

Kapitola 8

Interpolace, ortogonální polynomy a Gaussova kvadratura

8.1 Interpolace funkcí

Úloha Lagrangeovy interpolace

Nechť je dán omezený uzavřený interval $[a, b]$ a v něm $n + 1$ různých bodů $x_0, x_1, \dots, x_n$. Nechť f je spojitá funkce definovaná na $[a, b]$. Hledáme polynom p stupně nejvýše n tak, aby platilo

$$(8.1) \quad p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Polynom s vlastností (8.1) budeme nazývat *Lagrangeův interpolační polynom*. Body x_i se nazývají *uzly interpolace*. Pro jednoduchost budeme dále označovat hodnotu funkce f v bodě x_i jako f_i , $f_i \equiv f(x_i)$.

Elementární Lagrangeovy polynomy

Polynom ℓ_j

$$\ell_j(x) \equiv \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, \dots, n,$$

budeme nazývat *j-tým elementárním Lagrangeovým polynomem*. Lze lehce ověřit, že polynom ℓ_j nabývá hodnoty 1 v bodě x_j a hodnoty 0 v ostatních bodech x_i , $i \neq j$. Jinak řečeno, platí

$$\ell_j(x_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j, \\ 0 & \text{pokud } i \neq j, \end{cases}$$

kde $\delta_{i,j}$ označuje Kroneckerovo delta. Polynomy $\ell_0, \dots, \ell_n$ nám definují bázi, ve které budeme dále hledat příslušný Lagrangeův interpolační polynom. Povšiměme si, že lineární kombinací elementárních Lagrangeových polynomů získáme polynom p ,

$$p(x) = \gamma_0 \ell_0(x) + \gamma_1 \ell_1(x) + \dots + \gamma_n \ell_n(x)$$

s vlastností $p(x_i) = \gamma_i$, $i = 0, \dots, n$, kde γ_i jsou koeficienty lineární kombinace.

Existence a jednoznačnost Lagrangeovy interpolace

Dokážeme, že *existuje právě jeden* polynom stupně nejvýše n který řeší úlohu Lagrangeovy interpolace. Ukažme nejdříve *existenci*. Definujme polynom

$$L_n(x) \equiv f_0 \ell_0(x) + f_1 \ell_1(x) + \dots + f_n \ell_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j \ell_j(x).$$

Lehce ověříme, že $L_n(x_i) = f_i$, tj. L_n splňuje podmínku (8.1). Zároveň je L_n stupně nejvýše n .

Ukažme nyní *jednoznačnost*. Nechtě $L_n(x)$ a $\tilde{L}_n(x)$ jsou dva *různé* interpolační polynomy splňující podmínku (8.1), tj.

$$L_n(x_i) = \tilde{L}_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Definujme polynom $p(x) \equiv L_n(x) - \tilde{L}_n(x)$. Tento polynom je nenulový, je stupně nejvýše n a splňuje podmínku $p(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$, tj. má $n+1$ navzájem různých kořenů. Nenulový polynom stupně n však může mít nejvýše n různých kořenů. Dostáváme spor.

Chyba Lagrangeovy interpolace

Pokud je funkce f dostatečně hladká (existuje-li $n+1$ spojitých derivací v intervalu $[a, b]$), pak ke každému bodu x z intervalu $[a, b]$ existuje bod ξ_x z otevřeného intervalu (a, b) takový, že platí

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x).$$

K důkazu tohoto tvrzení se využívá Rollova věta. Tvrzení uvádíme bez důkazu, který lze nalézt např. ve skriptech Prof. Prágera [2, s. 57]. Má-li funkce f omezenou $n+1$ derivaci konstantou M , potom platí

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Úloha Hermitovy interpolace

Nyní probereme poněkud obecnější interpolaci. Kromě funkčních hodnot v uzlech interpolace můžeme předepsat i hodnoty derivací. Mějme v intervalu $[a, b]$ dány body $x_0, x_1, \dots, x_n$. Dále nechtě jsou dána přirozená čísla $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ a definujme

$$\alpha \equiv \max_{i=0, \dots, n} \alpha_i.$$

Předpokládejme, že funkce f má v intervalu $[a, b]$ spojitě derivace až do řádu $\alpha - 1$. Naší úlohou je nalézt polynom h nejnižšího stupně takový, aby platilo

$$(8.2) \quad h^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, \dots, \alpha_i - 1, \quad i = 0, \dots, n.$$

Polynom s vlastností (8.2) budeme nazývat *Hermitův interpolační polynom*. Hodnotu j -té derivace funkce f v bodě x_i jako budeme zkráceně zapisovat jako $f_i^{(j)}$, $f_i^{(j)} \equiv f^{(j)}(x_i)$.

