CVIČENÍ č. 11

ZTRÁTY PŘI PROUDĚNÍ POTRUBÍM

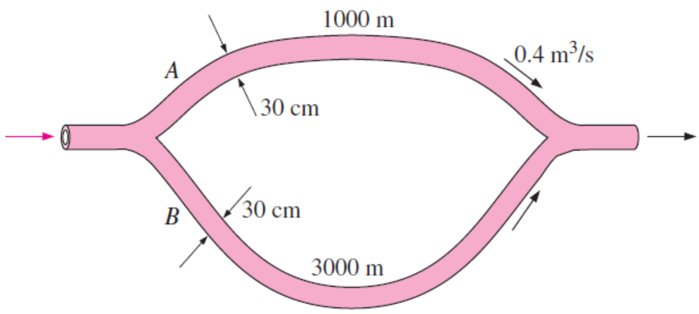
Místní ztráty, Tlakové ztráty

Příklad č. 1:

Jistá část potrubí rozvodného systému vody se skládá ze dvou paralelně uspořádaných větví. Obě potrubí mají průřez *30 cm* a proudění je plně turbulentní. Jedná z větví *(potrubí A)* je *1000 m* dlouhá, zatímco druhá větev *(potrubí B)* má délku *3000 m*. V případě, že průtok přes potrubí A je *0,4* $m^3.s^{-1}$, určete průtok v potrubí *B*, zanedbejte při tom místní ztráty, a předpokládejte teplotu vody *15°C*. Dokažte, že proudění je plně turbulentní a třecí koeficient není závislý od Reynoldsova čísla.

Zadané hodnoty: D_A = 30cm, D_B = 30 cm, $\dot{V}_A = 0{,}4\ m^3.s^{-1}$, L_A = 1 km, L_B = 3 km, t_{vody} = 15 °C, $\rho = 1000\ kg.m^{-3}$, $\eta = 1{,}138.10^{-3}$ Pa.s, $\varepsilon = 2{,}6.10^{-4}$m

Vypočtěte: $\dot{V}_B$, $\lambda \neq f(Re)$



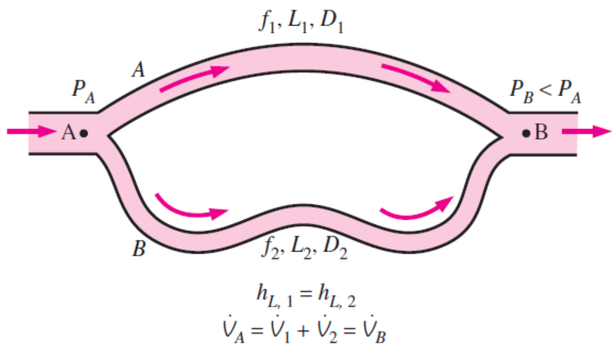
ŘEŠENÍ:

Ze znalosti objemového průtoku určíme rychlost proudění vody v potrubí *A*:

$$\dot{V}_A = w_A \cdot S_A \rightarrow w_A = \frac{\dot{V}_A}{S_A} = \frac{\dot{V}_A}{\frac{\pi \cdot D_A{}^2}{4}} = \frac{0{,}4}{\frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4}} = 5{,}66\ m.s^{-1}$$

Pomocí známého vztahu z teorie mechaniky tekutin pro tlakové ztráty v potrubí kruhového průřezu vypočítáme rychlost proudění v druhém potrubí, přičemž budeme vycházet ze skutečnosti, že celková tlaková ztráta (třecí) mezi úsekem kde se potrubí rozdělují a spojují je konstantní (viz obrázek níže).

$$p_z = \rho \cdot e_z = \rho \cdot g \cdot h_z = \rho \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{w^2}{2}$$



