Aproximace ve výpočtové matematice

Příklad:

> Pokud pro výpočet povrchu Země použijeme vzorec $S = 4\pi r^2$, kde r je poloměr Země, použili jsme několik aproximací:
>
> - povrch Země není přesně sféra
> - hodnota poloměru je vypočtená
> - π má nekonečný rozvoj
> - při výpočtu jsou data i výsledky operací zaokrouhlovány

Datová a výpočtová chyba

Typický problém: Určit hodnotu funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v daném bodě x.

přesný vstup: x přesný výstup: $f(x)$
nepřesný vstup: $\widehat{x}$ nepřesný výstup: $\widehat{f}(\widehat{x})$

Celková chyba: $$\widehat{f}(\widehat{x}) - f(x) = \underbrace{(\widehat{f}(\widehat{x}) - f(\widehat{x}))}_{\text{výpočtová chyba}} + \underbrace{(f(\widehat{x}) - f(x))}_{\text{datová chyba}}$$

Příklad:

> Přibližně vyčíslete hodnotu $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

přesný vstup: $x = \dfrac{\pi}{8} \doteq 0,39270$ přesný výstup: $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{8} \doteq 0,38268$

nepřesný vstup: $\widehat{x} = \dfrac{3,14}{8} = 0,39250$ nepřesný výstup: $\sin\dfrac{3,14}{8} \doteq 0,38250 = \widehat{f}(\widehat{x})$

Celková chyba: $$0,38250 - 0,38268 = \underbrace{(0,38250 - \sin\frac{3,14}{8})}_{\text{výpočtová chyba}} + \underbrace{(\sin\frac{3,14}{8} - \sin\frac{\pi}{8})}_{\text{datová chyba}}$$

Výpočtová chyba: Chyba vyčíslení funkční hodnoty pro pevný argument

Datová chyba: Rozdíl funkčních hodnot přesného a přibližného vstupu

Výpočtová chyba má 2 složky

- chyba metody (aproximace)
- zaokrouhlovací chyba

Absolutní a relativní chyba

x ... teoretická (přesná) hodnota

$\widehat{x}$ ... aproximace

Absolutní chyba: $\varepsilon = \widehat{x} - x \quad \Rightarrow \quad \widehat{x} = x + \varepsilon$

$\varepsilon = |\widehat{x} - x|$

Relativní chyba $(x \neq 0)$: $\delta = \dfrac{|(\widehat{x} - x)|}{|x|} = \dfrac{\text{absolutní chyba}}{\text{přesná hodnota}}$

Př.:

$|3,1418 - 3,1415| = 0,0003$ $\qquad \dfrac{0,0003}{3,1415} \doteq 0,0001$

$|31418 - 31415| = 3$ $\qquad \dfrac{3}{31415} \doteq 0,0001$

(Absolutní chyby) (Relativní chyby)

Platí: $\delta = \dfrac{\widehat{x} - x}{x} \quad \Rightarrow \quad \widehat{x} = x(1 + \delta)$

Poznámka: V praxi potřebujeme odhadnout chybu

estimate $|chyba| \approx \ldots$

bound $|chyba| \leq \ldots$

Příklad: Výpočet hodnoty funkce kosinus pro argument blízký $\dfrac{\pi}{2}$.

$x \approx \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad h > 0$ ... malá perturbace (chyba)

absolutní chyba:

$$\cos(x+h) - \cos(x) = -2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2} \approx -2\sin x \cdot \frac{h}{2} = -h \cdot \sin x \approx -h$$

relativní chyba:

$$\left|\frac{\cos(x+h) - \cos x}{\cos x}\right| \approx \left|\frac{-h\sin x}{\cos x}\right| = |-h\tan x| \approx \infty$$

