# CVIČENÍ č. 10

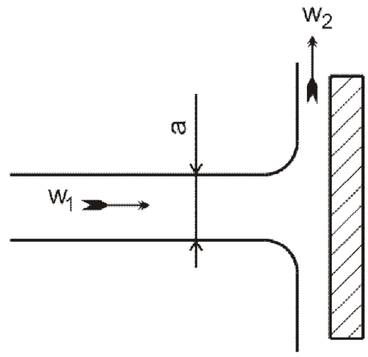
# VĚTA O ZMĚNĚ TOKU HYBNOSTI

**Stojící povrch, Pohybující se povrch**

**Příklad č. 1:**

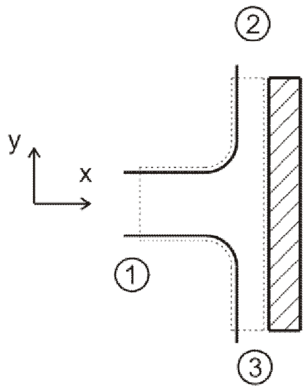
Vodorovný volný proud vody čtvercového průřezu o straně *25 cm* dopadá kolmo na rovinnou desku. Určete velikost síly, kterou proud na desku působí. Rychlost vstupního proudu je $11\ m.s^{-1}$.

*Zadané hodnoty:* a = 25 cm, w = 11 m.s$^{-1}$, ρ = 1000 kg.m$^{-3}$
*Vypočtěte:* F




**ŘEŠENÍ:**

Zvolíme kontrolní plochu a souřadný systém




Nejprve rozepíšeme rovnici ve směru osy *x*. Na levé straně rovnice je výsledná síla, na pravé straně je rozdíl hybností. U každého člena hybnosti jsou vždy dvě znaménka. První je dáno kontrolní plochou (na vstupu je kladné znaménko, na výstupu znaménko záporné). Druhé znaménko je dáno souřadným systémem.

$$F_x = + + \dot{m}_1 \cdot w_{1x} - +\dot{m}_2 \cdot w_{2x} - +\dot{m}_3 \cdot w_{3x}$$

Ve směru osy $x$ žádná tekutina neodtéká, rychlost ve směru osy $x$ na výstupu *(2* a *3)* je tedy rovna nule. Na vstupu do kontrolní oblasti teče kapalina pouze ve směru osy $x$, rychlost $w_{1x}$ je tedy rovna rychlosti $w_1$. Rovnice tedy bude mít tvar:

$$F_x = \dot{m}_1 \cdot w_1 = \rho \cdot S \cdot w_1 \cdot w_1 = \rho \cdot a^2 \cdot w_1^2 = 1000 \cdot 0{,}25^2 \cdot 11^2 = 7562{,}5\ N$$

Proud dopadá na desku ve vodorovné rovině, a proto se na desce rozdělí na dva proudy stejné šířky. Hmotnostní průtok obou těchto proudů je stejný, také plochy, kterými voda protéká, jsou stejné.

$$F_y = + + \dot{m}_1 \cdot w_{1y} - + \dot{m}_2 \cdot w_{2y} - - \dot{m}_3 \cdot w_{3y} \quad |\dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

$$F_y = \dot{m}_1 \cdot w_{1y} - \dot{m}_2 \cdot w_{2y} + \dot{m}_2 \cdot w_{3y}$$

$$F_y = \dot{m}_1 \cdot 0 - \dot{m}_2 \cdot w_{2y} + \dot{m}_2 \cdot w_{3y}$$

$$F_y = -\rho \cdot S_2 \cdot w_2 \cdot w_{2y} + \rho \cdot S_2 \cdot w_2 \cdot w_{3y}$$

Vzhledem k tomu, že na výstupu veškerá tekutina odtéká pouze ve směru osy $y$, platí:

$$w_{2y} = w_2\ ,\ w_{3y} = w_3$$

$$F_y = -\rho \cdot S_2 \cdot w_2 \cdot w_2 + \rho \cdot S_3 \cdot w_2 \cdot w_3$$