Existence a jednoznačnost Hermitovy interpolace

Ukážeme, že *existuje právě jeden* polynom stupně nejvýše m , který řeší úlohu (8.2), kde

$$m \equiv \sum_{i=0}^n \alpha_i - 1.$$

Předpokládejme polynom H_m ve tvaru

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

a napišme si podmínky, které má splňovat,

$$\sum_{k=0}^m a_k (x_i^k)^{(j)} = f_i^{(j)}, \quad j = 0, \dots, \alpha_i - 1, \quad i = 0, \dots, n.$$

Neznámé hodnoty v této soustavě lineárních rovnic jsou a_k a matice má prvky $(x_i^k)^{(j)}$ (to jsou známá čísla). Kdyby byl determinant této soustavy roven nule, potom by existovalo netriviální řešení homogenní soustavy. Jinak řečeno, existoval by netriviální polynom p stupně nejvýše m , který by splňoval podmínku

$$(8.3) \quad p^{(j)}(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, \alpha_i - 1.$$

Polynom p splňující tuto podmínku má $n + 1$ různých kořenů $x_0, \dots, x_n$ a každý z těchto kořenů má násobnost α_i (to plyne z podmínky (8.3)). Dohromady má tedy polynom p

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = m + 1$$

kořenů. To je však spor z tím, že p je nenulový polynom stupně nejvýše m .

Jelikož je determinant matice soustavy pro výpočet koeficientů a_k nenulový, existuje právě jedno řešení, tedy právě jeden Hermitův interpolační polynom stupně nejvýše m .

Chyba Hermitovy interpolace

Pokud je funkce f dostatečně hladká (existuje-li $m + 1$ spojitých derivací v intervalu $[a, b]$), pak ke každému bodu x z intervalu $[a, b]$ existuje bod ξ_x z otevřeného intervalu (a, b) takový, že platí

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \omega_{m+1}(\xi_x),$$

kde $H_m(x)$ je Hermitův interpolační polynom splňující podmínky (8.2). Tvrzení opět uvádíme bez důkazu, viz. např. [2, s. 60].

Příklad Hermitovy interpolace

Důležitým speciálním případem Hermitovy interpolace je případ, kdy $\alpha_i = 2$, $i = 0, \dots, n$. V každém bodě je tedy předepsána funkční hodnota a hodnota první derivace. V tomto speciálním případě lze popsat Hermitův interpolační polynom vzorcem

$$(8.4) \quad H_{2n+1}(x) \equiv \sum_{i=0}^n f_i s_i(x) + \sum_{i=0}^n f'_i t_i(x),$$

kde hodnoty f_i a f'_i jsou dány a polynomy s_i a t_i jsou definovány jako

$$s_i(x) \equiv [1 - 2(x - x_i) \ell'_i(x_i)] \ell_i^2(x), \quad t_i(x) \equiv (x - x_i) \ell_i^2(x),$$

ℓ_i jsou elementární Lagrangeovy interpolační polynomy.

Polynom H_{2n+1} definovaný vztahem (8.4) je stupně nejvýše $m = 2n + 1$. Stačí tedy ověřit, že splňuje podmínky (8.2). Dosazením zjistíme, že $s_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $t_i(x_j) = 0$, $s'_i(x_j) = 0$ a $t'_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pro $i, j = 0, \dots, n$. Z těchto vztahů již plyne, že polynom H_{2n+1} vyhovuje podmínkám (8.2).

8.2 Ortogonální polynomy

Seznámíme se stručně s ortogonálními polynomy a jejich základními vlastnostmi.

Definice ortogonálních polynomů

Mějme interval $[a, b]$, na němž provedeme konstrukci ortogonálních polynomů. Nepředpokládáme, že je omezený. Necht' $v(x)$ integrovatelná, skoro všude kladná funkce, která je navíc taková, že v případě nekonečného intervalu jsou všechny součiny $x^p v(x)$, $p = 1, 2, \dots$ integrovatelné. V případě omezeného intervalu je poslední požadavek vždy splněn.

