Součin dvou matic lze zapsat pomocí vnějšího součinu. Potom

$$A = UDU^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^*,$$

... **dyadický rozvoj** normální matice  $A$ .

- Z definice 2-normy

$$\|\lambda_i u_i u_i^*\| = |\lambda_i|, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Pro Frobeniovu normu normální matice platí

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \quad (\text{cvičení}).$$

# Příklady normálních matic

Unitární a hermitovské matice

- Důležité třídy normálních matic: **unitární** a **hermitovské**.

Věta o unitárních a hermitovských maticích

$A$  je **unitární**  $\Leftrightarrow$  je-li  
**normální** a její vlastní čísla leží na **jednotkové kružnici**.

$A$  je **hermitovská**  $\Leftrightarrow$  je-li  
**normální** a všechna její vlastní čísla jsou **reálná**.

 (cvičení)

- **Třída normálních matic** je třída matic, které lze unitární podobnostní transformací převést na diagonální tvar.
- $A$  nazveme **diagonalizovatelnou**, jestliže existuje regulární matice  $S$  taková, že  $S^{-1}AS = D$ , kde  $D$  je diagonální matice.

# Diagonalizovatelné matice

$$S^{-1}AS = D, \quad S \text{ regulární}$$

tj.

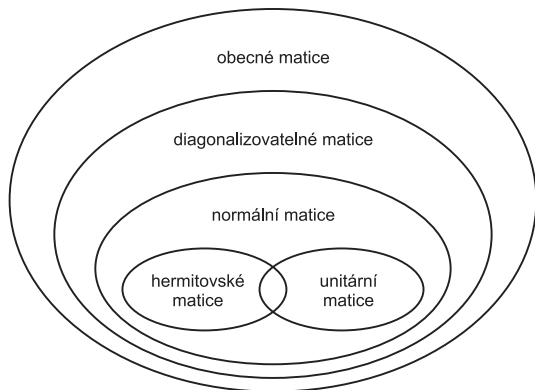
$$AS = SD.$$

- Vlastní vektory rovněž **tvoří bázi** prostoru  $\mathbb{C}^n$ .
- Tato báze **může být špatně podmíněná**.
- Lze každou matici libovolně blízko aproximovat pomocí matice diagonalizovatelé?
- Ano. Množina diagonalizovatelných matic je hustá v  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

# Aproximace libovolné matice pomocí diagonalizovatelné

## Věta o hustotě diagonalizovatelných matic

Pro **libovolnou**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a pro libovolně malé  $\epsilon > 0$  existuje **diagonalizovatelná**  $A_\epsilon \in \mathbb{C}^{n \times n}$  s navzájem různými vlastními čísly tak, že  $\|A - A_\epsilon\| < \epsilon$ .



# Reálný Schurův rozklad

Věta o spektrálním rozkladu pro reálné symetrické matice

Nechť  $A$  je reálná symetrická matice. Potom existují ortogonální matice  $U$  a reálná diagonální matice  $D$  takové, že  $D = U^T A U$ .

- $A$  je reálná symetrická  $\rightarrow$  existuje reálný Schurův rozklad.
- $A$  reálná  $\rightarrow$  Schurův rozklad **obecně komplexní**.
- Snaha přechod do komplexní aritmetiky co nejvíce oddálit. Je-li  $A$  reálná, snažíme se **přiblížit** Schurovu rozkladu a zároveň **zachovat reálné** faktory.

# Reálný Schurův rozklad

**Definice:** Čtvercová matice  $T$  je **horní kvazi-trojúhelníková**, pokud je blokově horní trojúhelníková, kde každý blok na hlavní diagonále je buď  $1 \times 1$  nebo  $2 \times 2$ ,

$$T = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,m} \\ 0 & T_{2,2} & & T_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & T_{m,m} \end{bmatrix}.$$

Reálný Schurův rozklad pro obecné pro reálné matice

Nechť  $A$  je reálná čtvercová matice. Potom existují **ortogonální**  $U$  a **reálná kvazi-trojúhelníková**  $T$  takové, že

$$T = U^T A U.$$

Navíc vlastní čísla každého  $2 \times 2$  diagonálního bloku matice  $T$  tvoří komplexně sdružený pár.

# Funkce matic

pro normální matice

- Jak vhodně zobecnit funkci  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  na funkci, která dané matici  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  přiřadí matici  $f(A)$  stejné dimenze?
- Nechť  $A$  je normální a  $f$  je analytická. Pak je možné definovat funkci matice pomocí Taylorovy řady

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} z^i,$$

kde za proměnnou  $z$  dosadíme matici  $A$ , tj.

$$\begin{aligned} f(A) &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} A^i = U \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} D^i \right) U^* \\ &= U f(D) U^* = U \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} U^*. \end{aligned}$$

# Funkce matic

pro obecné matice

- Lze definovat např. **pomocí Jordanova kanonického tvaru** s  $r$  bloky velikosti  $n_1, \dots, n_r$  jako

$$f(A) \equiv S f(J) S^{-1} = S \operatorname{diag}(f(J_{n_1}(\lambda_1)), \dots, f(J_{n_r}(\lambda_r))) S^{-1}.$$

- Co je to  $f(J_{n_j}(\lambda_j))$ ?
- Pomocí Taylorovy řady rozvinuté v  $\lambda_j$  lze ukázat

$$f(J_{n_j}(\lambda_j)) = \begin{bmatrix} f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & \dots & \frac{f^{(n_j-1)}(\lambda_j)}{(n_j-1)!} \\ & f(\lambda_j) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_j) \\ & & & f(\lambda_j) \end{bmatrix}.$$

# Cvičení

2.4 Necht  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je unitární matice. Dokažte, že pro všechny vektory  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $y \in \mathbb{C}^n$  platí

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \|Ux\| = \|x\|.$$

2.5 Dokažte větu: Čtvercová matice je unitární právě tehdy, když je normální a její vlastní čísla leží na jednotkové kružnici.  
Čtvercová matice je hermitovská právě tehdy, když je normální a všechna její vlastní čísla jsou reálná.

2.6 Dokažte přímo z definice generované maticové normy, že pro matice  $\lambda_i u_i u_i^*$ , platí  $\|\lambda_i u_i u_i^*\| = |\lambda_i|$ . Jak vypadají prvky matice  $u_i u_i^*$  a jaká je její hodnota?

## Cvičení

- 2.7 Ukažte pomocí spektrální věty o normálních maticích aplikované na matici  $A^*A$ , že spektrální normu libovolné matice  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  lze vypočítat pomocí vzorce

$$\|A\| = \varrho(A^*A)^{1/2},$$

kde  $\varrho(B)$  označuje spektrální poloměr matice  $B$ .

- 2.9 Ukažte, že pro unitární matici  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  a libovolnou matici  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  platí

$$\begin{aligned}\|U\| &= 1, & \|U^*\| &= 1, \\ \|UA\| &= \|A\|, & \|AU\| &= \|A\|, \\ \|UA\|_F &= \|A\|_F, & \|AU\|_F &= \|A\|_F.\end{aligned}$$

- 2.10 Dokažte, že pro normální matici  $A$  platí

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2,$$

kde  $\text{sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .