

VZOR

Řešení 1. písemné práce z Numerických metod

Jméno a příjmení:

Přezdívk: Osobní číslo:

Příklad 1.

a) Pro řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

máme použít metodu SOR.

Pro ruční počítání je vhodné nejprve najít předpis pro Gauss-Seidelovu metodu.

GS:

$$\begin{aligned} x_1^{K+1} &= \frac{1}{3} (1 - x_2^K) \\ x_2^{K+1} &= \frac{1}{4} (2 - x_1^{K+1}) \\ x_3^{K+1} &= \frac{1}{5} (3 - x_2^{K+1}) \end{aligned}$$

Vztahy pro metodu SOR získáme pomocí faktu, že $K + 1$ -ní iterace vektoru řešení $\mathbf{x}^{K+1}$ je lineární kombinací předchozí K -té iterace a $K + 1$ iterace získané Gauss-Seidelovou metodou, tj.

$$\mathbf{x}^{K+1} = \omega \mathbf{x}_{\text{GS}}^{K+1} + (1 - \omega) \mathbf{x}^K.$$

SOR:

$$\begin{aligned} x_1^{K+1} &= \frac{1.05}{3} (1 - x_2^K) - 0.05 x_1^K \\ x_2^{K+1} &= \frac{1.05}{4} (2 - x_1^{K+1}) - 0.05 x_2^K \\ x_3^{K+1} &= \frac{1.05}{5} (3 - x_2^{K+1}) - 0.05 x_3^K \end{aligned}$$

Čísla budeme zapisovat na 4 desetinná místa. V následující tabulce jsou získané iterace.

K	$\mathbf{x}^K$	$\mathbf{x}^K - \mathbf{x}^{K-1}$	$\ \mathbf{x}^K - \mathbf{x}^{K-1}\ $
0	0.0000 0.0000 0.0000		
1	0.3500 0.4331 0.5390	0.3500 0.4331 0.5390	0.5390
2	0.1809 0.4558 0.5073	-0.1690 0.0227 -0.0317	0.1690
3	0.1814 0.4545 0.5091	0.0004 -0.0012 0.0018	0.0018

Pro jednoduchost byla použita maximová norma, tj.

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_i |x_i|$$

Přibližné řešení je $\mathbf{x}^3 = [0.1814, 0.4545, 0.5091]^T$.

b) Aitkenova extrapolační formule slouží k urychlení konvergence iteračních metod, které mají lineární rychlost konvergence, tj. platí

$$\exists q \in (0, 1), L \geq 0 : \underbrace{\|\mathbf{x}^{K+1} - \mathbf{x}^*\|}_{\|\mathbf{e}^{K+1}\|} \leq q \underbrace{\|\mathbf{x}^K - \mathbf{x}^*\|}_{\|\mathbf{e}^K\|}, \forall K \geq L.$$

Po vydělení dostaneme

$$\frac{\|\mathbf{e}^{K+1}\|}{\|\mathbf{e}^K\|} \leq q.$$

Předpokládejme, že je tento podíl přibližně konstantní pro $K \geq L$. Potom lze odvodit vztah (pro jednotlivé složky - pro jednoduchost neuvádíme index i , příslušná složka přesného řešení je označena α)

$$\frac{x^{K+1} - \alpha}{x^K - \alpha} \approx \frac{x^K - \alpha}{x^{K-1} - \alpha}.$$

Odtud po úpravě

$$(x^{K+1} - \alpha)(x^{K-1} - \alpha) \approx (x^K - \alpha)^2$$

$$x^{K+1} x^{K-1} - (x^{K+1} + x^{K-1})\alpha + \underline{\alpha}^2 \approx x^{K^2} - 2x^K\alpha + \underline{\alpha}^2$$

$$x^{K+1} x^{K-1} - x^{K^2} \approx \alpha (x^{K+1} - 2x^K + x^{K-1})$$

$$\alpha \approx \frac{x^{K+1} x^{K-1} - x^{K^2}}{x^{K+1} - 2x^K + x^{K-1}}.$$

c) Pro iterační matici $\mathbf{H}_{GS}$ Gauss-Seidelovy metody pro soustavu s maticí $\mathbf{B}$ platí

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{H}_{GS} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U}$$

Jelikož je matice $\mathbf{U}$ nulová, musí být nulová i matice $\mathbf{H}_{GS}$.

Z toho plyne, že přesné řešení získáme hned v první iteraci, protože

$$\mathbf{x}^{K+1} = \mathbf{H}_{GS} \mathbf{x}^K + \mathbf{g}_{GS} \mathbf{b} = \mathbf{g}_{GS} \mathbf{b} \quad \forall K \in \mathbb{N}.$$

Gauss-Seidelova metoda je konzistentní, tj.

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{H}_{GS} \mathbf{x}^* + \mathbf{g}_{GS} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{K+1} = \mathbf{H}_{GS} \mathbf{x}^K + \mathbf{g}_{GS} \mathbf{b}$$

Odečtením získáme

$$\mathbf{x}^{K+1} - \mathbf{x}^* = \mathbf{H}_{GS} (\mathbf{x}^K - \mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

(Spektrální poloměr matice $\mathbf{H}_{GS}$ musí být také nulový, tj. $\varrho(\mathbf{H}_{GS}) = 0$.) K získání řešení, které

je zatíženo chybou menší než 10^{-3} stačí 1 iterace.