Definice. Říkáme, že posloupnost polynomů φ_i , $i = 0, 1, \dots$ je ortogonální s vahou $v(x)$, jestliže je stupeň polynomu φ roven i , tj. $\deg(\varphi) = i$ a platí-li

$$\int_a^b v \varphi_i \varphi_j dx = 0, \quad i \neq j.$$

Z lineární algebry víme, že množina všech polynomů tvoří vektorový prostor (polynomy zde hrají roli vektorů). Ve výše popsané definici definujeme na vektorovém prostoru polynomů skalární součin mezi dvěma vektory (polynomy) p a q vztahem

$$(8.5) \quad \langle p, q \rangle_v \equiv \int_a^b v p q dx.$$

Lze lehce ověřit, že $\langle p, q \rangle_v$ je skutečně skalární součin. Nyní nám jde o to ukázat, že pro takto definovaný vektorový prostor se skalárním součinem existuje ortogonální báze (posloupnost polynomů

$\varphi_i, i = 0, 1, \dots$).

Posloupnost ortogonálních polynomů existuje

Důkaz provedeme indukcí tak, že budeme ortogonalizovat posloupnost mocnin. Množina polynomů obsahující jediný polynom φ_0 , rovný nenulové konstantní funkci, tvoří ortogonální systém, tj. splňuje podmínky definice. Dále předpokládejme, že polynomy $\varphi_0, \dots, \varphi_k$ tvoří ortogonální systém. Zkonstruuujeme φ_{k+1} tak, aby i množina $\varphi_0, \dots, \varphi_{k+1}$ tvořila ortogonální systém. Předpokládejme φ_{k+1} ve tvaru

$$(8.6) \quad \varphi_{k+1} = \sum_{i=0}^k c_i \varphi_i + c_{k+1} x^{k+1}.$$

Požadavek ortogonality dává podmínky

$$\langle \varphi_j, \sum_{i=0}^k c_i \varphi_i + c_{k+1} x^{k+1} \rangle_v = 0, \quad j = 0, \dots, k.$$

Pomocí indukčního předpokladu dostaneme

$$c_j \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle_v + c_{k+1} \langle \varphi_j, x^{k+1} \rangle_v = 0 \quad j = 0, \dots, k$$

a tedy

$$c_j = -\frac{\langle \varphi_j, x^{k+1} \rangle_v}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle_v} c_{k+1} = -\frac{\int_a^b v x^{k+1} \varphi_j dx}{\int_a^b v \varphi_j^2 dx} c_{k+1}.$$

Za koeficient c_{k+1} vezmeme libovolnou nenulovou konstantu. □

Polynom φ_{k+1} je tedy určen až na násobnou konstantu c_{k+1} . Tuto konstantu určíme z požadavku normalizace. Pro jednoduchost v dalším provedeme tuto normalizaci tak, že položíme $c_{k+1} = 1$, tj. koeficient u nejvyšší mocniny polynomu bude roven jedné.

Z (8.6) vidíme, že naopak každá mocnina se dá vyjádřit jako lineární kombinace prvků posloupnosti polynomů ortogonálních s vahou $v(x)$. A totéž proto platí pro polynom. Dvě nejdůležitější vlastnosti ortogonálních polynomů jsou obsahem dalších vět.

Všechny kořeny polynomu φ_k jsou reálné a jednoduché

Věta 1. *Všechny kořeny polynomu φ_k jsou reálné, jednoduché a leží v otevřeném intervalu (a, b) .*

Důkaz. Označme $x_1, \dots, x_r$ ty různé kořeny polynomu φ_k , které leží v intervalu (a, b) a mají lichou násobnost. Pokud žádný takový kořen neexistuje, položíme $r = 0$. Protože φ_k může mít nejvýše k různých kořenů, je $r \leq k$. Definujme dále polynom p stupně r ,

$$p(x) \equiv (x - x_1) \dots (x - x_r)$$

(pro $r = 0$ položíme $p \equiv 1$) a uvažujme integrál

$$\int_a^b v(x) \varphi_k(x) p(x) dx = \langle \varphi_k, p \rangle_v.$$

Předpokládejme nejdříve, že $r < k$. Jelikož je p stupně $r < k$, musí být integrál nulový, protože φ_k je ortogonální ke všem polynomům stupně menšího než k (tj. $\langle \varphi_k, p \rangle_v = 0$). Nyní je důležité si uvědomit, že všechny kořeny polynomu $\varphi_k p$ mají sudou násobnost. Polynom $\varphi_k p$ tedy nemění v intervalu (a, b) znaménko a navíc je skoro všude nenulový. Integrovaná funkce $v \varphi_k p$ je tedy také v intervalu (a, b) skoro všude nenulová, nemění znaménko a tudíž je výsledný intergrál nenulový. Dostáváme spor s předpokladem $r < k$.