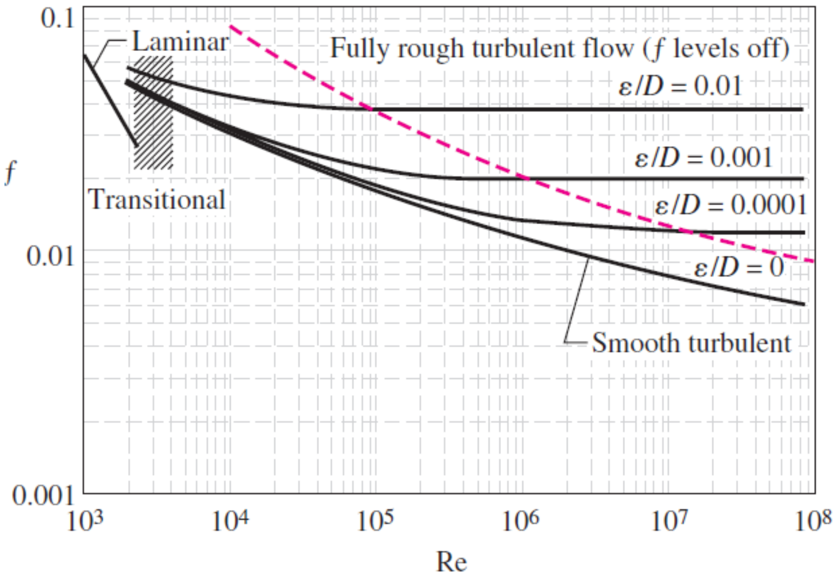
$$p_z = \rho \cdot \lambda_A \cdot \frac{L_A}{D_A} \cdot \frac{{w_A}^2}{2} = \rho \cdot \lambda_B \cdot \frac{L_B}{D_B} \cdot \frac{{w_B}^2}{2} = konst.$$

Pro náš konkrétní případ můžeme aplikovat podmínky $D_A = D_B$ a $\lambda_A = \lambda_B$ (λ je koeficient tření v anglické literatuře označován *f*) a tedy rychlost a objemový průtok v potrubí *B* bude následující:

$$w_B = w_A \cdot \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} = 5{,}66 \cdot \sqrt{\frac{1000}{3000}} = 3{,}26\ m.s^{-1}$$

$$\dot{V}_B = w_B \cdot S_B = w_B \cdot \frac{\pi \cdot {D_B}^2}{4} = 3{,}26 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} = \mathbf{0{,}23\ m.s^{-1}}$$

U turbulentního proudění kapaliny je koeficient tření λ závislý od Reynoldsova čísla a relativní drsnosti (ε/D). Ale při vysokých hodnotách *Re* můžeme vidět (viz graf níže), že koeficient tření se při změně *Re* již nemění (v určitém intervalu) a tudíž není závislý na *Re*, co dokážeme výpočtem *Re* v potrubí *B*. Výpočet *Re* v potrubí *A* není nutný, protože v kratším potrubí o stejných parametrech bude *Re* nabývat ještě vetší hodnoty.



$$Re_B = \frac{w_B \cdot D_B}{\nu} = \frac{w_B \cdot D_B \cdot \rho}{\mu} = \frac{3{,}26 \cdot 0{,}3 \cdot 1000}{1{,}138 \cdot 10^{-3}} = \; 859\,402{,}5$$

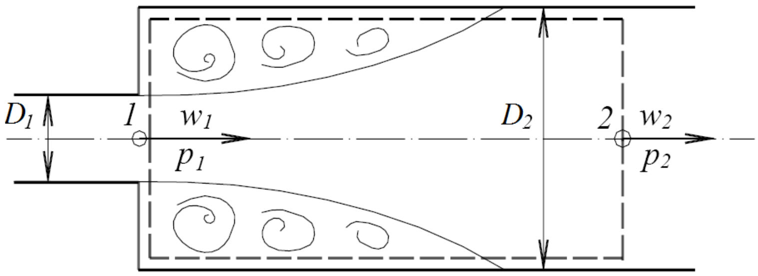
$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{2{,}6 \cdot 10^{-4}}{0{,}3} = 0{,}0008666$$

Příklad č. 2:

Vodní potrubí se náhle rozšiřuje z průměru *15 cm* na *20 cm*. Tlak v užší části potrubí je *120 kPa* a průměrná rychlost proudící vody přes v této části je *10 m.s⁻¹*. Proudění je turbulentní. Uvážením rovnice kontinuity, VZTH a Bernoulliho rovnice dokažte, že ztrátový koeficient pro náhlé rozšíření proudu je $\xi = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2$. Vypočtěte tlak p_2.

