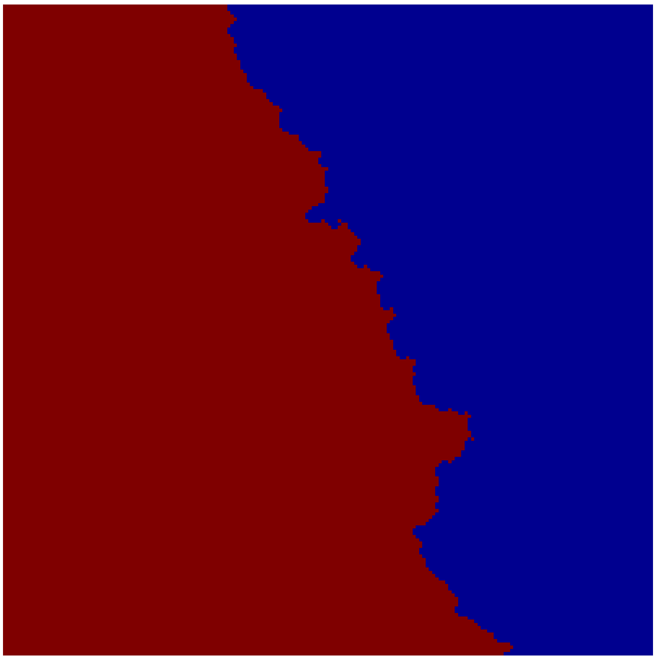
# Fraktály

## Měření délky pobřeží

Jak mám změřit délku pobřeží?

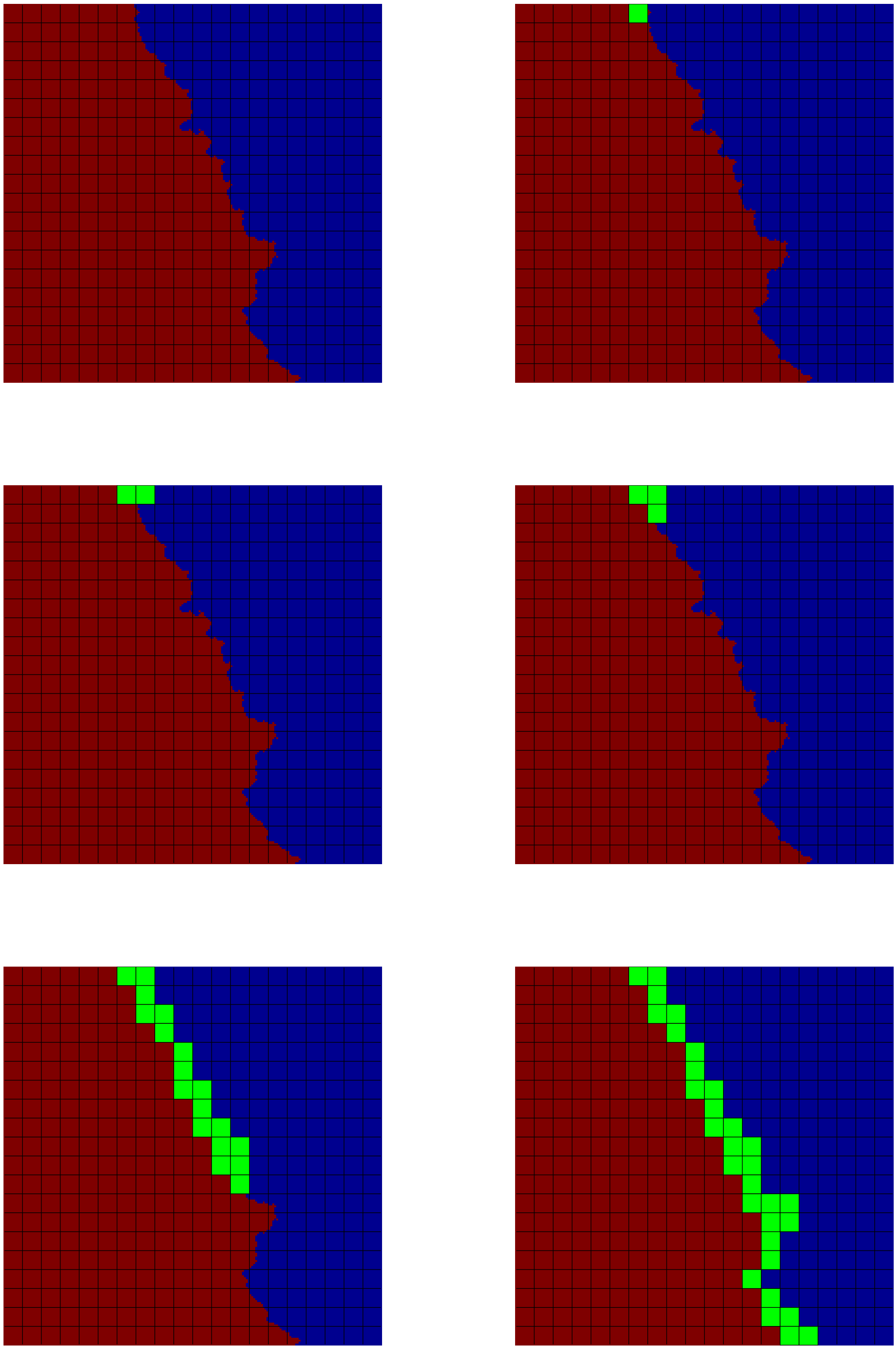


Zkusíme 2 možnosti:

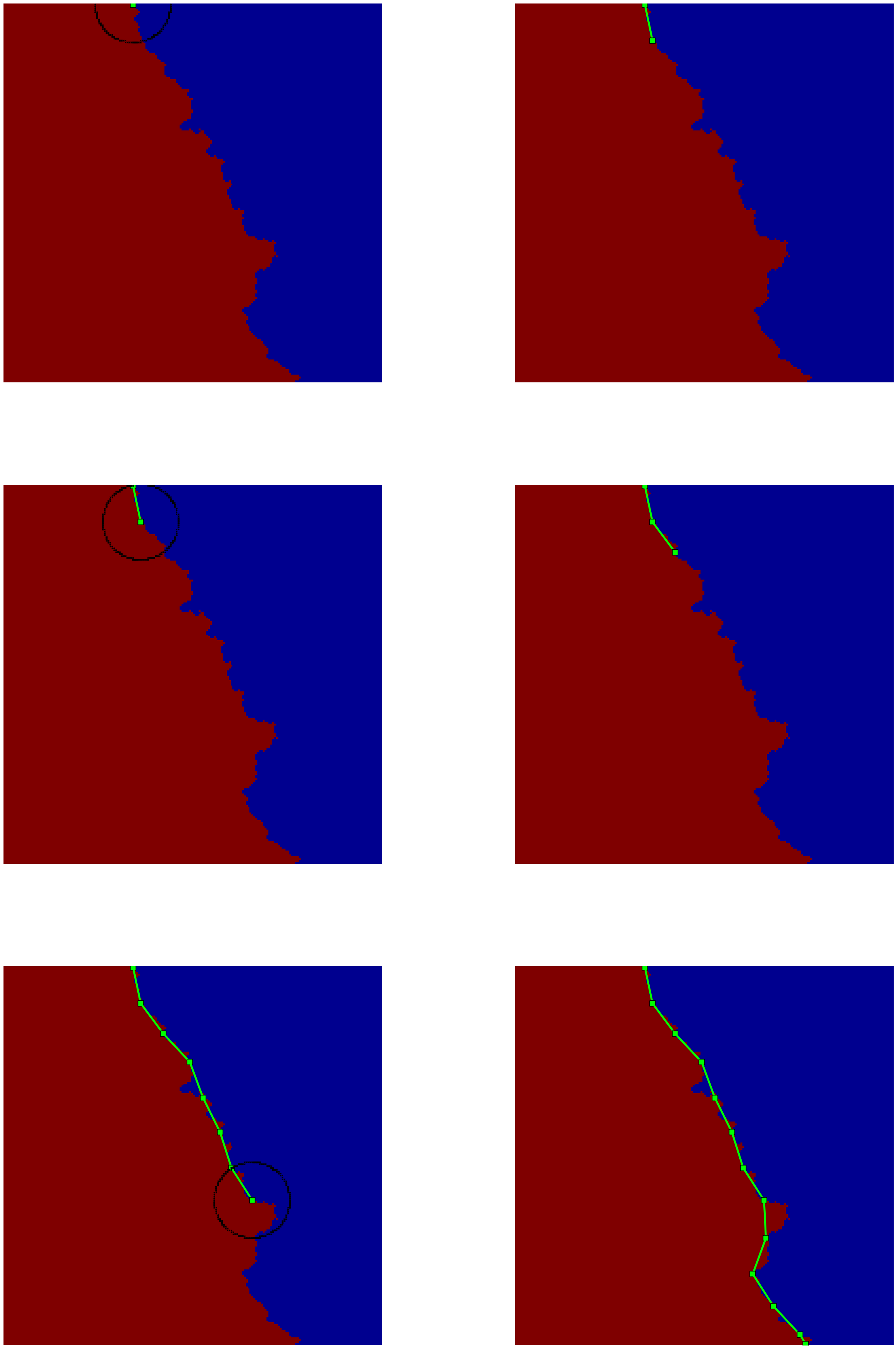
1) - Vytvoříme mřížku (čtvercovou) s určitou velikostí čtverce.
   - Obarvíme ty čtverce, ve kterých leží jak pevná zem, tak moře.
   - Výsledná délka je dána počtem obarvených čtverců x jejich počet (strana, úhlopříčka).

2) - Určíme si délku měřidla (kružítkem).
   - Začneme v jednom krajním bodě.
   - Určujeme další bod pobřeží, který leží právě tak daleko od předchozího.
   - Výsledná délka je součtem vzdáleností získaných bodů, tj. jejich počet x délka měřidla.

add 1)



add 2)

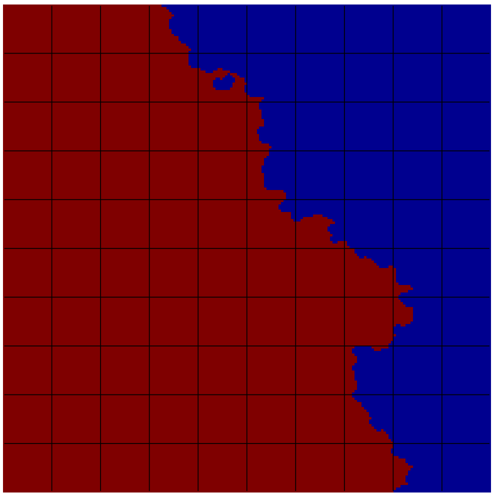


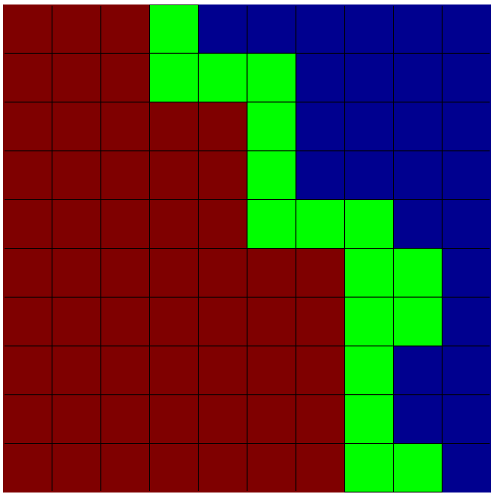
Pozorování:

Čím menší budu mít měřidlo tím větší naměříme délku pobřeží ! (Richardsonův efekt)

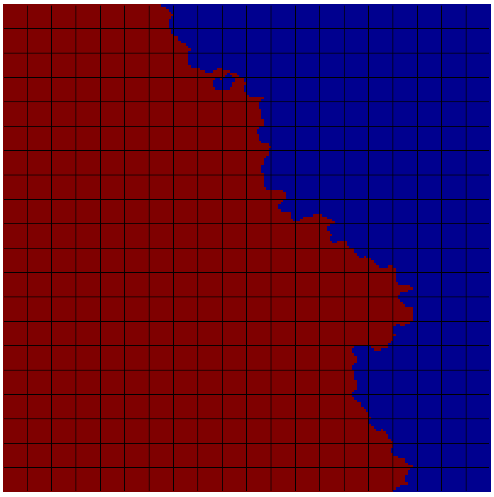
Členitost pobřeží charakterizuje neceločíselná dimenze.

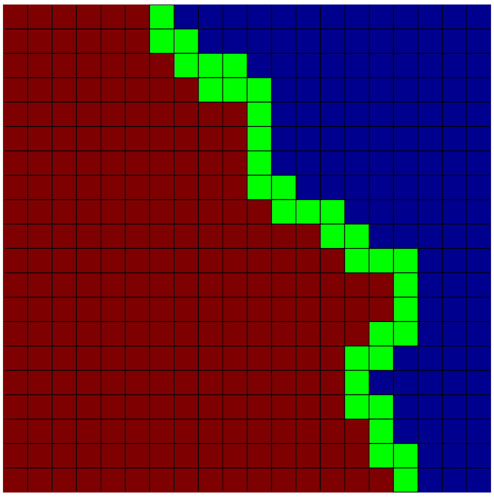
add 1)



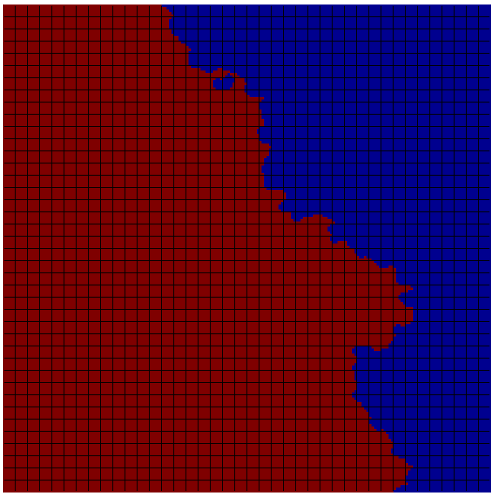


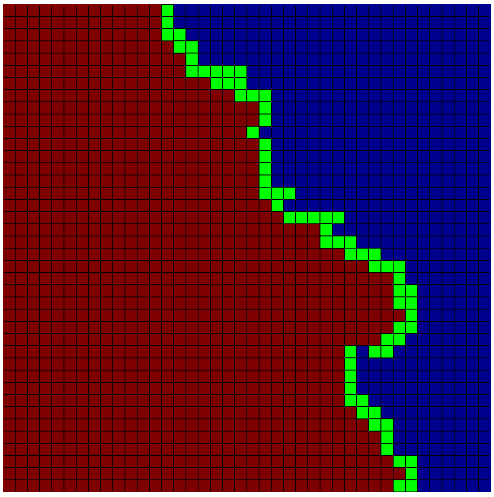
```
Ukazka mereni delky pobrezi pomoci ctvercove site.

 Zadej pocet ctvercu na stranu
  (doporuceno 5,10,20,40) = 10

 Pokud by mapa predstavovala uzemi 100 x 100 km,
 zvoleny ctverec by mel stranu delky 10.000000 km.

 Pocet oznacenych ctvercu je 17 .

 Celkova delka pobrezi je tedy soucinem poctu ctvercu a
 delky strany ctverce, tj. 17 x 10.000000 =  170.000000.
```





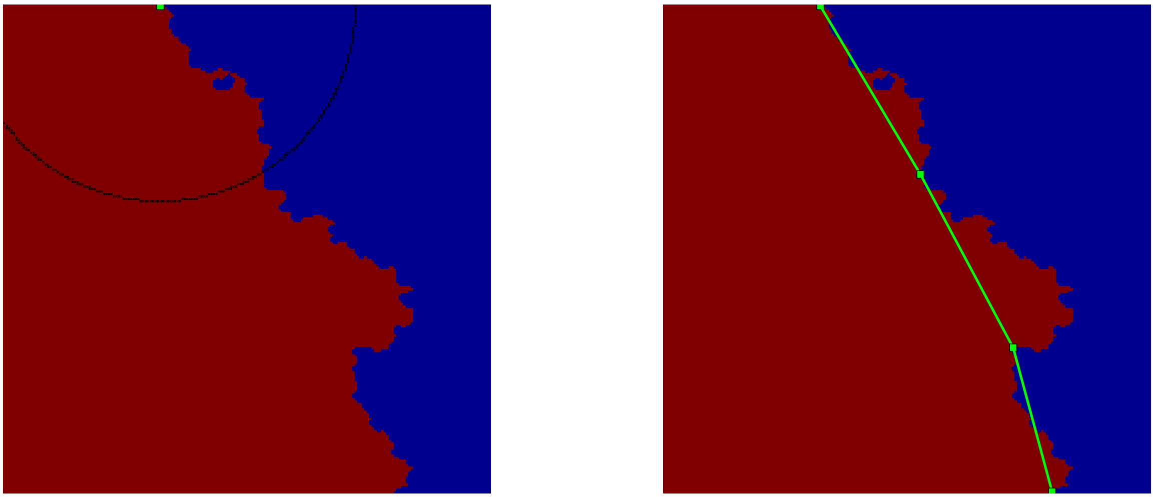
```
Ukazka mereni delky pobrezi pomoci ctvercove site.

 Zadej pocet ctvercu na stranu
  (doporuceno 5,10,20,40) = 20

 Pokud by mapa predstavovala uzemi 100 x 100 km,
 zvoleny ctverec by mel stranu delky 5.000000 km.

 Pocet oznacenych ctvercu je 35 .

 Celkova delka pobrezi je tedy soucinem poctu ctvercu a
 delky strany ctverce, tj. 35 x 5.000000 =  175.000000.
```