Musí tedy platit $r = k$, tj. φ_k má v reálném intervalu (a, b) k různých kořenů. Protože je zároveň φ_k stupně k , má právě k kořenů, a tudíž všechny jeho kořeny jsou jednoduché a leží v otevřeném intervalu (a, b) (tj. jsou reálné). $\square$

Ortogonalní polynomy lze počítat tříčlennou rekurencí

Uvažujme zatím monické ortogonální polynomy (koeficient u nejvyšší mocniny je roven jedné).

Věta 2. *Monické ortogonální polynomy $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ lze počítat tříčlennou rekurencí*

$$(8.7) \quad \varphi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\varphi_k - \beta_k\varphi_{k-1}(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

přičemž

$$(8.8) \quad \varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1 = x - \alpha_1.$$

Koeficienty α_k a β_k jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\int_a^b v(x) x \varphi_k^2(x) dx}{\int_a^b v(x) \varphi_k^2(x) dx}, & k = 0, 1, \dots, n, \\ \beta_k &= \frac{\int_a^b v(x) \varphi_k^2(x) dx}{\int_a^b v(x) \varphi_{k-1}^2(x) dx} & k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Důkaz. Uvažujme polynom $x\varphi_k$. To je polynom stupně $k+1$ a lze jej proto vyjádřit jako lineární kombinaci

$$(8.9) \quad x\varphi_k = c_{k+1}\varphi_{k+1} + c_k\varphi_k + \dots + c_1\varphi_1 + c_0\varphi_0.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost polynomem φ_j , kde $j = 0, 1, \dots, k-2$, vahou $v(x)$ a zintegrujeme od a do b , dostaneme

$$(8.10) \quad \langle \varphi_k, x\varphi_j \rangle_v = c_{k+1}\langle \varphi_{k+1}, \varphi_j \rangle_v + c_k\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_v + \dots + c_1\langle \varphi_1, \varphi_j \rangle_v + c_0\langle \varphi_0, \varphi_j \rangle_v.$$

Na levé straně dostáváme nulu, protože použijeme ortogonalitu polynomu φ_k k polynomu $x\varphi_j$, který je, vzhledem k volbě j , nižšího stupně. Vpravo, rovněž s využitím ortogonalit, dostaneme jen člen $c_j\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle_v$. Odtud plyne, že koeficient c_j je roven nule pro $j = 0, 1, \dots, k-2$. V rovnosti (8.10) jsou tedy jen tři nenulové koeficienty, c_{k+1} , c_k , c_{k-1} . Úpravou vzorce a použitím označení α_k a β_k dostaneme tvrzení věty. Koeficient c_{k+1} je ovšem roven jedné. Vyjádření pro koeficienty α_k a β_k lze potom snadno nalézt. Ponecháme na čtenáři, aby se o tom s použitím (8.10) přesvědčil. $\square$

Ortogonalní polynomy a Jacobiho matice

Uvažujme nyní systém *ortonormálních* polynomů, tedy polynomů $\psi_0, \dots, \psi_{n+1}$ s normou jedna,

$$\psi_k(x) \equiv \frac{\varphi_k(x)}{\|\varphi_k(x)\|_v} = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\int_a^b v(x) \varphi_k^2(x) dx}}.$$

Lze ukázat, že tyto polynomy splňují následující rekurentní vztahy

$$(8.11) \quad \sqrt{\beta_{k+1}} \psi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) \psi_k - \sqrt{\beta_k} \psi_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

kde

$$\psi_{-1} = 0, \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}, \quad \beta_0 = \int_a^b v(x) dx$$

a koeficienty β_k a α_k jsou tytéž jako v rekurenci pro monické ortogonální polynomy. Definujme vektor

$$\Phi_k(x) \equiv [\psi_0, \psi_1(x), \dots, \psi_k(x)]^T.$$

Potom lze tříčlenné rekurence (8.9) zapsat ve tvaru

$$x\Phi_n(x) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_n} \\ & & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{bmatrix} \Phi_n(x) + \sqrt{\beta_{n+1}} \psi_{n+1}(x) e_n,$$

kde e_n je n -tý sloupec jednotkové matice velikosti n . Výše uvedenou matici označíme pomocí J_{n+1} a budeme ji nazývat Jacobiho maticí. Nechť nyní μ je kořenem ortogonálního polynomu ψ_{n+1} , tj. $\psi_{n+1}(\mu) = 0$. Potom platí