$\Rightarrow$ malá změna x na vstupu vyvolá velkou relativní změnu na výstupu a to nezávisle na použité metodě výpočtu.

```
Vypocet hodnoty funkce f(x)=cos(x) pro hodnotu argumentu
x blizkou pi/2. Uvazujeme, ze se ve vyjadreni x dopoustime
male chyby (perturbace) h>0.

Zadej hodnotu argumentu x (blizke pi/2) = 1.57078
Zadej hodnotu male zmeny (perturbace) h = 0.00001
----------------------------------------------------------

Absolutni chyba (na vystupu)
  cos(x+h) = 0.00000633
  cos(x) = 0.00001633
  cos(x+h) - cos(x) = -0.00001000

Absolutni chyba (na vstupu)
 (x+h) - x = h = 0.00001000

----------------------------------------------------------

Relativni chyba (na vystupu)
  ( cos(x+h) - cos(x) ) / cos(x) = -0.612490

Relativni chyba (na vstupu)
 ( (x+h) - x ) / x  = 0.00000637

----------------------------------------------------------

Pomer Absolutni chyby na vystupu / Absolutni chyby na vstupu
       je 1.00000000

Pomer Relativni chyby na vystupu / Relativni chyby na vstupu
       je 96208.717628

Pozn.:  Posledni pomer nazyvame cislo podminenosti.
```

$$\textbf{číslo podmíněnosti} = \frac{|\text{relativní chyba na výstupu}|}{|\text{relativní chyba na vstupu}|} = \frac{0,61249}{0,637 \cdot 10^{-5}} \doteq \mathbf{0,96 \cdot 10^5}$$

Předchozí problém byl špatně podmíněný, neboť číslo podmíněnosti bylo $\gg 1$, tj. malá relativní změna vstupních dat způsobila velkou relativní změnu výstupních dat.

Podmíněnost úlohy řešit SLAR

Uvažujeme soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ ... $n \times n$ regulární, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Označení:

$\Delta\mathbf{A}$ ... malá změna matice $\mathbf{A}$

$\Delta\mathbf{b}$ ... malá změna vektoru $\mathbf{b}$

$\Delta\mathbf{x}$ ... odpovídající změna vektoru neznámých

$\mathbf{x}^*$ ... přesné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Platí:

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

Uvažujme situaci $\underline{\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}}$, tj. $\mathbf{A}$ je zadána přesně

Otázka: Jakou změnu řešení vyvolá změna pravé strany?

$$\underline{\mathbf{A}\mathbf{x}^*} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \underline{\mathbf{b}} + \Delta\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

Z vlastností maticové normy plyne:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \|\mathbf{b}\| \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}^*\| \;\Rightarrow\; \frac{1}{\|\mathbf{x}^*\|} \le \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \|\Delta\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{b}\|$$

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \le \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$C_p = \frac{\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^*\|}}{\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}} \le \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

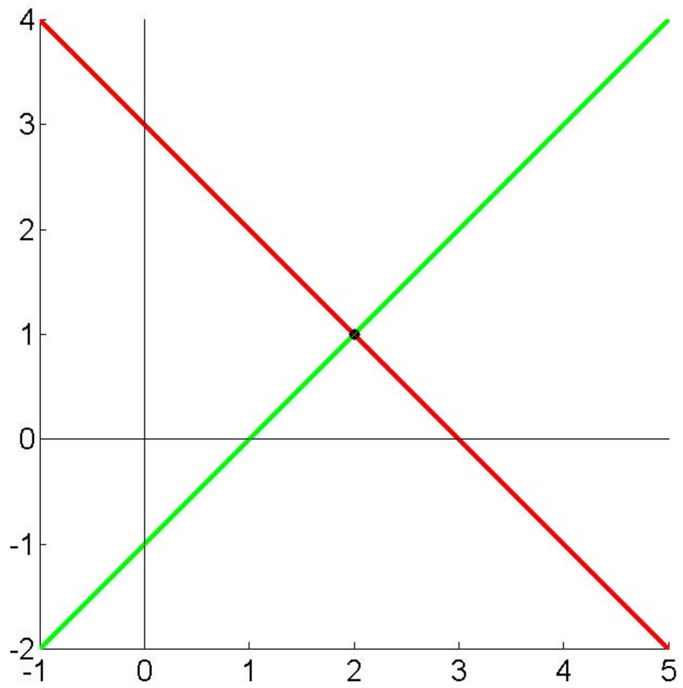
Případ, kdy $\underline{\Delta\mathbf{b} = \mathbf{0}}$, tj. $\mathbf{b}$ je zadána přesně, i obecný případ $\Delta\mathbf{b} \ne \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{A} \ne \mathbf{0}$ vede na stejné vyjádření čísla podmíněnosti.