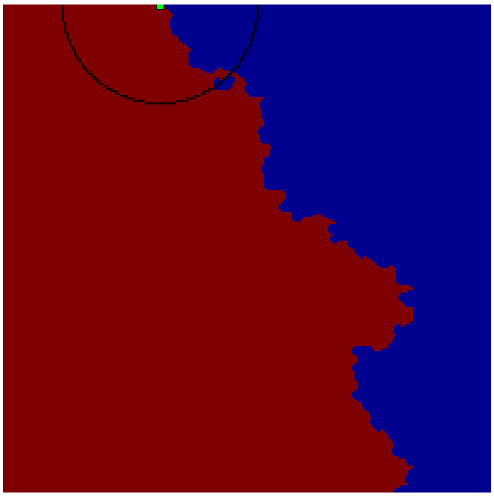


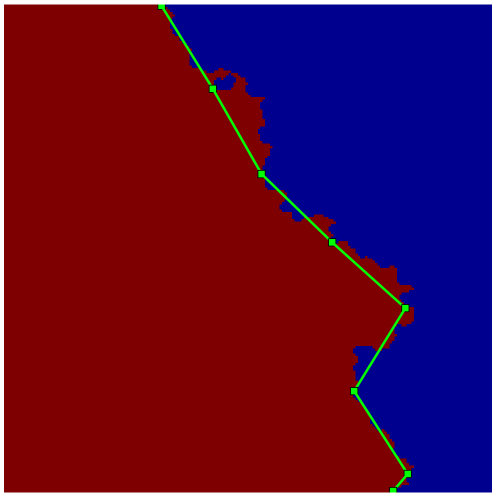
```
Ukazka mereni delky pobrezi pomoci ctvercove site.

 Zadej pocet ctvercu na stranu
  (doporuceno 5,10,20,40) = 40

 Pokud by mapa predstavovala uzemi 100 x 100 km,
 zvoleny ctverec by mel stranu delky 2.500000 km.

 Pocet oznacenych ctvercu je 73 .

 Celkova delka pobrezi je tedy soucinem poctu ctvercu a
 delky strany ctverce, tj. 73 x 2.500000 =  182.500000 .
```

add 2)

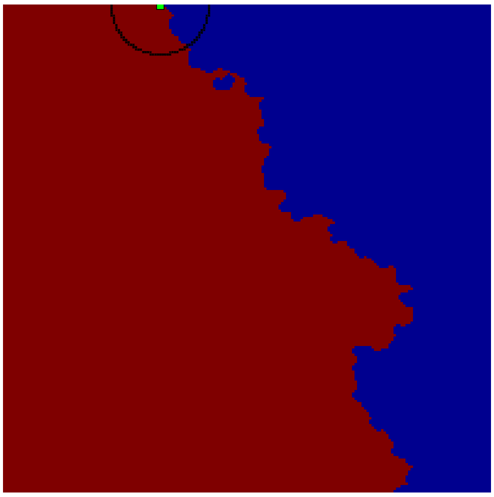


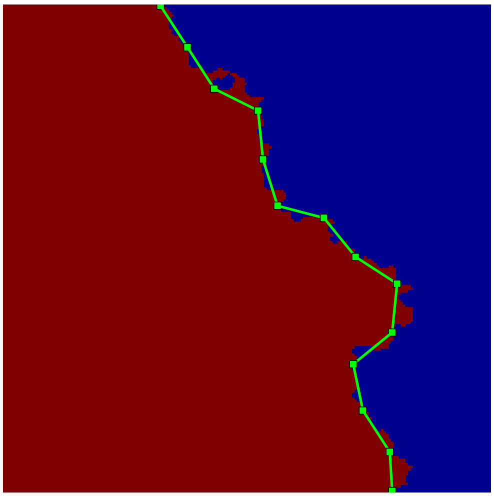
```
Ukazka mereni delky pobrezi pomoci kruzitka.

 Predpokladame, ze mapa predstavuje uzemi 100 x 100 km,
 Zadej delku, kterou nastavime na kruzitku
  (doporuceno 5 az 50 km) = 40

 Pocet namerenych usecek je 2.764138 .

 Celkova delka pobrezi je tedy soucinem poctu usecek a
 jejich delky, tj. 2.764138 x 40.000000 =  110.565503.
```





```
Ukazka mereni delky pobrezi pomoci kruzitka.

 Predpokladame, ze mapa predstavuje uzemi 100 x 100 km,
 Zadej delku, kterou nastavime na kruzitku
  (doporuceno 5 az 50 km) = 20

 Pocet namerenych usecek je 6.215058 .

 Celkova delka pobrezi je tedy soucinem poctu usecek a
 jejich delky, tj. 6.215058 x 20.000000 =  124.301163.
```

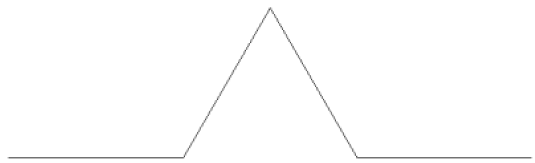




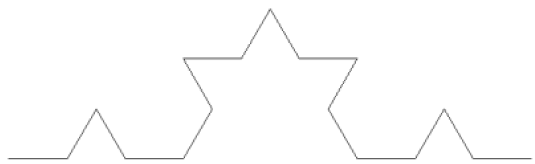
```
Ukazka mereni delky pobrezi pomoci kruzitka.

 Predpokladame, ze mapa predstavuje uzemi 100 x 100 km,
 Zadej delku, kterou nastavime na kruzitku
  (doporuceno 5 az 50 km) = 10

 Pocet namerenych usecek je 12.801561 .

 Celkova delka pobrezi je tedy soucinem poctu usecek a
 jejich delky, tj. 12.801561 x 10.000000 =  128.015610.
```

Uvažujeme následující fraktálovou strukturu (**Kochova křivka**).