Zadané hodnoty: D_1 = 15 cm, D_2 = 20 cm, p_1 = 120 kPa, w_1= 10 $m.s^{-1}$, ρ = 1000 $kg.m^{-3}$

Vypočtěte: ξ, p_2



ŘEŠENÍ:

Při náhlém rozšíření průřezu se odtrhne proud kapaliny od stěn a vytvoří se víry (viz. obrázek). Tuto ztrátu lze vypočítat použitím věty o změně toku hybnosti (VZTH), obyčejné Bernoulliovy rovnice beze ztrát a rovnice kontinuity. Zavedeme kontrolní plochu tak, aby rozšíření proudu na zvětšený průřez proběhlo uvnitř kontrolní plochy (čárkovaná čára). Z VZTH, která respektuje ztráty, se vypočte tlak p_2 a z Bernoulliho rovnice, jež naopak ztráty zanedbává, se určí teoretický tlak p_{2t}. Tlaková ztráta je dána rozdílem teoretického a skutečného tlaku na výstupu z kontrolní plochy.

Ze znalostí z předchozího cvičení, kde jsme probírali VZTH, můžeme napsat:

$$\Sigma F = \Sigma H_{vstup} - \Sigma H_{výstup}$$

$$-p_1 \cdot S_2 + p_2 \cdot S_2 = + + H_1 - +H_2$$

$$p_2 \cdot S_2 - p_1 \cdot S_2 = \dot{m}_1 \cdot w_1 - \dot{m}_2 \cdot w_2$$

$$p_2 \cdot S_2 - p_1 \cdot S_2 = \rho \cdot S_1 \cdot {w_1}^2 - \rho \cdot S_2 \cdot {w_2}^2$$

$$p_2 = \rho \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot w_1^2 - \rho \cdot \frac{S_2}{S_2} \cdot w_2^2 + p_1 \cdot \frac{S_2}{S_2}$$

$$p_2 = \rho \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot w_1^2 - \rho \cdot w_2^2 + p_1$$

Využitím rovnice kontinuity dostaneme rovnici pro skutečný tlak p_2:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \;\; \rightarrow \;\; w_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot w_1$$

$$p_2 = \rho \cdot w_1^2 \cdot \left[\frac{S_1}{S_2} - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right] + p_1$$

Následně určíme teoretický tlak p_{2t} z Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 = \frac{p_{2t}}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2 \quad |y_1 = y_2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_{2t}}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} \quad /\cdot \rho$$

$$p_{2t} = p_1 + \frac{\rho \cdot w_1^2}{2} - \frac{\rho \cdot w_2^2}{2} \quad \Big|\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \;\; w_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot w_1$$

$$p_{2t} = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot \left[w_1^2 - {w_1}^2 \cdot \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right] = p_1 + \frac{\rho \cdot w_1^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right]$$

Jak jsme v úvodu tohoto příkladu naznačili, tlaková ztráta bude tedy rozdíl teoretického a skutečného tlaku.

$$\Delta p = p_{2t} - p_2$$

$$\Delta p = \left\{p_1 + \frac{\rho \cdot w_1^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right]\right\} - \left\{\rho \cdot w_1^2 \cdot \left[\frac{S_1}{S_2} - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right] + p_1\right\}$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot w_1^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{S_1}{S_2} + 2 \cdot \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right]$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot w_1^2}{2} \cdot \left[1 - 2 \cdot \frac{S_1}{S_2} + \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right]$$

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot w_1^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)\right]^2 = \frac{\rho \cdot w_1^2}{2} \cdot \left[\mathbf{1} - \left(\frac{\boldsymbol{D_1}^2}{\boldsymbol{D_2}^2}\right)\right]^2$$

Člen $\left[\mathbf{1} - \left(\frac{\boldsymbol{D_1}^2}{\boldsymbol{D_2}^2}\right)\right]^2$ v poslední rovnici nazýváme ztrátový koeficient pro náhlé rozšíření proudu a označujeme ho ξ.