Poznámka: Pro symetrické matice je číslo podmíněnosti podíl největší a nejmenší absolutní hodnoty vlastního čísla (pro symetrické matice platí, že mají reálná vlastní čísla).

$$C_p = \underbrace{\|\mathbf{A}^{-1}\|}_{\frac{1}{\lambda_{min}}} \cdot \underbrace{\|\mathbf{A}\|}_{\lambda_{max}} = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$

Geometrická interpretace - dobře podmíněná úloha
(malá relativní změna vstupních dat vyvolá malou relativní změnu výstupních dat)

$$\boxed{\begin{aligned} x+y&=3 \\ x-y&=1 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} {\color{red} y = 3-x} \\ {\color{green} y = x-1} \end{aligned}\right\} \text{ řešení } \begin{aligned} x^* &= 2 \\ y^* &= 1 \end{aligned}$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

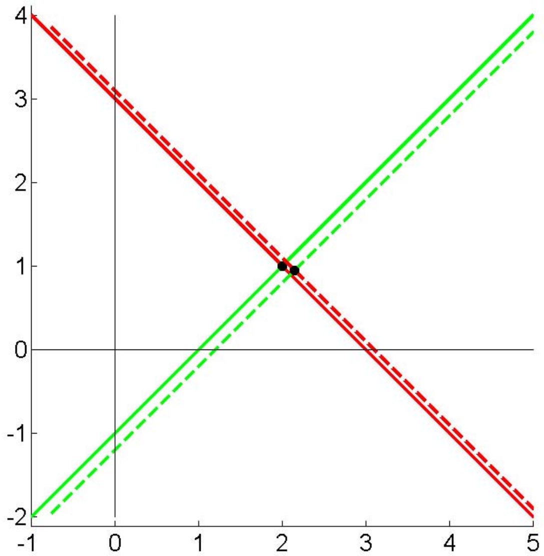
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} = 0,5\,\mathbf{A}$$

$$C_p = 1 \cdot 2 = 2 \text{ (řádková, sloupcová norma);} \quad C_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1 \text{ (spektrální norma)}$$

$$\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \|\mathbf{A}\|_{SP} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_{SP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

1. <u>změna pravé strany</u> (změna matice $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$)

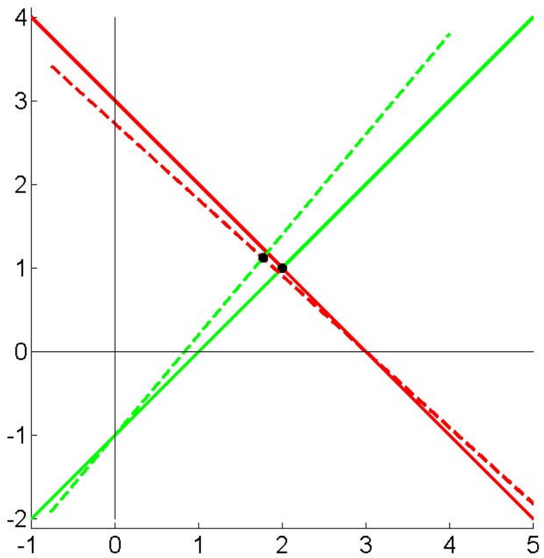
$$\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3,1 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$



změněná soustava $y = 3,1 - x$; $y = x - 1,2$

2. <u>změna matice soustavy</u> (změna pravé strany $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{0}$)

