Metoda prosté iterace

Uvažujeme tzv. úlohu o pevném bodě

$$x = \varphi(x).$$

Řešení úlohy se nazývá pevným bodem zobrazení (funkce) φ.

Pro nalezení řešení jsme zvolili iterační postup, kde jsme na začátku zvolili počáteční aproximaci x_0 a následující iterace počítali podle vzorce

$$x_{k+1} = \varphi(x_k).$$

Položme si otázku, kdy bude proces konvergovat?

Ukážeme si několik příkladů:

Příklad 1: $x_{k+1} = 3x_k - 2,\ x_0 = 1,1$

Řešení musí splňovat rovnici $x = 3x - 2$, tj. $2x = 2 \Rightarrow x = 1$.

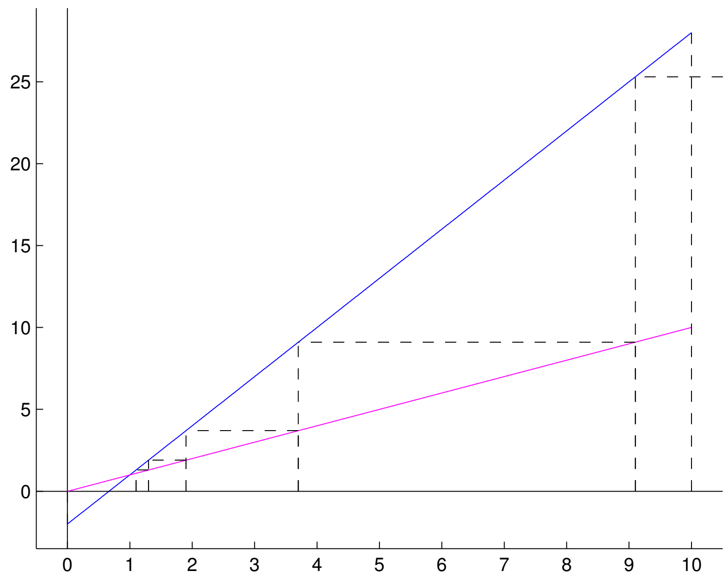
S počáteční volbou jsme velmi blízko, vypočteme několik iterací:

```
Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=1.1 a zastavovaci podminku
|x(k)-x(k-1)|<0.01

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce10.m takto:

function out=fce10(x);
out=3*x-2;

| k |       x(k)       | dx(k)=x(k)-x(k-1) |   dx(k)/dx(k-1)   |
-----------------------------------------------------------------
| 0 |     1.100000     |                   |                   |
| 1 |     1.300000     |      0.200000     |                   |
| 2 |     1.900000     |      0.600000     |      3.000000     |
| 3 |     3.700000     |      1.800000     |      3.000000     |
| 4 |     9.100000     |      5.400000     |      3.000000     |
| 5 |    25.300000     |     16.200000     |      3.000000     |
| 6 |    73.900000     |     48.600000     |      3.000000     |
| 7 |   219.700000     |    145.800000     |      3.000000     |
| 8 |   657.100000     |    437.400000     |      3.000000     |
| 9 |  1969.300000     |   1312.200000     |      3.000000     |
|10 |  5905.900000     |   3936.600000     |      3.000000     |
```

Vidíme, že se od přesného řešení vzdalujeme a pomocí tohoto vztahu jej neurčíme.

Grafické zobrazení: Má platit rovnost $x = \varphi(x)$, tj. přesné řešení odpovídá průsečíku grafů funkcí $y = x$ a $y = \varphi(x)$.

Nejen, že se iterace vzdalují od přesného řešení, ale také se zvětšují rozdíly mezi nimi !



Příklad 2: Pokud chceme řešit rovnici $x = 3x - 2$, můžeme zkusit jiný tvar přepisu $x = \varphi(x)$.