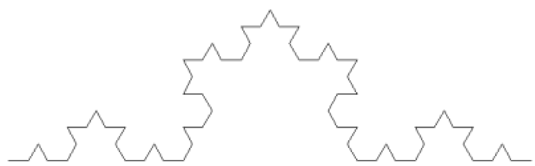
- Nejprve uvažujeme úsečku délky jedna.



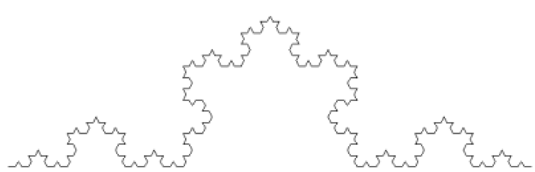
- Prostřední třetinu úsečky nahradíme dvěma stejně velkými úsečkami, takže s původní částí tvoří rovnostranný trojúhelník.



- Nad každou stranou této lomené čáry provedeme stejnou operaci a neustále opakujeme.



atd.



Otázky:

> Jak dlouhá je lomená čára ?
>
> Jak velký obsah nad původní úsečkou vymezí tato lomená čára ?

Pro délku v jednotlivých krocích dostáváme:

1) Na počátku: 1 úsečka o délce jedna
2) Po 1. kroku: 4 úsečky o délce 1/3
3) Po 2. kroku: 16 úseček o délce 1/9
4) Po 3. kroku: 64 úseček o délce 1/27

$\vdots$

n) Po $n$ krocích: $4^n$ úseček o délce $1/3^n$

Limitní přechod:

$$\text{Celková délka lomené čáry je} \quad \lim_{n\to\infty} 4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Pro obsah plochy v jednotlivých krocích dostáváme:

1) Na počátku žádný obsah
2) Po 1. kroku přibude 1 trojúhelník o straně 1/3
3) Po 2. kroku přibude 4 trojúhelníky o straně 1/9
4) Po 3. kroku přibude 16 trojúhelníků o straně 1/27

$\vdots$

n) Po $n$ krocích přibude $4^n$ trojúhelníků o straně délky $1/3^n$

(obsah rovnostranného trojúhelníka o straně $a$ je $S_\triangle = \frac{1}{2}a \cdot v = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$)

Limitní přechod pro celkový obsah plochy pod lomenou čarou:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\frac{1}{3})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot 4^n \cdot (\frac{1}{9})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot (\frac{4}{9})^n$$

= (součet nekonečné geometrické řady s koeficientem $q = \frac{4}{9}$ a prvním členem $\frac{\sqrt{3}}{36}$) =

$$= \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{9}{5} = \frac{\sqrt{3}}{20} \doteq 0,08660254.$$

Závěr: Objekt má konečný obsah, ale nekonečný povrch!

Poznámka: Podobně je tomu v případě měření délky pobřeží.

## Definice dimenze křivky

- Uvažujeme měření délky pomocí měřidla délky $r$.
- Aproximace délky křivky je dána počtem kroků měřidla podél křivky ($N$) vynásobené délkou měřidla $E(r) = N \cdot r$
- Pro hladké křivky konverguje $E(r)$ pro $r \to 0_+$ ke konečnému číslu ... délce křivky ... dimenze 1 (stačí popsat pouze vzdálenost od nějakého pevného bodu).
- Pro fraktály $E(r)$ diverguje k $+\infty \Rightarrow$ dimenze je <u>větší než 1</u>.
- Chceme najít hodnotu $D_H$ takovou, že $N \cdot r^{D_H}$ je konečné nenulové číslo.

$D_H$ ... <u>fraktální dimenze křivky</u> (Hausdorfova dimenze).

Pro $r \to 0_+$ a $N \to \infty$ má platit $(0 < c < \infty)$:

$$
\begin{aligned}
N \cdot r^{D_H} &= c \qquad / \log \\
\log(N \cdot r^{D_H}) &= \log c \\
\log N + D_H \log r &= \log c \\
D_H &= \frac{\log c - \log N}{\log r} \\
&\text{pro } r \to 0_+ \text{ rovno nule}
\end{aligned}
$$

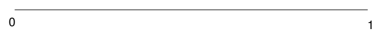
$$
D_H = \frac{\log N - \log c}{\log \frac{1}{r}} = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{\log c}{\log r}}_{= 0 \ \text{pro}\ r \to 0_+}
$$

$$
\boxed{D_H = \lim_{r \to 0_+,\ N \to \infty} \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}}
$$

Příklady:

1) **Úsečka délky 1**

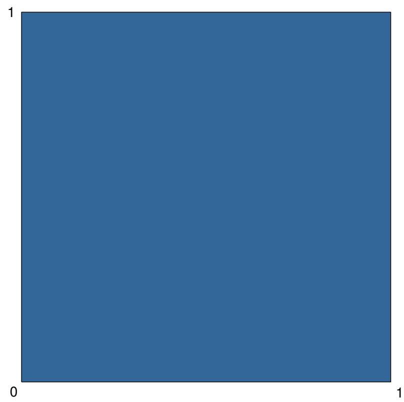
| měřidlo délky $r$ | počet kroků měření $N$ |
|---|---|
| $r = 1$ | $N = 1$ |
| $r = 1/2$ | $N = 2$ |
| $r = 1/4$ | $N = 4$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $r = 1/2^n$ | $N = 2^n$ |




$$\frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \frac{\log 2^n}{\log 2^n} = 1 \ldots \text{(dimenze je 1)}$$

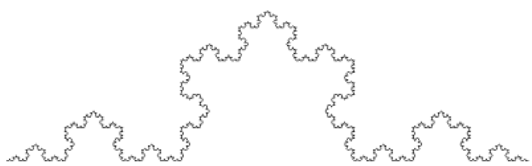
2) **Vyplněný čtverec o straně délky 1**

| měřidlo délky $r$ | počet kroků měření |
|---|---|
| $r = 1$ | $N = 1$ |
| $r = 1/2$ | $N = 4$ |
| $r = 1/4$ | $N = 16$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $r = 1/2^n$ | $N = 4^n$ |




$$\frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \frac{\log 2^{2n}}{\log 2^n} = 2 \ldots \text{(dimenze je 2)}$$

3) **Kochova křivka**



v $n-$tém kroku jsme měli $\underbrace{4^n}_{=N}$ úseček o délce $\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{=r}$

$$D_H = \lim_{N\to\infty r\to 0_+} \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq \underline{1,2619}$$

(neceločíselná hodnota dimenze)

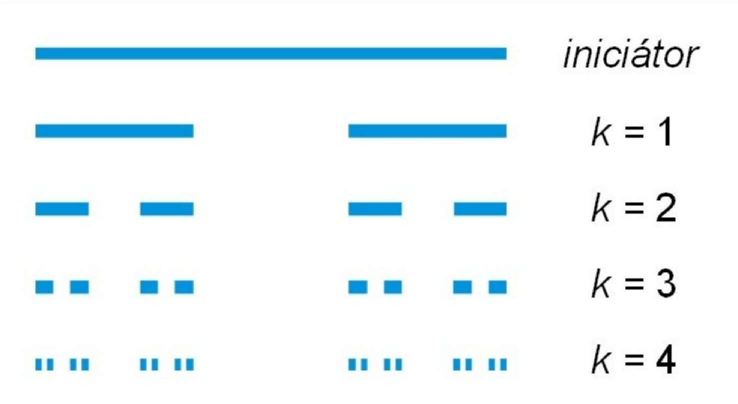
Jiný příklad jednoduché fraktálové struktury:

4) **Cantorovo diskontinuum**

Na počátku vezmeme úsečku.

V 1. kroku vypustíme prostřední $\frac{1}{3}$.

V každém dalším kroku vypouštíme prostřední $\frac{1}{3}$ z každé úsečky.




| | délka | počet úseček | délka úsečky |
|---|---|---|---|
| na počátku | 1 | 1 | 1 |
| po 1. kroku | 2/3 | 2 | 1/3 |
| po 2. kroku | $(2/3)^2$ | 4 | 1/9 |
| po 3. kroku | $(2/3)^3$ | 8 | 1/27 |
| ⋮ | | | |
| po $n-$tém kroku | $(2/3)^n$ | $2^n$ | $(1/3)^n$ |

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{délka je } 0$$

<u>Otázka</u>: Jaká je fraktálová dimenze?

$$D_H = \lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} \doteq 0,6309$$

## Juliovy množiny

Vytvářeny pomocí iteračního předpisu pro $z_n \in \mathbb{C}$:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \qquad z_n, c \in \mathbb{C}$$

$z_n$ ... reprezentuje pozici bodu v komplexní rovině

$c$ ... lib. zvolená konstanta, která je pro konkrétní obrazec stejná

$$\text{Juliova množina} \qquad J = \{z_0 \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} z_n \neq \infty\}$$

Prahový poloměr divergence $z_0$

Při praktickém počítání máme pouze konečný počet iterací, ze kterých musíme usoudit, zda posloupnost konverguje či nikoliv.

Platí: Pokud $\exists n \in N : |z_n| > r(c) = \max\{|c|, 2\}$. Potom posloupnost diverguje.

Důkaz:

$$|z_n| > 2 \ \text{ a } \ |z_n| > |c| \quad \Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 : |z_n| = 2 + \varepsilon$$

Dále použijeme $\triangle$ nerovnost:

$$|z_n^2| = |z_n^2 + c - c| \leq |z_n^2 + c| + |c| \quad \Rightarrow \quad |z_n^2 + c| \geq |z_n^2| - |c|$$

Potom

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \geq |z_n^2| - |c| \geq |z_n|^2 - |c| \geq |z_n|^2 - |z_n| = |z_n|(|z_n| - 1) > |z_n| \cdot (1 + \varepsilon)$$

$$|z_{n+1}| > 2 + 2\varepsilon$$

v dalším kroku se abs. hodnota $z_n$ více zvětšila ($>$ než $\varepsilon$), tj. po dosazení dostaneme

$$|z_n| > (1 + \varepsilon)^n \cdot |z_0| \quad \Rightarrow \quad z_n \ \underline{\text{diverguje}} \ .$$

Vykreslení

- určíme oblast v komplexní rovině

$$a \leq \operatorname{Re} z \leq b, \ \ c \leq \operatorname{Im} z \leq d$$

- zvolíme diskretizační krok a pro zadanou konstantu $c$ a postupně pro každý bod $z_0$ počítáme podle iterační formule $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Jestliže $|z_n|$ překročí hodnotu $\max\{|c|, 2\}$ řekneme, že posloupnost diverguje. Pokud po zadaném počtu iterací nepřekročí $|z_n|$ hodnotu $\max\{|c|, 2\}$, rozhodneme, že posloupnost konverguje. Body v komplexní rovině obarvíme podle toho zda posloupnost konvergovala či divergovala.