Ze zákona zachování hmoty musí platit:

$$w_2 = w_3$$

$$F_y = -\rho \cdot S_2 \cdot w_2^2 + \rho \cdot S_2 \cdot w_2^2 = 0\ N$$

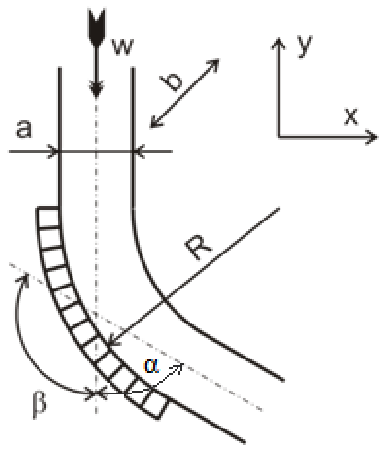
Ve směru osy *y* je výsledná síla nulová, na desku tedy působí tekutina pouze ve směru osy *x*. Výsledná síla je tedy rovna síle $F_x$.

$$F = F_x = \mathbf{7562,5\ N}$$

**Příklad č. 2:**

Svislý proud vody dopadá na ohnutou desku, na které se ohýbá o *120°*. Určete velikost a směr výsledné síly na tuto desku, má-li proud obdélníkový průřez *5 x 3 cm* a rychlost *8 m.s*$^{-1}$. Poloměr zakřivení desky je *1 m*. Zanedbejte vliv tíhy.

*Zadané hodnoty:* a = 5 cm, b = 3 cm, β = 120°, R = 1 m, w = 8 m.s$^{-1}$, ρ = 1000 kg.m$^{-3}$
*Vypočtěte:* F, δ




**ŘEŠENÍ:**

Ve směru osy *x* je síla rovna:

$$F_x = + + \dot{m}_1 \cdot w_{1x} - +\dot{m}_2 \cdot w_{2x}$$

$$w_{1x} = 0$$

$$w_{2x} = w_2 \cdot sin\alpha = w \cdot sin\alpha \quad |\alpha = 180 - \beta$$

$$F_x = \dot{m}_1 \cdot 0 - \dot{m}_2 \cdot w \cdot sin\alpha = -S \cdot w \cdot \rho \cdot w \cdot sin\alpha = -a \cdot b \cdot \rho \cdot w^2 \cdot sin\alpha$$

$$F_x = -0{,}05 \cdot 0{,}03 \cdot 1000 \cdot 8^2 \cdot sin(180° - 120°) = -83{,}14\ N$$

Ve směru osy *y*:

$$F_y = + - \dot{m}_1 \cdot w_{1y} - -\dot{m}_2 \cdot w_{2y} \quad |w_{1y} = w_1 = w$$

$$w_{2y} = w_2 \cdot cos\alpha = w \cdot cos\alpha$$

$$F_y = -\dot{m}_1 \cdot w + \dot{m}_2 \cdot w \cdot cos\alpha \quad |\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

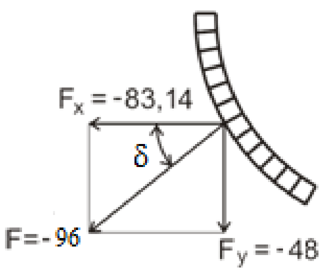
$$F_y = \dot{m} \cdot (-w + w \cdot cos\alpha) = \dot{m} \cdot w \cdot (cos\alpha - 1) = a \cdot b \cdot \rho \cdot w^2 \cdot (cos\alpha - 1)$$

$$F_y = 0{,}05 \cdot 0{,}03 \cdot 1000 \cdot 8^2 \cdot (\cos 60 - 1) = -48\ N$$

Výslednou sílu zjistíme sečtením složek síly ve směru osy *x* a *y*:

$$F = \pm\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \pm\sqrt{(-83{,}14)^2 + (-48)^2} = \pm\mathbf{96\ N}$$

Nyní zjistíme směr výsledné síly.



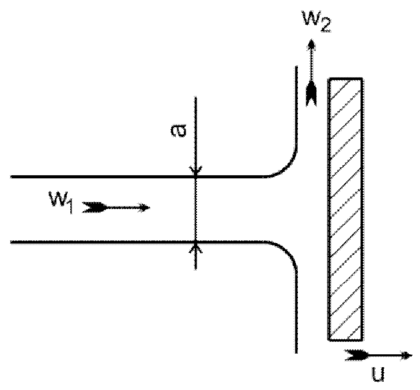

$$tg\delta = \frac{F_y}{F_x}$$

$$\delta = arctg\frac{F_y}{F_x} = arctg\frac{-48}{-83{,}14} = \mathbf{30°}$$

**Příklad č. 3:**

Určete sílu vznikající působením proudu na desku z *Příkladu 1.*, jestliže se deska pohybuje rychlostí *3 m.s$^{-1}$* ve směru proudu.