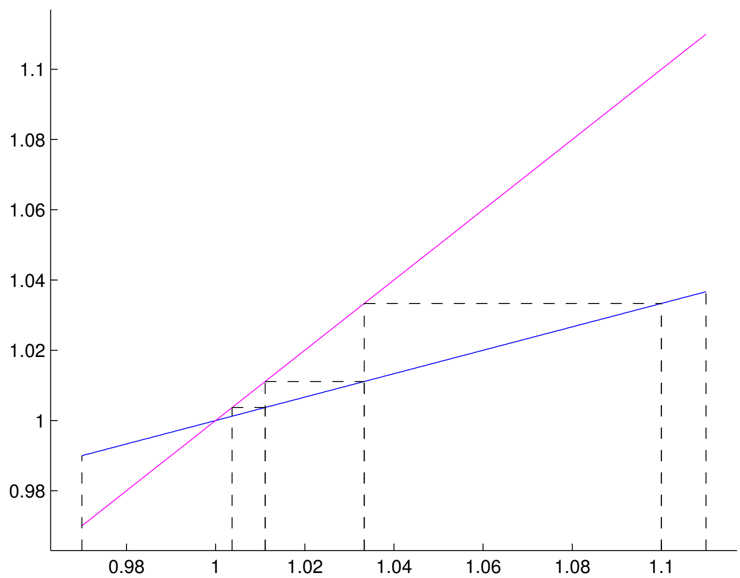
např. $x_{k+1} = \frac{1}{3}x_k + \frac{2}{3}, \; x_0 = 1,1$

$$x = 3 \cdot x - 2 \qquad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}x = x - \frac{2}{3} \qquad / + \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

```
Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=1.1 a zastavovaci podminku
|x(k)-x(k-1)|<0.01

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce11.m takto:

function out=fce11(x);
out=1/3*x+2/3;

| k |       x(k)       | dx(k)=x(k)-x(k-1) |   dx(k)/dx(k-1)    |
-----------------------------------------------------------------
| 0 |     1.100000     |                   |                    |
| 1 |     1.033333     |     -0.066667     |                    |
| 2 |     1.011111     |     -0.022222     |      0.333333      |
| 3 |     1.003704     |     -0.007407     |      0.333333      |
```



Vidíme, že posloupnost klesá k přesnému řešení (blíží se k 1).

Dále je vidět, že se iterace zahušťují a absolutní hodnota rozdílu $|x_k - x_{k-1}|$ s rostoucím k klesá k nule, tj. pro $\forall k$ $(> k_0)$ by mělo platit:

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| < |x_{k+1} - x_k|.$$

Pokud využijeme iterační předpis, můžeme výraz na levé straně nahradit:

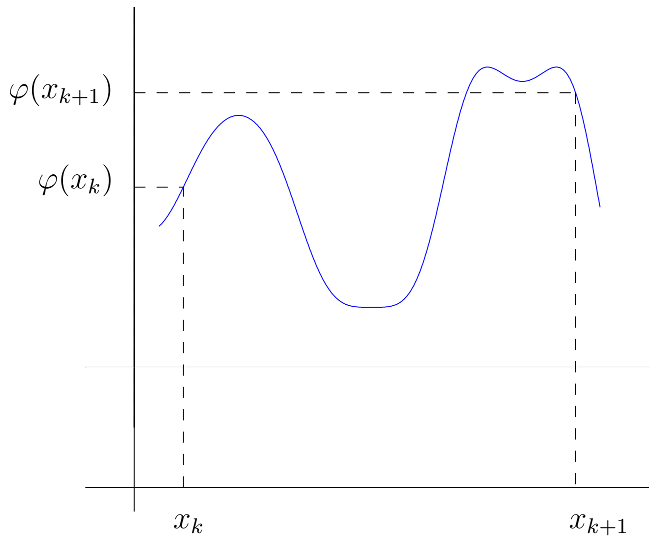
$$|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| < |x_{k+1} - x_k|.$$

Nerovnici vydělíme $|x_{k+1} - x_k| \neq 0$ (pokud by $x_{k+1} - x_k = 0$, pak by $x_{k+1} = x_k$ a jednalo by se o přesné řešení $x_k = x_{k+1} = \varphi(x_k)$) a dostaneme

$$\frac{|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)|}{|x_{k+1} - x_k|} < 1, \quad \text{resp.} \; \frac{|x_{k+2} - x_{k+1}|}{|x_{k+1} - x_k|} < 1 \tag{$\star$}$$

Aby proces konvergoval, je vhodné zajistit splnění podmínky ($\star$).