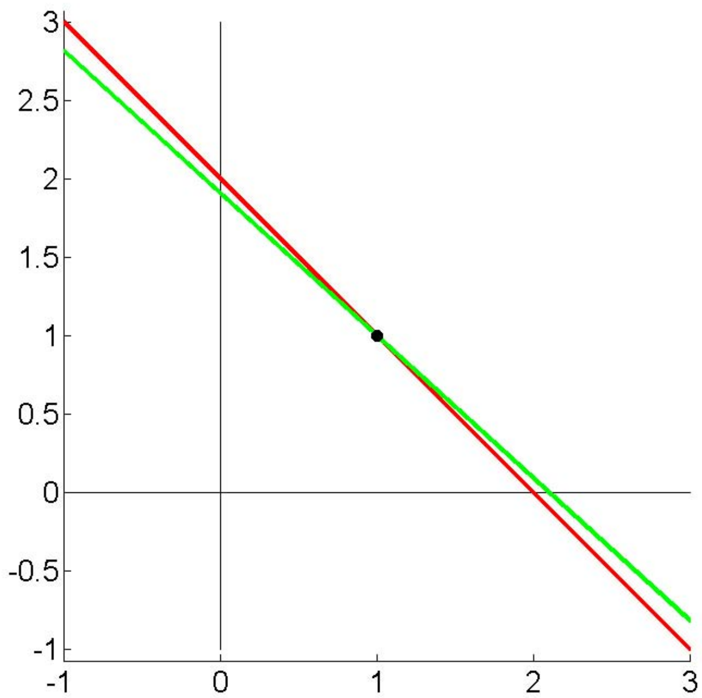
$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1,1 \\ 1,2 & -1 \end{bmatrix}$$



změněná soustava $y = \dfrac{1}{1,1}(3 - x)$; $y = 1,2\,x - 1$

Geometrická interpretace - špatně podmíněná úloha
(malá relativní změna vstupních dat vyvolá velkou relativní změnu výstupních dat)

$$\boxed{\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 1,1\,y &= 2,1 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} y &= 2 - x \\ y &= \frac{1}{1,1}(2,1 - x) \end{aligned}\right\} \quad \text{řešení} \quad \begin{aligned} x^* &= 1 \\ y^* &= 1 \end{aligned}$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,1 \end{bmatrix}$$

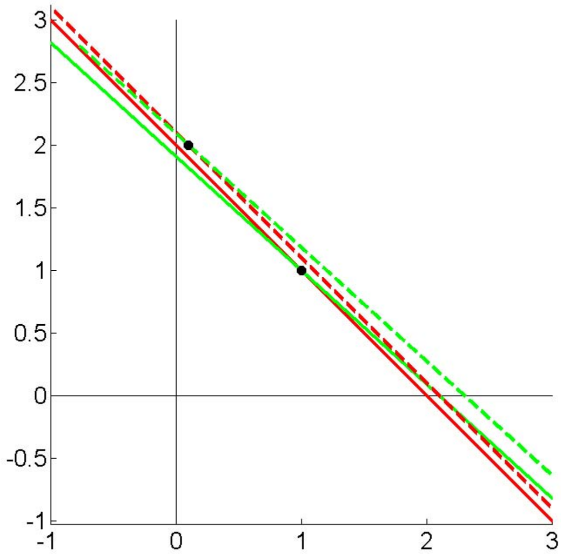
$$C_p = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$C_p = 2,1 \cdot 21 = 44,1$ (řádková, sloupcová norma);
$C_p = 2,0512 \cdot 20,5125 = 42,07$ (spektrální norma)

1. <u>změna pravé strany</u> (změna matice $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$)