*Zadané hodnoty:* a = 25 cm, $c_1$ = 11 m.s$^{-1}$, u = 3 m.s$^{-1}$, ρ = 1000 kg.m$^{-3}$
*Vypočtěte:* F




**ŘEŠENÍ:**

Pohybuje-li se plocha unášivou rychlostí *u*, zmenší se množství tekutiny, které dopadne na desku za jednu sekundu a sníží se i rychlost, kterou tekutina dopadá na stěnu. Při výpočtu síly nepočítáme s rychlostí absolutní *c*, kterou tekutina vtéká (vytéká), nýbrž rychlosti relativní *w*.

V našem případě se deska pohybuje rychlostí *u = 3 m.s$^{-1}$*. Výsledná síla na desku je opět dána rozdílem hybností. Kontrolní objem zůstává stejný a je spojen s deskou – a s ní se pohybuje. Proto vstupní rychlost do kontrolního objemu je dána rozdílem *(c - u)* – jedná se o relativní rychlost *w*, kterou proud na desku dopadá. Taktéž rychlost proudění opouštějící kontrolní plochu je rychlost relativní.

Pro směr *x* můžeme psát:

$$F_x = + + \dot{m}_1 \cdot w_{1x} - + \dot{m}_2 \cdot w_{2x} - + \dot{m}_3 \cdot w_{3x}$$

$$F_x = \dot{m}_1 \cdot (c_{1x} - u_x) - \dot{m}_2 \cdot (c_{2x} - u_x) - \dot{m}_3 \cdot (c_{3x} - u_x) \; \Bigg| \; \begin{matrix} \dot{m}_2 = \dot{m}_3 \; ; \; c_{2x} = c_{3x} = u_x = u \; ; \\ c_{1x} = c_1 \end{matrix}$$

$$F_x = \dot{m}_1 \cdot (c_1 - u) - \dot{m}_2 \cdot (u - u) - \dot{m}_2 \cdot (u - u) = \dot{m}_1 \cdot (c_1 - u)$$

$$F_x = \rho \cdot a^2 \cdot (c_1 - u) \cdot (c_1 - u) = \rho \cdot a^2 \cdot (c_1 - u)^2$$

$$F_x = 1000 \cdot 0{,}25^2 \cdot (11 - 3)^2 = 4000\ N$$

Unášivá rychlost ve směru *y* je rovna nule *($u_y = 0$)*.

$$F_y = + + \dot{m}_1 \cdot w_{1y} - +\dot{m}_2 \cdot w_{2y} - -\dot{m}_3 \cdot w_{3y} \ \ |\dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

$$F_y = \dot{m}_1 \cdot w_{1y} - \dot{m}_2 \cdot w_{2y} + \dot{m}_2 \cdot w_{3y} \ \ |w_{1y} = 0$$

$$F_y = \dot{m}_1 \cdot 0 - \dot{m}_2 \cdot w_{2y} + \dot{m}_2 \cdot w_{3y}$$

$$F_y = -\rho \cdot S_2 \cdot w_2 \cdot w_{2y} + \rho \cdot S_2 \cdot w_2 \cdot w_{3y} \ \ |w_{2y} = w_2\ ;\ w_{3y} = w_3$$

$$F_y = -\rho \cdot S_2 \cdot {w_2}^2 + \rho \cdot S_2 \cdot w_2 \cdot w_3 \ |w_2 = w_3$$