Geometrický význam:



Pokud bude pro funkci φ platit následující podmínka ($\star\star$) máme splnění podmínky ($\star$) zaručeno:

$$\forall x, y \in I : \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|, \tag{$\star\star$}$$

kde I je nějaký interval obsahující řešení, na kterém ho hledáme.

Analogický zápis:

$$\forall x, y \in I : \quad \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|} < 1.$$

Pokud funkce φ splňuje ($\star\star$), říkáme o ní, že je kontrahující nebo že jde o kontrakci.

Vraťme se k příkladu 1 a 2 a ověřme, zda byla příslušná funkce φ kontrahující (pro jednoduchost na $\mathbb{R}$).

ad 1) $\boxed{\varphi(x) = 3x - 2}$

Pokud vezmeme libovolná 2 různá čísla $x, y \in \mathbb{R}$ dostaneme:

$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |(3x-2) - (3y-2)| = |3x - 3y - 2 + 2| = |3x - 3y| = \mathbf{3}|x-y|$

$\Rightarrow$ φ není kontrakce.

ad 2) $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}$

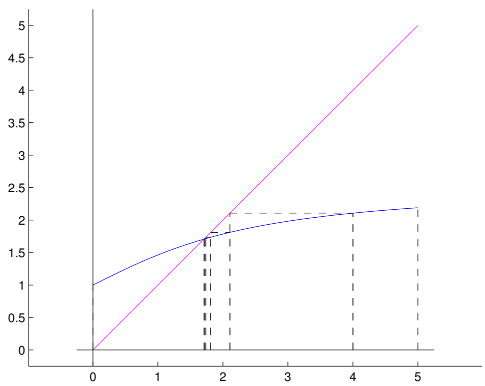
Opět pro libovolná 2 různá čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

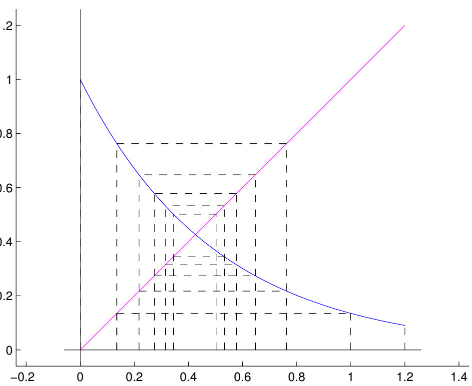
$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}) - (\frac{1}{3}y + \frac{2}{3})\right| = \left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}|x-y|$

$\Rightarrow$ φ je kontrakce.

Geometricky to znamená, že změna funkce φ z jednoho bodu do druhého musí být menší než vzdálenost těchto bodů, tj. funkce φ nemůže mít velké "růsty" a "poklesy" (změny). Ve srovnání s přímkou $x = y$ musí mít menší "růst" v absolutní hodnotě.

