

Interpolace, ortogonální polynomy,
Gaussova kvadratura

Úloha Lagrangeovy interpolace

- **Dán** omezený uzavřený **interval** $[a, b]$ a v něm $n + 1$ různých **bodů** $x_0, x_1, \dots, x_n$.
- Necht f je spojitá funkce definovaná na $[a, b]$. **Hledáme polynom** p **stupně nejvýše** n tak, aby platilo

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

- p se nazývá **Lagrangeův interpolační polynom**, body x_i **uzly interpolace**.
- Pro jednoduchost označme $f_i \equiv f(x_i)$.

Elementární Lagrangeovy polynomy

- Definujme j -tý **elementární** Lagrangeův polynom ℓ_j :

$$\ell_j(x) \equiv \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, \dots, n,$$

- ℓ_j je stupně n a **splňuje** $\ell_j(x_i) = \delta_{i,j}$, tj.

$$\ell_j(x_i) \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j, \\ 0 & \text{pokud } i \neq j, \end{cases}$$

- $\ell_0, \dots, \ell_n$ tvoří **bázi prostoru polynomů** p , $\deg p \leq n$, platí

$$p(x) = \gamma_0 \ell_0(x) + \gamma_1 \ell_1(x) + \dots + \gamma_n \ell_n(x),$$

kde $p(x_i) = \gamma_i$, $i = 0, \dots, n$.

Existence a jednoznačnost Lagrangeovy interpolace

Věta

Existuje právě jeden polynom stupně nejvýše n , který řeší úlohu Lagrangeovy interpolace.



Chyba Lagrangeovy interpolace

- Definujme polynom

$$\omega_{n+1}(x) \equiv \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

- Pokud f **dostatečně hladká** ($n + 1$ spojitých derivací v intervalu $[a, b]$), pak ke každému bodu x z intervalu $[a, b]$ existuje bod ξ_x z otevřeného intervalu (a, b) takový, že platí

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\xi_x).$$

Důkaz pomocí Rollovy věta $\rightarrow$ skriptá Práger.

- Má-li funkce f **omezenou $n + 1$ derivaci** konstantou M , platí

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Úloha Hermitovy interpolace

- Obecnější interpolace $\rightarrow$ kromě funkčních hodnot v uzlech můžeme **předepsat i hodnoty derivací**.
- Mějme v intervalu $[a, b]$ dány body $x_0, x_1, \dots, x_n$. Dále necht jsou dána přirozená čísla $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ a definujme

$$\alpha \equiv \max_{i=0, \dots, n} \alpha_i.$$

Předpoklad, f má v $[a, b]$ spojitě derivace až do řádu $\alpha - 1$.

- Úloha: nalézt polynom h nejnižšího stupně takový, aby platilo

$$h^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, \dots, \alpha_i - 1, \quad i = 0, \dots, n.$$

Tento polynom nazveme **Hermitův interpolační polynom**.

- Pro jednoduchost označme $f_i^{(j)} \equiv f^{(j)}(x_i)$.

Existence a jednoznačnost Hermitovy interpolace

Věta

Existuje právě jeden polynom stupně nejvýše m , který řeší úlohu Hermitovy interpolace,

$$m \equiv \sum_{i=0}^n \alpha_i - 1.$$



Chyba Hermitovy interpolace

- Je-li f **dostatečně hladká** (existuje-li $m + 1$ spojitých derivací v intervalu $[a, b]$), pak ke každému bodu x z intervalu $[a, b]$ existuje bod ξ_x z otevřeného intervalu (a, b) takový, že platí

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \omega_{m+1}(\xi_x),$$

kde $H_m(x)$ je Hermitův interpolační polynom.

- Důkaz viz. např. Práger, skripta.

Důležitý příklad Hermitovy interpolace

$\alpha_i = 2, i = 0, \dots, n$ (předepsána funkční hodnota a hodnota první derivace)

- Hermitův interpolační polynom lze popsat vzorcem

$$H_{2n+1}(x) \equiv \sum_{i=0}^n f_i s_i(x) + \sum_{i=0}^n f'_i t_i(x),$$

hodnoty f_i a f'_i jsou dány a polynomy s_i a t_i definujeme jako

$$\begin{aligned} s_i(x) &\equiv [1 - 2(x - x_i) \ell'_i(x_i)] \ell_i^2(x), \\ t_i(x) &\equiv (x - x_i) \ell_i^2(x). \end{aligned}$$

- H_{2n+1} je stupně nejvýše $m = 2n + 1$.
- Splňuje podmínky? Platí

$$\begin{aligned} s_i(x_j) &= \delta_{i,j}, & t_i(x_j) &= 0, \\ s'_i(x_j) &= 0, & t'_i(x_j) &= \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

pro $i, j = 0, \dots, n$. Dosazení $\rightarrow H_{2n+1}$ vyhovuje podmínkám.