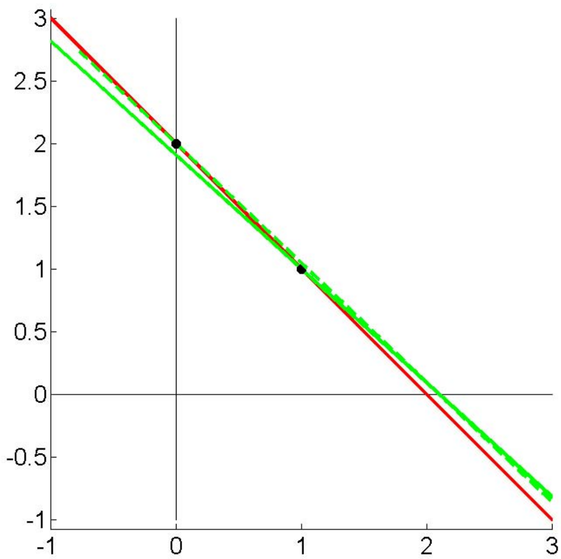
$$\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2,1 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$



změněná soustava $\color{red}{y = 2,1 - x}$; $\color{green}{y = \frac{1}{1,1}(2,3 - x)}$

2. <u>změna matice soustavy</u> (změna pravé strany $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{0}$)

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,05 \end{bmatrix}$$



změněná soustava $\color{red}{y = 2 - x}$; $\color{green}{y = \frac{1}{1,05}(2,1 - x)}$

Praktický výpočet čísla podmíněnosti

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

změna na vstupu ... $\Delta \mathbf{A}$

vyvolá změnu na výstupu ... $\Delta \mathbf{x}$

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

$$C_p = \frac{\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}}{\dfrac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}$$

Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 50 & -100 \\ 50 & -101 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

změna matice soustavy

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 50 & -99,9 \\ 50,2 & -101 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2,8527 \\ 1,4278 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,8527 \\ 1,4278 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8527 \\ -0,4278 \end{bmatrix}$$

$\|.\|$	1.vektorová/sloupcová	maximová/řádková	euklidovská/spektrální
$\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0,8527 \\ -0,4278 \end{bmatrix}$	1,2805	0,8527	0,9539
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	3	2	2,2361
$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix}$	0,2	0,2	0,2
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 50 & -100 \\ 50 & -101 \end{bmatrix}$	201	151	158,7479
C_p	428,97	321,89	338,6

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|\,, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|\,, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

$$\|\mathbf{A}\|_S = \max_k \sum_i |a_{ik}|\,, \quad \|\mathbf{A}\|_R = \max_i \sum_k |a_{ik}|\,, \quad \|\mathbf{A}\|_{SP} = \max_k \lambda_k^{\frac{1}{2}}(A^H A)$$

(Při použití různých norem dostáváme obecně různá čísla podmíněnosti.)

Teoretické číslo podmíněnosti

$$C_p = \|\mathbf{A}^{-1}\| \;\cdot\; \|\mathbf{A}\|$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,02 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_p = 151 \;\cdot\; 4,02 = 607,02 \quad (\text{řádková } \|.\|);$$

$$C_p = 201 \;\cdot\; 3,02 = 607,02 \quad (\text{sloupcová } \|.\|);$$

$$C_p = 158,7479 \;\cdot\; 3,1750 \doteq 504,03 \quad (\text{spektrální } \|.\|)$$

Přímá a zpětná chyba

$$x \to f(x) = y \qquad\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr] \arrow[d, leftrightarrow, "\boxed{\text{zpětná abs. chyba}}"'] \arrow[drr] & & y = f(x) \text{ ... přesné} \arrow[d, leftrightarrow, "\boxed{\text{přímá abs. chyba}}"] \\
\widehat{x} \arrow[rr] & & \widehat{y} \text{ ... vypočtené}
\end{tikzcd}$$

<u>Otázka:</u> $\widehat{y}$ je přesným obrazem f jakého bodu $\widehat{x}$?

přímá chyba (abs) $\qquad \triangle y = \widehat{y} - y$

zpětná chyba (abs) $\qquad \triangle x = \widehat{x} - x \qquad (f(x) = y)$

<u>Příklad</u>:

Jaká je přímá a zpětná chyba pro tato data:

$$x = 2,\ f(x) = \sqrt{x},\ y = \sqrt{2},\ \widehat{y} = 1,4 \ ?$$

přímá chyba:

$$|\triangle y| = |\widehat{y} - y| = |1,4 - 1,41421| \approx 0,01421$$

$$\frac{|\triangle y|}{|y|} \approx 1\%$$

zpětná chyba:

$$\widehat{x} =?, \sqrt{\widehat{x}} = 1,4, \widehat{x} = 1,96$$

$$|\triangle x| = |\widehat{x} - x| = |1,96 - 2| = 0,04$$

$$\frac{|\triangle x|}{|x|} = 2\%$$

```
Vysvetleni pojmu prima a zpetna chyba na uloze
vypoctu hodnoty funkce f(x)=sqrt(x) pro x = 2.

Zadej, na kolik platnych cifer n budeme zaokrouhlovat
      n = 2
----------------------------------------------------------

 Presne x = 2.000000

 Presne y=f(x) = 1.414214

 Nepresne (zaokrouhlene) Y = 1.400000

   PRIMA absolutni chyba, tj |Y - y| = 0.014214

   PRIMA relativni chyba, tj |Y - y| / |y| = 0.010051

 Jake X se presne zobrazi na Y ?

 X = Y^2 = 1.960000

   ZPETNA absolutni chyba, tj |X - x| = 0.040000

   ZPETNA relativni chyba, tj |X - x| / |x| = 0.020000
```

Podmíněnost a stabilita

$$cond = \frac{|\text{rel. změna řešení}|}{|\text{ rel. změna vstup. dat}|} = \frac{\left|\frac{f(\widehat{x})-f(x)}{f(x)}\right|}{\left|\frac{\widehat{x}-x}{x}\right|} = \frac{\text{rel. přímá chyba}}{\text{rel. zpětná chyba}}$$

- Stabilita algoritmu je analogická s podmíněností. Algoritmus je stabilní, je-li výsledek relativně málo citlivý na chyby vzniklé během výpočtu.
- Přesnost výsledku je blízkost vypočteného a přímého řešení
- Stabilita algoritmu sama o sobě negarantuje přesnost.
- Přesnost závisí na stabilitě algoritmu stejně tak jako na podmíněnosti problému.

stabilita algoritmu + **dobrá podmíněnost úlohy** $\Rightarrow$ **přesnost výsledku**

Vraťme se k příkladu, ve kterém jsme řešili kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ s koeficienty a = 0,05010, b = -98,78, c = 5,015.

```
-------------------------------------------
 koreny kvadraticke rovnice s koeficienty
 a=0.0501; b=-98.78; c=5.015;
 x=roots([a b c])
 x1 = 1971.605916
 x2 = 0.050771
-------------------------------------------
 aa=a*1.001
 xa=roots([aa b c])
  xa1 = 1969.636229
  xa2 = 0.050771
 rel_zmena_vystup=(xa-x)./x
  -9.9903e-04
   2.5752e-08
-------------------------------------------
 bb=b*1.001
 xb=roots([a bb c])
  xb1 = 1973.577623
  xb2 = 0.050720
 rel_zmena_vystup=(xb-x)./x
   1.0001e-03
  -9.9905e-04
 -------------------------------------------
 cc=c*1.001
 xc=roots([a b cc])
  xc1 = 1971.605865
  xc2 = 0.050821
 rel_zmena_vystup=(xc-x)./x
  -2.5752e-08
   1.0000e-03
-------------------------------------------
```

Úloha najít kořeny této kvadratické rovnice **je dobře podmíněná**, neboť pro relativní chybu na vstupu 0.001 došlo k relativní chybě na výstupu nejvýše ve stejných řádech, tj. `1e-3` (číslo podmíněnosti ≈ 1).