$$\xi = \left[1 - \left(\frac{D_1^2}{D_2^2}\right)\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{0{,}15^2}{0{,}2^2}\right)\right]^2 = \mathbf{0{,}1914}$$

Tím jsme splnili první část zadání, v níž bylo naším úkolem ověřit uvedený vztah pro ztrátový koeficient. Ve druhé části zadání máme vypočítat tlak p_2. Využijeme již odvozený vztah pro skutečný tlak z VZTH.

$$p_2 = \rho \cdot w_1^2 \cdot \left[\frac{S_1}{S_2} - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right] + p_1$$

$$p_2 = 1000 \cdot 10^2 \cdot \left[\frac{0{,}0177}{0{,}0315} - \left(\frac{0{,}0177}{0{,}0315}\right)^2\right] + 12 \cdot 10^4 = \mathbf{144\ 609{,}375}\ \boldsymbol{Pa}$$

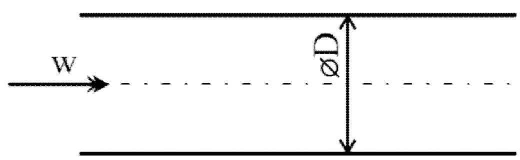
Příklad č. 3:

Vypočítejte tlakovou ztrátu v potrubí pro:

a) w = 0,2 $m.s^{-1}$

b) w = 5 $m.s^{-1}$

Uvažujte hydraulicky hladké potrubí.



Zadané hodnoty: D = 0,01 m, L = 10 m, η = 0,001 $Pa.s^{-1}$, ρ = 1000 $kg.m^{-3}$

Vypočtěte: Δp

ŘEŠENÍ:

a) *w = 0,2* $m.s^{-1}$

V první části musíme rozlišit, zda se jedná o laminární nebo turbulentní proudění. Vypočítáme tedy Reynoldsovo číslo.

$$Re = \frac{w \cdot D}{v} = \frac{\rho \cdot w \cdot D}{\eta} = \frac{1000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}01}{0{,}001} = 2000 < 2300 \;\; \rightarrow \; laminární\, proudění$$

Po třecí ztráty platí vztah:

$$\xi = \lambda \cdot \frac{L}{D}$$

Pro zjištění součinitele tření použijeme následující vztah, odvozený z Darci-Weisbachova vzorce:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{2000} = 0{,}032$$

Tlaková ztráta v potrubí pro rychlost proudění *w = 0,2* $m.s^{-1}$ je pak:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2} = 0{,}032 \cdot \frac{10}{0{,}01} \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}2^2}{2} = 640\, Pa$$

b) $w = 5 m.s^{-1}$

Opět nejprve určíme Reynoldsovo číslo a stanovíme, zda se jedná o laminární nebo turbulentní proudění.

$$Re = \frac{w \cdot D}{\upsilon} = \frac{\rho \cdot w \cdot D}{\eta} = \frac{1000 \cdot 5 \cdot 0{,}01}{0{,}001} = 50000 > 2300 \;\rightarrow\; turbulentní\, proudění$$

Součinitel tření zjistíme pomocí Blasiova vztahu pro hydraulicky hladké potrubí.

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{50000}} = 0{,}02116$$

Tlaková ztráta je pak:

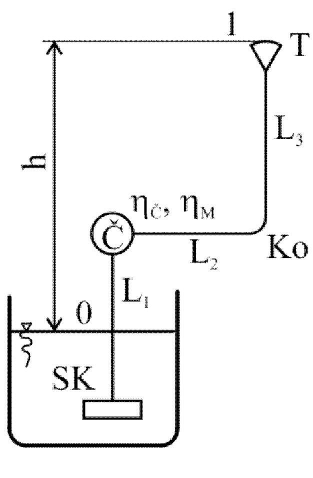
$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2} = 0{,}02116 \cdot \frac{10}{0{,}01} \cdot 1000 \cdot \frac{5^2}{2} = 264{,}5\ kPa$$

Příklad č. 4:

Vypočítejte příkon čerpadla zahradního rozprašovače. Potrubí je hydraulicky hladké. V nádrži je sací koš. Potrubí zavlažovacího systému je ukončeno rozprašovačem. Výškový rozdíl mezi volnou hladinou a rozprašovačem je *3 m* a tryska má *12* dírek o průměru *2,5 mm*.