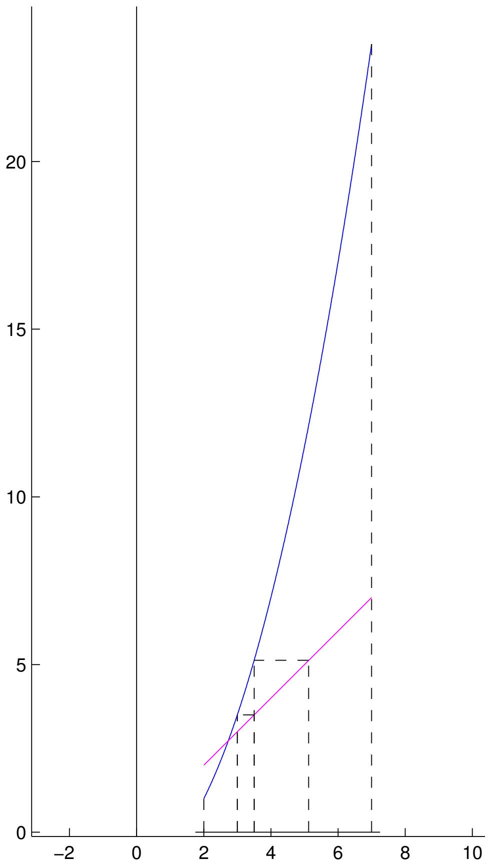
Příklady funkcí $\varphi = \varphi(x)$, které **jsou kontrakcí**:



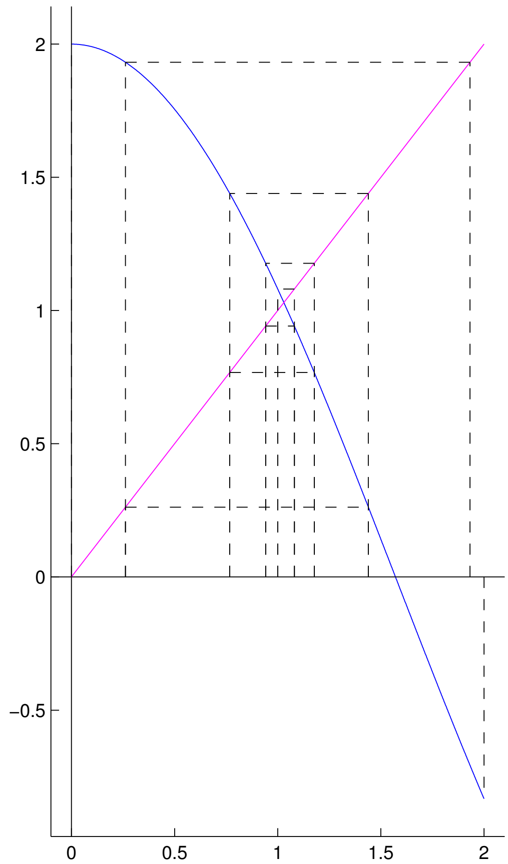


$\varphi(x) = \operatorname{arctg}(x/2) + 1$ na intervalu $\langle 1, 5\rangle$ $\qquad$ $\varphi(x) = \mathrm{e}^{(-x/2)}$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

Příklady funkcí $\varphi = \varphi(x)$, které **nejsou kontrakcí**:



$\varphi(x) = x^2/2 - 1$ na intervalu $\langle 2, 7\rangle$

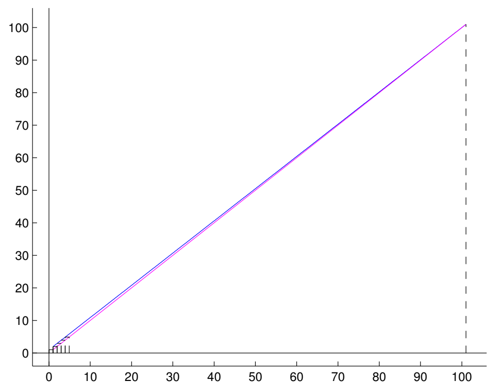


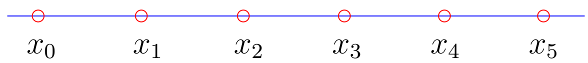
$\varphi(x) = 2\cos x$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$

Otázka: Co ovlivňuje rychlost konvergence (zhušťování bodů)?