Příklady:

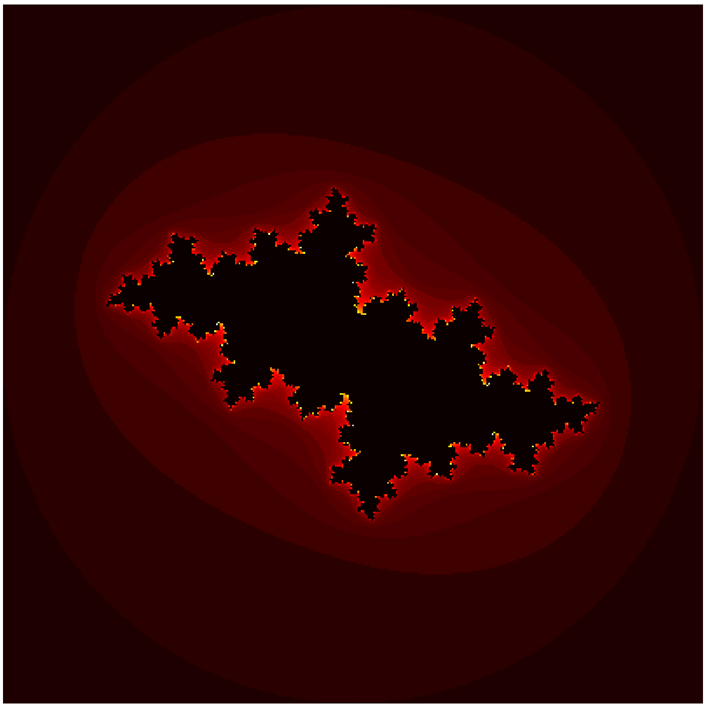
Juliovy množiny pro různé hodnoty $c$
na oblasti $-2 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, \ -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 2.$

1)

Juliova mnozina pro   c=−0.097−0.64872i

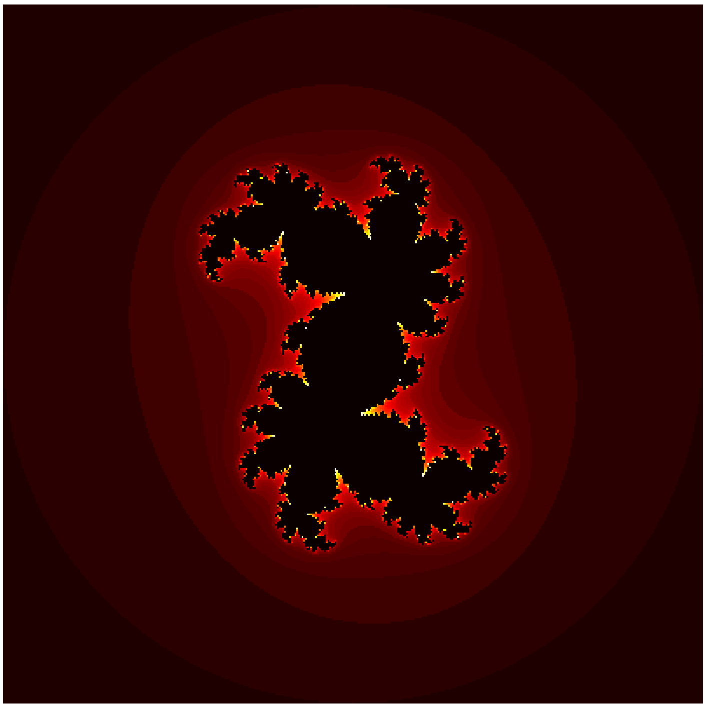
2)

Juliova mnozina pro   c=−0.504+0.50197i



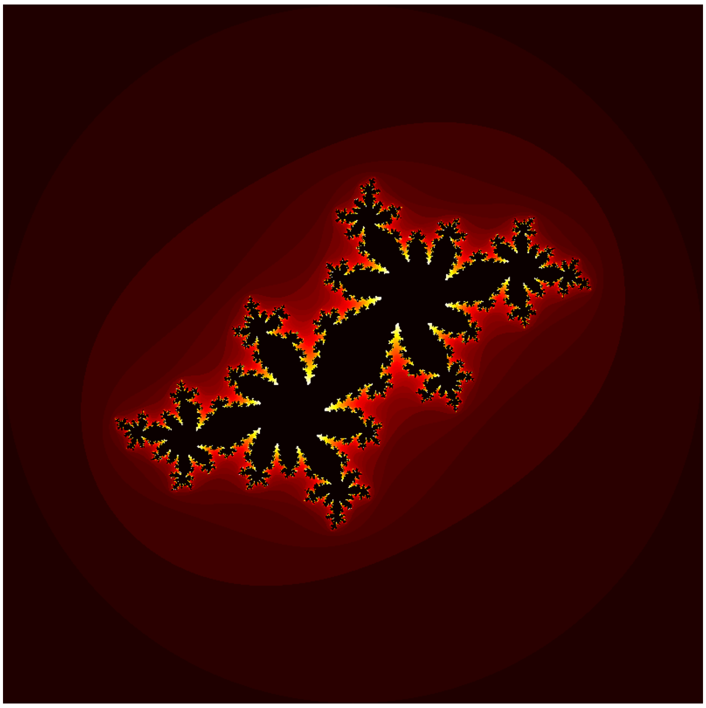
3)