Připomeňme výsledky dvou různých vzorečků (algoritmů) v aritmetice se 4 ciframi.

Standardní formule $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{98,78 \pm 98,77}{0,1002} = \begin{cases} \mathbf{1972} \\ 0,0998 \quad \textbf{!!!} \end{cases}$$

Modifikovaná formule $$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{10,03}{98,78 \mp 98,77} = \begin{cases} 1003 \quad \textbf{!!!} \\ \mathbf{0,05077} \end{cases}$$

Každý z obou algoritmů byl nestabilní pro výpočet jednoho ze dvou kořenů.

Číselné soustavy

Motivace: Pro zobrazování čísel v počítači není vhodná desítková soustava. používá se dvojková soustava. Připomeňme si tedy, jak se převádí čísla mezi různými soustavami.

- zápis v desítkové soustavě:

$$1563 = (1 \cdot 10^3) + (5 \cdot 10^2) + (6 \cdot 10^1) + (3 \cdot 10^0)$$

obecně

$$N = (a_k \cdot 10^k) + (a_{k-1} \cdot 10^{k-1}) + \ldots + (a_1 \cdot 10^1) + (a_0 \cdot 10^0)$$

$$N \in \mathbb{N}, \quad a_k \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$$

- zápis ve dvojkové soustavě:

$$1563 = (1 \cdot 2^{10}) + (1 \cdot 2^9) + (0 \cdot 2^8) + (0 \cdot 2^7) + (0 \cdot 2^6) + (0 \cdot 2^5) + (1 \cdot 2^4) + (1 \cdot 2^3) + \\ + (0 \cdot 2^2) + (1 \cdot 2^1) + (1 \cdot 2^0)$$

$$\mathbf{(1563)_{10} = (11000011011)_2}$$

Příklad: Převeďte z desítkové soustavy číslo 139 do dvojkové soustavy.

```
-------------------------------------------------------------------------
Prevod cisla 139.000000 z 10-soustavy do 2-soustavy na 8 desetinnych mist
Znamenko ............ +
Cela cast ........... 139
Desetinna cast ...... 0.000000
-------------------------------------------------------------------------
  prevod_cele_casti =

   139 : 2 = 69 : 2 = 34 : 2 = 17 : 2 = 8 : 2 = 4 : 2 = 2 : 2 = 1
     1         1         0         1        0        0        0

   Cislo 139 v 10-soustave prevedeno do 2-soustavy je 10001011.
```

Zbytky zapíšeme odzadu: $(139)_{10} = (10001011)_2$.

Příklad: Převeďte z desítkové soustavy číslo $\frac{1}{10}$ do dvojkové soustavy.

```
------------------------------------------------------------------------
Prevod cisla 0.100000 z 10-soustavy do 2-soustavy na 6 desetinnych mist
Znamenko ............ +
Cela cast ........... 0
Desetinna cast ...... 0.100000
-----------------------------------------------------------------------
  prevod_desetinne_casti =

   0.1 * 2 = 0.2 * 2 = 0.4 * 2 = 0.8 * 2 = 0.6 * 2 = 0.2 * 2 = 0.4
     0         0         0         1         1         0

   Cislo 1.000000e-01 v 10-soustave prevedeno do 2-soustavy je 0.000110.
```

Pokud výsledek byl větší než 1, zapsali jsme jedničku, číslo ořízli a pokračovali dál.

Znovu se opakuje 0,2 · 2 $\Rightarrow$ ve dvojkové soustavě jde o periodické číslo (má nekonečný rozvoj).

$$(0,1)_{10} = (0,0\overline{0011})_2$$

Poznámka: Mnoho reálných čísel, které lze v desítkové soustavě zapsat pomocí konečného počtu cifer, pro zápis ve dvojkové soustavě vyžaduje cifer nekonečně mnoho.