$$F_y = -\rho \cdot S_2 \cdot {w_2}^2 + \rho \cdot S_2 \cdot {w_2}^2 = 0\ N$$

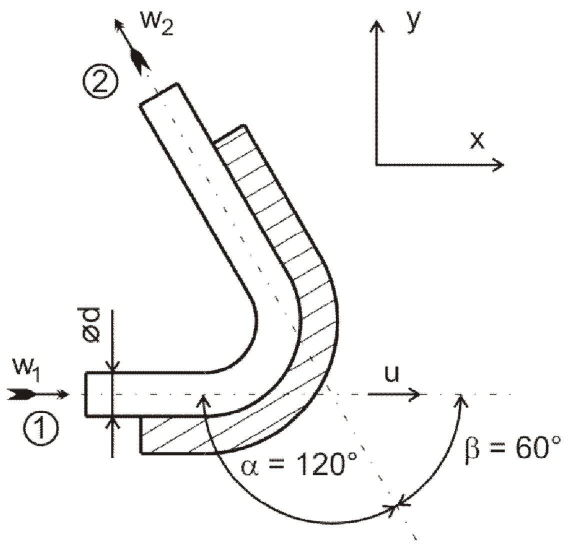
Síla $F_y$ je stejně jako v *Příkladu 1.* rovna nule. To znamená, že výsledná síla je:

$$F = F_x = \mathbf{4000\ N}$$

**Příklad č. 4:**

Proud vody o průměru *12 cm* má rychlost *6,5 m.s⁻¹* a dopadá na zahnutou lopatku, která se pohybuje stejným směrem rychlostí *4 m.s⁻¹*. Lopatka ohýbá vodní proud o *120°*. Určete sílu, kterou proud působí na lopatku.

*Zadané hodnoty:* d = 12 cm, $c_1 = 6{,}5\ m.s^{-1}$, $u = 4\ m.s^{-1}$, $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$, $\rho = 1000\ kg.m^{-3}$
*Vypočtěte:* F




**ŘEŠENÍ:**

Lopatka se pohybuje, a proto při výpočtech musíme uvažovat relativní rychlosti vody při vstupu a výstupu z lopatky.

$$F_x = + + \dot{m}_1 \cdot w_{1x} - -\dot{m}_2 \cdot w_{2x} \ \ |\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \ ; \ w_{1x} = w_1$$

$$F_x = \dot{m}_1 \cdot w_1 + \dot{m}_2 \cdot w_{2x} = \dot{m} \cdot (w_1 + w_{2x}) \ \ |w_{2x} = w_2 \cdot cos\beta$$

$$F_x = \dot{m} \cdot (w_1 + w_2 \cdot cos\beta) \ \ |w_1 = w_2$$

$$F_x = \dot{m} \cdot (w_1 + w_1 \cdot cos\beta) = \dot{m} \cdot w_1 \cdot (1 + cos\beta) = \dot{m} \cdot (c_{1x} - u_x) \cdot (1 + cos\beta)$$

$$F_x = S \cdot w_1 \cdot \rho \cdot (c_{1x} - u_x) \cdot (1 + cos\beta)$$

$$F_x = S \cdot (c_{1x} - u_x) \cdot \rho \cdot (c_{1x} - u_x) \cdot (1 + cos\beta) = S \cdot \rho \cdot (c_1 - u)^2 \cdot (1 + cos\beta)$$

$$F_x = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \rho \cdot (c_1 - u)^2 \cdot (1 + cos\beta) = \frac{\pi \cdot 0{,}12^2}{4} \cdot 1000 \cdot (6{,}5 - 4)^2 \cdot (1 + cos60) \doteq 106\ N$$

Pro směr *y* *($u_y = 0$)*:

$$F_y = + + \dot{m}_1 \cdot w_{1y} - +\dot{m}_2 \cdot w_{2y}\ \ |\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

$$F_y = \dot{m} \cdot \left(w_{1y} - w_{2y}\right)\ \left|w_{1y} = 0\right.$$

$$F_y = -\dot{m} \cdot w_{2y}\ \left|w_{2y} = w_2 \cdot sin\beta\ ;\ \ w_1 = w_2\right.$$

$$F_y = -\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot w_1 \cdot \rho \cdot w_1 \cdot sin\beta = -\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (c_1 - u)^2 . sin\beta \cdot \rho$$

$$F_y = -\frac{\pi \cdot 0{,}12^2}{4} \cdot (6{,}5 - 4)^2 \cdot sin60 \cdot 1000 = -61{,}2\ N$$

Vektorovým součtem složek sil $F_x$ a $F_y$ získáme výslednou sílu, kterou proud působí na lopatku.

$$F = \pm\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \pm\sqrt{106^2 + (-61{,}2)^2} = \pm\mathbf{122{,}4\ N}$$