Definice ortogonálních polynomů

- Interval (a, b) , nemusí být omezený.
Nechť $v(x)$ **integrovatelná, skoro všude kladná** funkce.
- V případě nekonečného intervalu $\rightarrow$ předpoklad, že $x^j v(x)$, $j = 1, 2, \dots$ **jsou integrovatelné**. V případě omezeného intervalu je tento požadavek vždy splněn.

Definice

Říkáme, že posloupnost polynomů φ_i , $i = 0, 1, \dots$ **je ortogonální s vahou $v(x)$** , pokud $\deg(\varphi) = i$ a platí-li

$$\int_a^b v \varphi_i \varphi_j \, dx = 0, \quad i \neq j.$$

Skalární součin v prostoru polynomů

- Množina všech **polynomů** tvoří **vektorový prostor**.
Definujme **skalární součin** mezi dvěma vektory (polynomy) p a q vztahem

$$\langle p, q \rangle_v \equiv \int_a^b v p q \, dx.$$

Lze lehce ověřit, že $\langle p, q \rangle_v$ je skutečně skalární součin.

- Chceme ukázat, že pro takto definovaný vektorový prostor se skalárním součinem **existuje ortogonální báze** (posloupnost polynomů φ_i , $i = 0, 1, \dots$), a ukážeme **jak ji sestavit**. 

Všechny kořeny polynomu φ_k jsou reálné a jednoduché

Věta

Všechny **kořeny** polynomu φ_k jsou **reálné, jednoduché** a leží v otevřeném intervalu (a, b) .



Ortogonalní polynomy lze počítat tříčlennou rekurencí

Věta

Monické **ortogonalní polynomy** $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ **lze počítat tříčlennou rekurencí**

$$\varphi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\varphi_k - \beta_k\varphi_{k-1}(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

přičemž

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1 = x - \alpha_1.$$

Koeficienty α_k a β_k jsou dány vztahy

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b v(x) x \varphi_k^2(x) dx}{\int_a^b v(x) \varphi_k^2(x) dx}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$
$$\beta_k = \frac{\int_a^b v(x) \varphi_k^2(x) dx}{\int_a^b v(x) \varphi_{k-1}^2(x) dx} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$



Ortonormální polynomy

- Uvažujme systém **ortonormálních** polynomů, tedy polynomů $\psi_0, \dots, \psi_{n+1}$ s normou jedna,

$$\psi_k(x) \equiv \frac{\varphi_k(x)}{\|\varphi_k(x)\|_v} = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\int_a^b v(x) \varphi_k^2(x) dx}}.$$

- Lze ukázat, že **splňují rekurentní vztahy**

$$\sqrt{\beta_{k+1}} \psi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) \psi_k - \sqrt{\beta_k} \psi_{k-1}(x),$$

$k = 0, 1, \dots, n$, kde

$$\psi_{-1} = 0, \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}, \quad \beta_0 = \int_a^b v(x) dx$$

kde β_k a α_k jsou koeficienty z rekurence pro monické ortogonální polynomy.

Ortogonální polynomy a Jacobiho matice

- Tříčlenné rekurence lze přepsat pomocí tridiagonálních matic. Uvažujme např. ortonormální polynomy, definujme

$$\Phi_k(x) \equiv [\psi_0, \psi_1(x), \dots, \psi_k(x)]^T,$$

$$J_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_n} \\ & & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

- Potom lze tříčlenné rekurence zapsat ve tvaru

$$x\Phi_n(x) = J_{n+1}\Phi_n(x) + \sqrt{\beta_{n+1}}\psi_{n+1}(x)e_n,$$

kde e_n je n -tý sloupec jednotkové matice velikosti n .

- J_{n+1} je Jacobiho maticí.