$$\mu \Phi_n(\mu) = J_{n+1} \Phi_n(\mu).$$

Protože je $\psi_0 \neq 0$, je $\Phi_n(\mu) \neq \mathbf{0}$. $\Phi_n(\mu)$ je tedy vlastním vektorem matice J_{n+1} a μ příslušným vlastním číslem J_{n+1} . Protože navíc víme, že kořeny ortogonálního polynomu ψ_{n+1} jsou jednoduché a každý kořen je vlastním číslem J_{n+1} , jsou vlastní čísla Jacobiho matice J_{n+1} právě kořeny ortogonálního polynomu ψ_{n+1} , tedy i polynomu φ_{n+1} . Předchozí vztah nám dává návod, jak počítat kořeny ortogonálních polynomů: jako vlastní čísla příslušných Jacobiho matic.

Příklady ortogonálních polynomů

Speciální volbou váhové funkce dostaneme konkrétní typy ortogonálních polynomů. Ortogonální polynomy definované na omezeném intervalu je zvykem uvádět pro interval $\langle -1, 1 \rangle$. Na jiný interval se snadno transformují lineární transformací. Uvádíme je s normalizací obvyklou v literatuře, odlišnou od požadavku $c_n = 1$.

Legendrovy polynomy jsou ortogonální polynomy s váhovou funkcí $v(x) = 1$, platí

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x).$$

Čebyševovy polynomy 1. druhu jsou ortogonální polynomy s váhovou funkcí $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Čebyševovy polynomy 2. druhu jsou ortogonální polynomy s váhovou funkcí $v(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) = 2x U_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Laguerrovy polynomy jsou ortogonální polynomy na intervalu $[0, \infty)$ s váhovou funkcí $v(x) = e^{-x}$. Platí

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_{n+1}(x) = \frac{2n+1-x}{n+1} L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x).$$

Ortogonální polynomy se používají pro aproximaci funkcí. Je to aproximace analogická aproximaci pomocí trigonometrických polynomů (Fourierových řad). Připomínáme, že je to však jiný typ aproximace než je interpolace.

8.3 Gaussova kvadratura

Nyní se budeme věnovat numerickému výpočtu integrálů. Zavedeme důležitý způsob výpočtu, tzv. *Gaussovu kvadraturu*, při jejíž analýze použijeme vlastností ortogonálních polynomů.

Obečná kvadrurní formule a algebraická přesnost

Naším cílem je vypočítat numericky hodnotu integrálu

$$\int_a^b v(x) f(x) dx.$$

$v(x)$ je opět váhová funkce, která je integrovatelná a kladná skoro všude. Přítomnost takové váhy nám umožní v některých případech provést výpočet efektivněji. Uvedený integrál se budeme snažit aproximovat výrazem tvaru

$$\sum_{i=0}^n A_i f(a_i),$$

který se nazývá *kvadrurní formule*. Čísla A_i nazýváme *váhy* kvadrurního vzorce a body a_i , ležící v intervalu $\langle a, b \rangle$, jeho *uzly*.

Abychom mohli mluvit o přesnosti kvadrurního vzorce zavedeme následující pojem. Říkáme, že kvadrurní vzorec má *algebraickou přesnost* m , integruje-li přesně polynomy až do stupně m .

Gaussova kvadratura

Snahou Gaussovy kvadratury je dosáhnout, co největší algebraické přesnosti. Protože kvadrurní vzorec s $n+1$ uzly má $2n+2$ parametrů ($n+1$ uzlů a_i a $n+1$ vah A_i) očekáváme, že v

nejlepším případě dosáhneme algebraické přesnosti $2n+1$, protože polynom stupně $2n+1$ má právě $2n+2$ koeficientů. Říkáme, že *kvadrurní vzorec s $n+1$ uzly je Gaussův*, je-li jeho algebraická přesnost rovna $2n+1$. Následující věta ukazuje souvislost Gaussovy kvadratury s ortogonálními polynomy a umožní nám odpovědět na otázku existence Gaussových kvadrurních vzorců.

Věta 3. *Kvadrurní vzorec je Gaussův právě tehdy, když součin kořenových činitelů*

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - a_i)$$

je ortogonální polynom s vahou $v(x)$ a když pro váhy kvadrurního vzorce platí

$$A_i = \int_a^b v(x) \ell_i(x) dx,$$

kde ℓ_i jsou elementární Lagrangeovy interpolační polynomy.