Do dvojkové soustavy převeďte z desítkové soustavy např. číslo $0,7$.

$$\begin{aligned}
(0,7)_{10} \quad &= (0,1\overline{0110})_2 = 1 \cdot 2^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot 2^{-(3+4k)} + \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot 2^{-(4k)} = \\
&= 0,5 + \frac{1}{8} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-4}\right)^k + \frac{1}{16} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-4}\right)^k = \\
&= 0,5 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = 0,5 + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \\
&= 0,7
\end{aligned}$$

Příklad: Převeďte z desítkové soustavy číslo $\dfrac{4321}{3}$ $(= 1440,\overline{3})$ do sedmičkové soustavy.

```
---------------------------------------------------------------------------
Prevod cisla 1440.333333 z 10-soustavy do 7-soustavy na 4 desetinne mista
Znamenko ........... +
Cela cast .......... 1440
Desetinna cast ...... 0.333333
---------------------------------------------------------------------------
  prevod_cele_casti =

   1440 : 7 = 205 : 7 = 29 : 7 = 4
      5         2        1

  Cislo 1440 v 10-soustave prevedeno do 7-soustavy je 4125.
---------------------------------------------------------------------------
  prevod_desetinne_casti =

   0.33333 * 7 = 0.33333 * 7 = 0.33333 * 7 = 0.33333 * 7 = 0.33333
         2             2             2             2

  Cislo 3.333333e-01 v 10-soustave prevedeno do 7-soustavy je 0.2222.
---------------------------------------------------------------------------

  Cislo 1.440333e+03 v 10-soustave prevedeno do 7-soustavy je
  na 4 desetinne mista 4125.2222.
```

Pokud výsledek byl větší než 1, zapsali jsme celou část, číslo ořízli a pokračovali dál.

Znovu se opakuje $0{,}33333 \cdot 7 \;\Rightarrow\;$ v sedmičkové soustavě jde také o periodické číslo (má nekonečný rozvoj).

$$(1440,\overline{3})_{10} = (4125,\overline{2})_7$$

Do desítkové soustavy převedeme číslo ze soustavy se základem N velmi jednoduše.

Příklad: Z dvojkové soustavy převeďte do desítkové soustavy číslo 10110010.1001101.

```
-------------------------------------------------------------------
Prevod cisla 10110010.1001101 z 2-soustavy do 10-soustavy.
Cela cast ........... 10110010
Desetinna cast ...... 1001101
-------------------------------------------------------------------

Vysledek = 1 * 2^7 + 0 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 +
+ 1 * 2^1 + 0 * 2^0 + 1 * 2^(-1) + 0 * 2^(-2) + 0 * 2^(-3) + 1 * 2^(-4) +
+ 1 * 2^(-5) + 0 * 2^(-6) + 1 * 2^(-7)

Vysledek je 178.601562
```

Příklad: Ze čtyřkové soustavy převeďte do desítkové soustavy číslo 2130.211.

```
-------------------------------------------------------------------
Prevod cisla 2130.211 z 4-soustavy do 10-soustavy.
Cela cast ........... 2130
Desetinna cast ...... 211
-------------------------------------------------------------------

Vysledek = 2 * 4^3 + 1 * 4^2 + 3 * 4^1 + 0 * 4^0 + 2 * 4^(-1) +
         + 1 * 4^(-2) + 1 * 4^(-3)

Vysledek je 156.578125
```

Příklad: Z šestkové soustavy převeďte do desítkové soustavy číslo 12345.54321.

```
-------------------------------------------------------------------
Prevod cisla 12345.54321 z 6-soustavy do 10-soustavy.
Cela cast ........... 12345
Desetinna cast ...... 54321
-------------------------------------------------------------------

Vysledek =
1 * 6^4 + 2 * 6^3 + 3 * 6^2 + 4 * 6^1 + 5 * 6^0 + 5 * 6^(-1) +
+ 4 * 6^(-2) + 3 * 6^(-3) + 2 * 6^(-4) + 1 * 6^(-5)

Vysledek je 1865.960005
```