Příklad: Uvažujeme předpis $x_{k+1} = 0,99\,x_k + 1,\ x_0 = 0$. Posuďte zhušťování iterací.

```
Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=0 a zastavovaci podminku
|x(k)-x(k-1)|<0.01

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce16.m takto:


function out=fce16(x);
out=0.99*x+1;

| k |       x(k)        | dx(k)=x(k)-x(k-1) |   dx(k)/dx(k-1)    |
-----------------------------------------------------------------
| 0 |     0.000000      |                   |                    |
| 1 |     1.000000      |     1.000000      |                    |
| 2 |     1.990000      |     0.990000      |     0.990000       |
| 3 |     2.970100      |     0.980100      |     0.990000       |
| 4 |     3.940399      |     0.970299      |     0.990000       |
| 5 |     4.900995      |     0.960596      |     0.990000       |
```





$x_1 - x_0 = 1,\quad x_2 - x_1 = 0,99,\quad x_3 - x_2 = 0,9801$

$|x_2 - x_1|$ se oproti $|x_1 - x_0|$ moc nezměnilo

$|x_3 - x_2|$ se oproti $|x_2 - x_1|$ moc nezměnilo

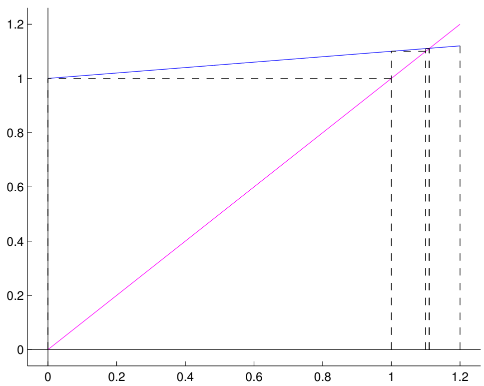
tj. čím víc bude $\dfrac{|x_{k+2} - x_{k+1}|}{|x_{k+1} - x_k|}$ blíže k 1 (zdola), tím pomaleji bude proces konvergovat.

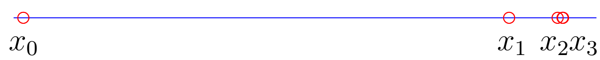
Pokud by byl tento podíl roven 1, pak proces nekonverguje (např.: $x_{k+1} = x_k + 1,\ x_0 = 0$).

Označme podíl: $\quad q_k = \dfrac{|x_{k+2} - x_{k+1}|}{|x_{k+1} - x_k|} \quad \ldots \quad$ v tomto případě platí, že $q_k = 0,99$.

Příklad: Uvažujeme předpis $x_{k+1} = 0,1\, x_k + 1,\ x_0 = 0$. Posuďte zhušťování iterací.

```
Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=0 a zastavovaci podminku
|x(k)-x(k-1)|<0.01

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce17.m takto:


function out=fce17(x);
out=0.1*x+1;

| k |        x(k)        | dx(k)=x(k)-x(k-1) |    dx(k)/dx(k-1)    |
-------------------------------------------------------------------------
| 0 |      0.000000      |                    |                      |
| 1 |      1.000000      |      1.000000      |                      |
| 2 |      1.100000      |      0.100000      |      0.100000        |
| 3 |      1.110000      |      0.010000      |      0.100000        |
| 4 |      1.111000      |      0.001000      |      0.100000        |
```





$$x_1 - x_0 = 1, \quad x_2 - x_1 = 0,1, \quad x_3 - x_2 = 0,01$$

$|x_2 - x_1|$ je 10 x menší než $|x_1 - x_0|$

$|x_3 - x_2|$ je 10 x menší než $|x_2 - x_1|$

tj. čím víc bude $\dfrac{|x_{k+2} - x_{k+1}|}{|x_{k+1} - x_k|}$ blíže k 0, tím rychleji bude proces konvergovat.

Pokud by byl tento podíl roven 0, pak máme přesné řešení, protože musí platit, že

$x_{k+2} - x_{k+1} = 0$, tj. $x_{k+2} = x_{k+1}$, tj. $\varphi(x_{k+1}) = x_{k+1}$ a x_{k+1} je přesné řešení.