Důkaz. Bud' p libovolný polynom stupně nejvýše $2n+1$. Sestrojíme pomocí Lagrangeovy interpolace polynom p^* stupně nejvýše n , který interpoluje polynom p , platí

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^n p(a_j) \ell_j(x).$$

Rozdíl polynomů p a p^* má nulové body ve všech uzlech (platí $p(a_j) = p^*(a_j)$) proto můžeme psát

$$(8.12) \quad p(x) - p^*(x) = \omega(x) q(x),$$

kde q je nějaký polynom stupně nejvýše $n-1$.

Ukažme nyní ekvivalenci. Nejdříve předpokládejme, že daný kvadrurní vzorec je Gaussův. Pak pro libovolný polynom p , stupně nejvýše $2n+1$, platí

$$\int_a^b v(x) p(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j p(a_j).$$

Využijeme-li vyjádření (8.12), dostaneme

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^n A_j p(a_j) &= \int_a^b v(x) [p^*(x) + \omega(x)q(x)] dx \\ &= \int_a^b \left[v(x) \sum_{j=0}^n A_j p(a_j) \ell_j(x) + v(x) \omega(x) q(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Polynom p můžeme volit libovolně. Zvolme jej tedy tak, že $p(a_i) = 0$ pro všechna i a q je libovolný polynom stupně nejvýše $n-1$. Pak dostáváme z (8.13) podmínku ortogonalit,

$$(8.14) \quad 0 = \int_a^b v(x) \omega(x) q(x) dx.$$

Protože q je libovolný polynom stupně nejvýše $n - 1$, musí být $\omega(x)$ ortogonální polynom ($\omega(x)$ je kolmý ke všem polynomům nižšího stupně). Dosadíme-li do (8.13) postupně za integrovaný polynom p polynomy $\ell_j(x)$, dostaneme vyjádření vah A_i .

Naopak, nechť platí podmínka ortogonalit a vzorec pro váhy A_i . Nechť p je libovolný polynom stupně nejvýše $2n + 1$. Pomocí vyjádření (8.12) a tvaru polynomu $p^*(x)$ snadno zjistíme, že platí

$$\int_a^b v(x)p(x)dx = \sum_{j=0}^n A_j p(a_j)$$

□

Protože víme, že při libovolné nezáporné váze má ortogonální polynom libovolného stupně n v intervalu (a, b) n různých kořenů, lze je zvolit za uzly Gaussovy kvadratury a tím je její existence pro libovolné n dokázána. Zároveň je vidět, že uzly i váhy jsou určeny jednoznačně.

Všimněme si ještě, že elementární Lagrangeův interpolační polynom ℓ_j je stupně n , čtverec ℓ_j^2 je stupně $2n$ a musí tedy být Gaussovým kvadraturem vzorcem s $n + 1$ uzly integrován přesně. Dostaneme

$$\int_a^b v(x) \ell_j^2(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i \ell_j^2(a_i) = A_j.$$

Odtud je vidět, že všechny váhy Gaussova kvadraturem vzorce jsou kladné. Gaussův kvadraturem vzorec lze také chápat tak, že místo dané funkce integrujeme přesně její Hermitovský interpolační polynom (8.4).

Výpočet Gaussovy kvadratury

V předchozím jsem si ukázali blízký vztah mezi Gaussovou kvadraturou a ortogonálními polynomy. Z odstavce o ortogonálních polynomech víme, jak počítat jejich kořeny: jako vlastní čísla Jacobiho matic, které sestavíme z koeficientů tříčlenné rekurence, kterou ortogonální polynomy počítáme.

Mějme tedy Jacobiho matici a uvažujme její spektrální rozklad

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_n} \\ & & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{bmatrix} = U \Lambda U^T,$$

kde $U = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ je ortogonální matice s normovanými vlastními vektory u_i a Λ je reálná, diagonální. Potom platí, že uzly Gaussovy kvadratury jsou vlastní čísla Jacobiho matice a váhy Gaussova kvadraturem vzorce jsou dány vztahem

$$A_i = \beta_0 u_{1,i}^2, \quad i = 0, \dots, n,$$

kde $u_{1,i}$ je první složka normovaného vlastního vektoru u_i , viz. např. [1]. Jinak řečeno, z Jacobiho matic vznikajících při generování ortogonálních polynomů dostaneme kompletní informaci o uzlech a vahách Gaussovy kvadratury.

Literatura

- [1] W. GAUTSCHI, *Orthogonal polynomials: computation and approximation*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, 2004. Oxford Science Publications.
- [2] M. PRÁGER, *Numerická analýza*, Skripta, Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, (1995).