Juliova mnozina pro c=0.37688+0.21646i



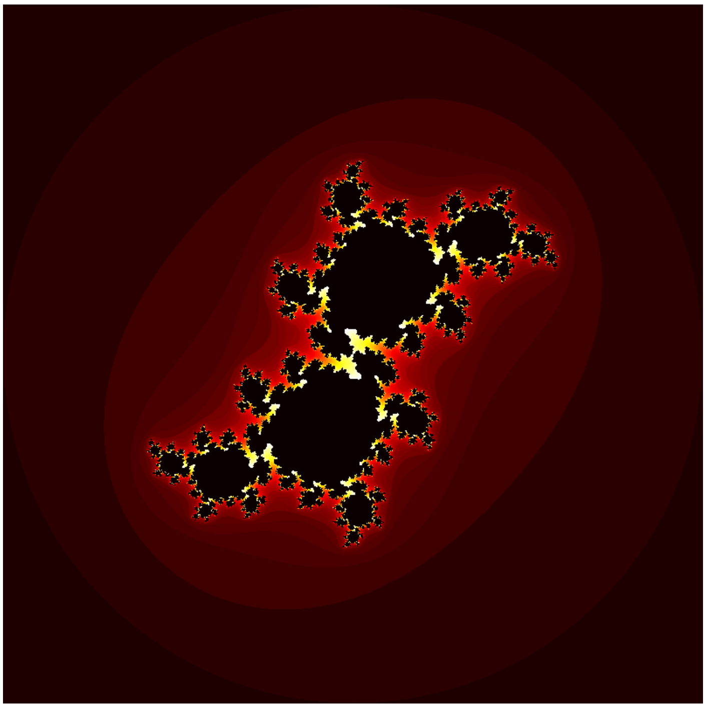
4)

Juliova mnozina pro c=−0.3555−0.62008i



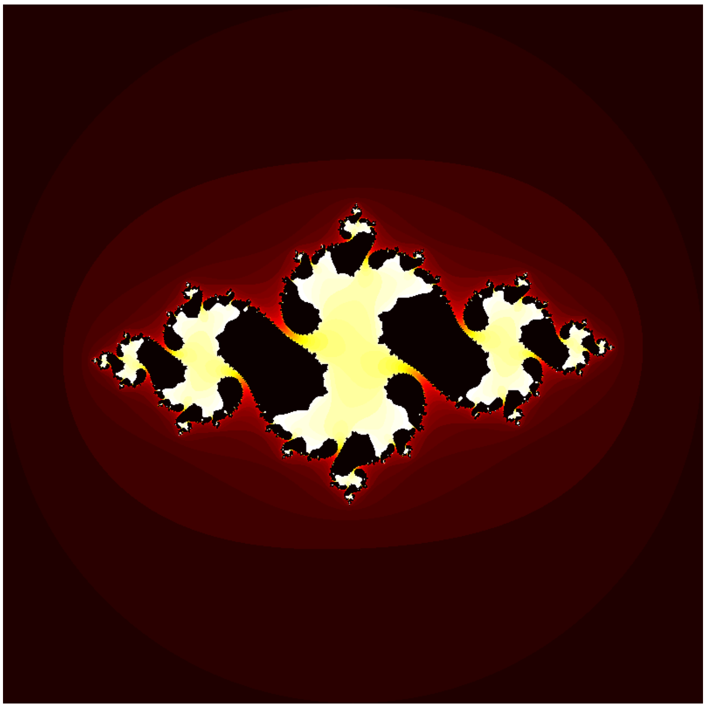
5)

Juliova mnozina pro   c=0.060124−0.62423i



6)

Juliova mnozina pro   c=−0.7515−0.072i



## Mandelbrotova množina

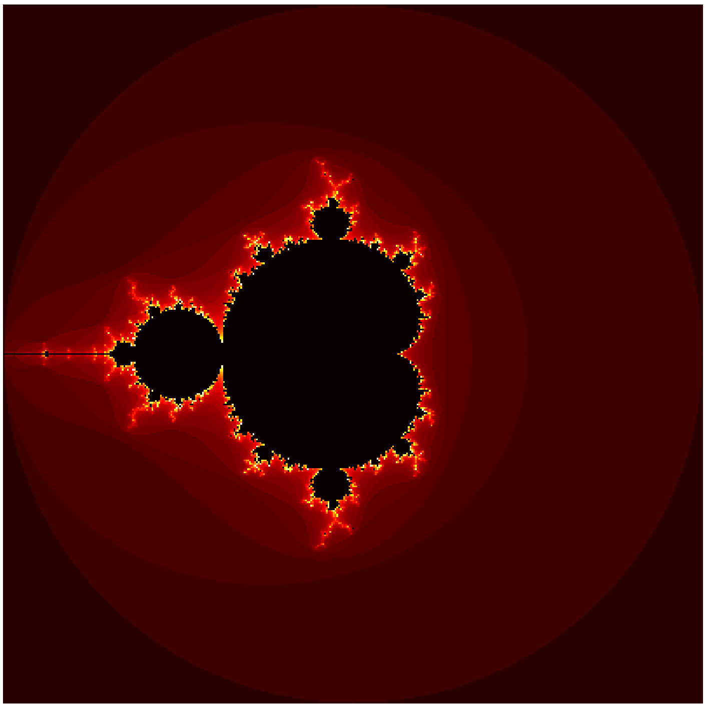
Opět využíváme iterační předpis

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \qquad z_n, c \in \mathbb{C}$$

ovšem zde volíme $z_0 = 0$ a konstanta $c$ reprezentuje pozici bodu v komplexní rovině

$$\text{Mandelbrotova množina} \qquad M = \{c \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} z_n \neq \infty\}$$

Příklad: Mandelbrotova množina na oblasti $-2 \leq \operatorname{Re} z \leq 2,\ -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 2.$



Příklad: Mandelbrotova množina na oblasti $-0.65 \leq \mathrm{Re}\, z \leq -0.42,\ 0.51 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 0.74.$