Podíl q_k je v tomto případě roven 0,1.

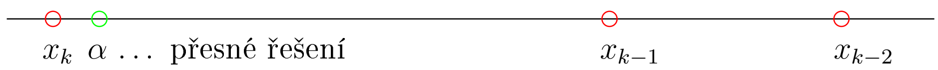
Vraťme se ke vztahu ($\star\star$).

Definice:

Nechť $f : I \to \mathbb{R}$. Potom platí, že existuje q > 0: $|f(x) - f(y)| < q \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in I$.
Říkáme, že funkce f je **lipschitzovská funkce**.

Otázka: Jaká je souvislost chyby přibližného řešení a velikosti rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací?

$$|x_k - \alpha| \gg |x_k - x_{k-1}|$$



$$|x_k - \alpha| \ll |x_k - x_{k-1}|$$

Odpověď: Mohou nastat obě situace, tj. kdy je chyba $|x_k - \alpha|$ mnohem větší než vzdálenost dvou posledních iterací $|x_k - x_{k-1}|$, ale i naopak mnohem menší.

Odhad chyby metody prosté iterace

- Máme konvergentní proces $x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$
- Přesné řešení α splňuje vztah $\alpha = \varphi(\alpha), \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$
- Po odečtení dostaneme $x_k - \alpha = \varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)$

  tj. $|x_k - \alpha| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| \qquad \leftarrow$
- Předpokládáme, že φ je lipchitzovská s konstantou $q \in (0, 1)$, tj. musí platit:

$$|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| \leq q \cdot |x_{k-1} - \alpha| \qquad \leftarrow$$

- Dále použijeme $\triangle$ nerovnost:

$$|x_{k-1} - \alpha| = |x_{k-1} - x_k + x_k - \alpha| \leq |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \alpha| \qquad \leftarrow$$

- Dostaneme:

$$|x_k - \alpha| \leq q \cdot |x_{k-1} - x_k| + q \cdot |x_k - \alpha|$$

$$(1 - q) \cdot |x_k - \alpha| \leq q \cdot |x_{k-1} - x_k| \qquad / \cdot \frac{1}{1-q} > 0$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1-q} \cdot |x_{k-1} - x_k|$$

Poznámka: Hodnota konstanty q velmi ovlivňuje odhad chyby, ale také, jak jsme viděli dříve, i rychlost "zhušťování" iterací.

Příklad: Opět $x_{k+1} = 0,99\, x_k + 1,\ x_0 = 0$

platí také: $x_{k+2} = 0,99\, x_{k+1} + 1$

po odečtení získáme: $|x_{k+2} - x_{k+1}| = 0,99\, |x_{k+1} - x_k| \quad \Rightarrow \quad q = 0,99$

odhad chyby: $|x_k - \alpha| \leq \dfrac{0,99}{1 - 0,99} |x_{k-1} - x_k| = 99\, |x_{k-1} - x_k|.$

Tj. chyba může být 99x větší než tolerance ε použitá pro zastavení procesu: $|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon$.

Příklad: Opět $x_{k+1} = 0,1x_k + 1,\ x_0 = 0$

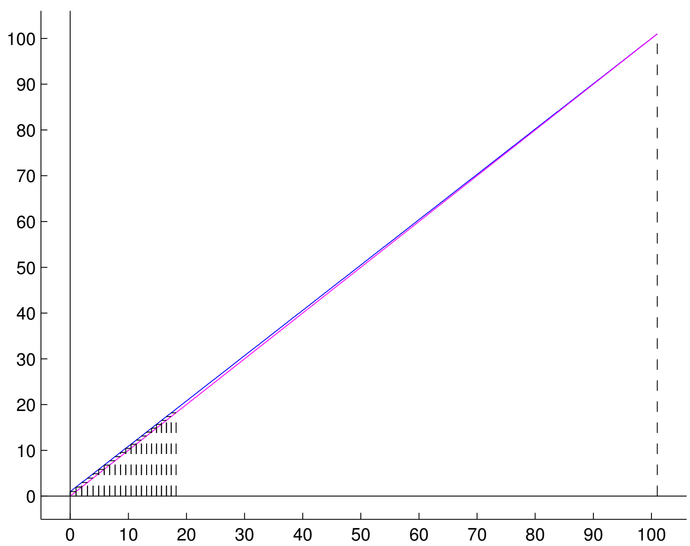
platí také: $x_{k+2} = 0,1\, x_{k+1} + 1$