Ortogonální polynomy a Jacobiho matice

$$x\Phi_n(x) = J_{n+1}\Phi_n(x) + \sqrt{\beta_{n+1}}\psi_{n+1}(x)e_n,$$

- Pro kořen μ polynomu ψ_{n+1} , $\psi_{n+1}(\mu) = 0$, platí

$$\mu\Phi_n(\mu) = J_{n+1}\Phi_n(\mu).$$

- Protože je $\psi_0 \neq 0$, je $\Phi_n(\mu) \neq 0$. $\Phi_n(\mu)$ je tedy **vlastním vektorem** matice J_{n+1} a μ příslušným **vlastním číslem** J_{n+1} .
- **Kořeny ψ_{n+1} jsou jednoduché**, každý kořen je vlastním číslem $J_{n+1} \Rightarrow$ vlastní čísla J_{n+1} jsou právě kořeny ψ_{n+1} (tj. i φ_{n+1}).
- Návod, **jak počítat kořeny** ortogonálních polynomů: jako **vlastní čísla** příslušných **Jacobiho matic**.

Příklady ortogonálních polynomů

- Různé volby váhové funkce $v(x)$, zvykem uvádět pro interval $[-1, 1]$, **transformace na obecný interval $[a, b]$** pomocí lineární transformace

$$x = \frac{2y - b - a}{b - a}, \quad y \in [a, b].$$

$$v(x) = 1 \rightarrow \textbf{Legendrovy polynomy}$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \textbf{Čebyševovy polynomy}$$

$$v(x) = e^{-x} \rightarrow \textbf{Laguerrovy polynomy}$$

- Ortogonální báze prostoru polynomů $\rightarrow$ **aproximace funkcí**.
Například (aproximaci) řešení nějaké úlohy hledáme jako lineární kombinaci ortogonálních polynomů.

Obyčejná kvadratura a algebraická přesnost

- Naším **cílem** je **aproximovat numericky hodnotu integrálu**

$$\int_a^b v(x) f(x) \, dx .$$

$v(x)$ je opět váhová funkce.

- Budeme aproximovat výrazem

$$\sum_{i=0}^n A_i f(a_i) ,$$

který se nazývá **kvadratura formule**. Čísla A_i nazýváme **váhy** a body a_i , ležící v intervalu $[a, b]$, **uzly**.

- Říkáme, že kvadratura vzorec má **algebraickou přesnost** m , integruje-li přesně polynomy až do stupně m .

Gaussova kvadratura

- Snaha dosáhnout co **největší** algebraické přesnosti. Máme $2n + 2$ parametrů ($n + 1$ uzlů a $n + 1$ vah) $\rightarrow$ lze očekávat algebraickou přesnost $2n + 1$.
- Říkáme, že kvadraturní vzorec s $n + 1$ uzly je **Gaussův**, je-li jeho **algebraická přesnost rovna $2n + 1$** .

Věta

Kvadraturní vzorec je Gaussův právě tehdy, když

$$A_i = \int_a^b v(x) \ell_i(x) dx .$$

a

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - a_i)$$

je ortogonální polynom s vahou $v(x)$.



Gaussova kvadratura

Váhy jsou vždy kladné

- $\deg(\ell_j) = n \Rightarrow \deg(\ell_j^2) = 2n \Rightarrow$

$$\int_a^b v(x) \ell_j^2(x) \, dx = \sum_{i=0}^n A_i \ell_j^2(a_i) = A_j.$$

- Odtud je vidět, že všechny **váhy** Gaussova kvadraturního vzorce jsou **kladné**.
- Gaussův kvadraturní vzorec **vrací hodnotu integrálu** z **Hermitovského interpolačního polynomu** funkce f .

Výpočet Gaussovy kvadratury

- **Uzly** Gaussovy kvadratury jsou **kořeny** ortogonálních polynomů. Ortogonální polynomy $\rightarrow$ tříčlenná rekurence, jejich kořeny jsou **vlastní čísla** příslušných **Jacobiho matic**.
- Uvažujme spektrální rozklad Jacobiho matice

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_n} \\ & & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{bmatrix} = U \Lambda U^T,$$

$U = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ je ortonormální a Λ je reálná diagonální.

Jacobiho matice

a uzly a váhy Gaussovy kvadratury

- **Uzly** Gaussovy kvadratury jsou **vlastní čísla** Jacobiho matice.
- **Váhy** jsou dány vztahem

$$A_i = u_{1,i}^2, \quad i = 0, \dots, n,$$

kde $u_{1,i}$ je první složka normovaného vlastního vektoru u_i , viz. např. kniha Gautschi 2004.

- Z **Jacobiho matic** vznikajících při generování ortogonálních polynomů dostaneme **kompletní informaci o uzlech a vahách** Gaussovy kvadratury.