Zadané hodnoty: L_1 = 1 m, L_2 = 10 m, L_3 = 1 m, D = 30 mm, $\dot{V}$= 1,2 l/s, $\eta_č$ =0,49, η = 0,001 Pa.s, ρ = 1000 kg.m^{-3}, ξ_{SK} = 0,5, ξ_T = 0,8, ξ_{KO} = 0,33

Vypočtěte: $P_{PČ}$



ŘEŠENÍ:

Při výpočtu budeme vycházet z Bernoulliho rovnice energie pro bod *0* a *1* označený na obrázku, s uvážením ztrátové energie a od práce čerpadla ve tvaru:

$$\frac{w_0^2}{2} + g \cdot y_0 + \frac{p_0}{\rho} - e_z + e_č = \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 + \frac{p_1}{\rho} \quad |w_0 = 0, y_0 = 0, y_1 = h$$

$$\frac{p_0}{\rho} - e_z + e_č = \frac{w_1^2}{2} + g \cdot h + \frac{p_1}{\rho} \quad |p_0 = p_1 = p_{atm}$$

$$e_č = e_z + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot h$$

Ztrátová energie v našem případě zahrnuje třecí ztráty v potrubí a místní ztráty vznikající v sacím koši, koleně a výstupní trysce. Pro tuto energii použijeme vztah vycházející z teorie mechaniky tekutin ve formě:

$$e_z = \frac{w^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{w^2}{2} \cdot \left(\xi_{SK} + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D} + \xi_{KO} + \lambda_3 \cdot \frac{L_3}{D} + \xi_T \right)$$

Pro další postup potřebujeme vypočítat koeficient tření λ, který se určuje pomocí Reynoldsova čísla.

$$\dot{V} = S \cdot w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi \cdot 0{,}03^2}{4}} = 1{,}7\, m.s^{-1}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{w \cdot D}{\nu} = \frac{\rho \cdot w \cdot D}{\eta} = \frac{1000 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}03}{0{,}001} = 51\,000$$

Ze střední rychlosti v potrubí jsme určili Reynoldsovo číslo a jeho hodnota daleko převyšuje hodnotu *2300*, což je horní hranice limitující laminární proudění v potrubí kruhového průřezu.

Proto pro výpočet koeficientu tření můžeme použít Blasiův vztah pro hydraulicky hladké potrubí ve formě:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{51000}} = 0{,}021$$

Zpětně vypočítáme ztrátovou energii a rychlost na výstupu z trysky. Nakonec dopočítáme příkon čerpadla pomocí známé účinnosti.

$$e_z = \frac{w^2}{2} \cdot \left[\xi_{SK} + \xi_{KO} + \xi_T + \frac{\lambda}{D} \cdot (L_1 + L_2 + L_3)\right]$$

$$e_z = \frac{1{,}7^2}{2} \cdot \left[0{,}5 + 0{,}33 + 0{,}5 + \frac{0{,}021}{0{,}03} \cdot (1 + 10 + 1)\right] = 14{,}52\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

$$\mathrm{w}_1 = \frac{\dot{V}}{S_1} = \frac{\dot{V}}{12 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot \frac{\pi \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = 20{,}37\ m.s^{-1}$$

$$e_č = e_z + \frac{w_1^2}{2} + \mathrm{g \cdot h} = 14{,}52 + \frac{20{,}37^2}{2} + 9{,}81 \cdot 3 = 251{,}42\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

$$P_č = e_č \cdot \dot{m} = e_č \cdot \rho \cdot \dot{V} = 251{,}42 \cdot 1000 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 301{,}7\ \mathrm{W}$$

$$P_{PČ} = \frac{P_č}{\eta_č} = \frac{301{,}7}{0{,}49} = \mathbf{615{,}72 W}$$