po odečtení: $|x_{k+2} - x_{k+1}| = 0,1\, |x_{k+1} - x_k| \quad \Rightarrow \quad q = 0,1$

odhad chyby: $|x_k - \alpha| \leq \dfrac{0,1}{1 - 0,1} |x_{k-1} - x_k| = \dfrac{1}{9} |x_{k-1} - x_k|$

Tj. chyba je 9x menší než tolerance ε použitá pro zastavení procesu: $|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon$.

```
Odhad chyby metody proste iterace pro reseni nelinearni rovnice
                  x = phi(x) = 0.99*x+1

|  k |        x(k)        | dx(k)=x(k)-x(k-1) |   dx(k)/dx(k-1)   |
-----------------------------------------------------------------
|  0 |     0.000000       |                   |                   |
|  1 |     1.000000       |      1.000000     |                   |
|  2 |     1.990000       |      0.990000     |      0.990000     |
|  3 |     2.970100       |      0.980100     |      0.990000     |
|  4 |     3.940399       |      0.970299     |      0.990000     |
|  5 |     4.900995       |      0.960596     |      0.990000     |
|  6 |     5.851985       |      0.950990     |      0.990000     |
|  7 |     6.793465       |      0.941480     |      0.990000     |
|  8 |     7.725531       |      0.932065     |      0.990000     |
|  9 |     8.648275       |      0.922745     |      0.990000     |
| 10 |     9.561792       |      0.913517     |      0.990000     |
| 11 |    10.466175       |      0.904382     |      0.990000     |
| 12 |    11.361513       |      0.895338     |      0.990000     |
| 13 |    12.247898       |      0.886385     |      0.990000     |
| 14 |    13.125419       |      0.877521     |      0.990000     |
| 15 |    13.994165       |      0.868746     |      0.990000     |
| 16 |    14.854223       |      0.860058     |      0.990000     |
| 17 |    15.705681       |      0.851458     |      0.990000     |
| 18 |    16.548624       |      0.842943     |      0.990000     |
| 19 |    17.383138       |      0.834514     |      0.990000     |
| 20 |    18.209306       |      0.826169     |      0.990000     |

 Odhad chyby :

| x_20 - x_presne | <= q / (1-q) *  | x_20 - x_19 |

| 18.209306 - x_presne | <= 0.99 / (1-0.99) * 0.826169 = 81.790694
```



```
Odhad chyby metody proste iterace pro reseni nelinearni rovnice
                   x = phi(x) = 0.1*x+1
pro pocatecni aproximaci x0=0 a zast. podminku |x(k)-x(k-1)|<0.01

| k |       x(k)        | dx(k)=x(k)-x(k-1) |   dx(k)/dx(k-1)    |
----------------------------------------------------------------
| 0 |     0.000000      |                   |                    |
| 1 |     1.000000      |      1.000000     |                    |
| 2 |     1.100000      |      0.100000     |      0.100000      |
| 3 |     1.110000      |      0.010000     |      0.100000      |
| 4 |     1.111000      |      0.001000     |      0.100000      |

 Odhad chyby :

| x_4 - x_presne | <= q / (1-q) *  | x_4 - x_3 |

| 1.111000 - x_presne | <= 0.1 / (1-0.1) * 0.001000 = 0.000111
```