CVIČENÍ č. 3

STATIKA TEKUTIN

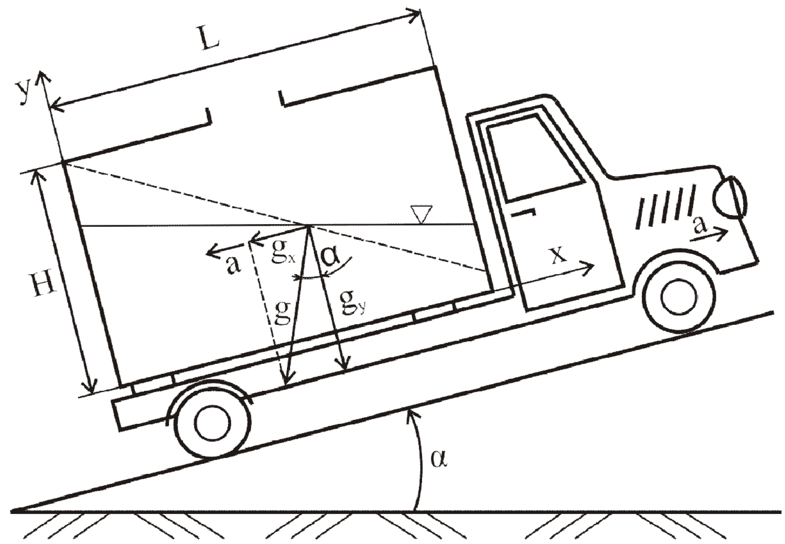
Rovnováha, Síly na rovinné stěny

Příklad č. 1:

Nákladní automobil s cisternou ve tvaru kvádru o rozměrech $H \times L \times B$ se pohybuje přímočarým pohybem po nakloněné rovině se zrychlením a. Cisterna je naplněna do $2/3$ svého objemu. Určete takové zrychlení a, aby se volná hladina dotkla horního rohu cisterny. Určete sílu na zadní čelo a dno cisterny.

Zadané hodnoty: H = 2 m, L = 4 m, B = 2,2 m, a = 1,5 m.s^{-2}, ρ = 720 kg.m^{-3}, α = 5°

Vypočtěte: a, $F_{čelo}$, F_{dno}



Zvolíme souřadný systém dle obrázku. Dále je nutné si uvědomit, že musíme rozložit gravitační zrychlení do složek zvoleného souřadného systému:

$$g_x = g \cdot sin\alpha = 9{,}81 \cdot \sin(5°) = 0{,}85\ m \cdot s^{-2}$$
$$g_y = g \cdot cos\alpha = 9{,}81 \cdot \cos(5°) = 9{,}77\ m \cdot s^{-2}$$

Nyní již máme vnější zrychlení rozložená do složek dle souřadného systému a dále se již nemusíme zabývat faktem, že automobil se pohybuje po nakloněné rovině. Využijeme rovnici hladinových ploch v zobrazeném souřadném systému, dosadíme vnější setrvačná zrychlení, rovnici integrujeme a určíme integrační konstantu z okrajových podmínek.

$$0 = R_k \cdot d_k$$

$$R_x = -a - g_x \qquad\qquad R_y = -g_y$$

$$0 = -(a + g_x) \cdot dx - g_y \cdot dy$$

Volná hladina bude procházet zadním rohem cisterny, tudíž využijeme jeho souřadnice, určíme integrační konstantu, kterou dosadíme zpět do původní rovnice.

$$0 = -(a + g_x) \cdot x - g_y \cdot y + C \quad |x = 0, y = H$$

$$0 = -(a + g_x) \cdot x + g_y \cdot (H - y)$$

Jelikož víme, že bod o souřadnicích *[L/2 , 2/3.H]* leží na volné hladině, dosadíme tyto souřadnice do rovnice volné hladiny a následně určíme zrychlení *a* takové, aby se volná hladina dotkla levého horního rohu cisterny.

$$0 = -(a + g_x) \cdot x + g_y \cdot (H - y) \quad \Big| S: x = \frac{L}{2}, y = \frac{2}{3} \cdot H$$

$$(a + g_x) \cdot x = g_y \cdot (H - y)$$

$$a + g_x = g_y \cdot \frac{H - y}{x}$$

$$a = g_y \cdot \frac{H - y}{x} - g_x = g_y \cdot \frac{H - \frac{2}{3} \cdot H}{\frac{L}{2}} - g_x$$

$$a = g_y \cdot \frac{2 \cdot H}{3 \cdot L} - g_x = 9{,}81 \cdot \cos(5°) \cdot \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \mathbf{2{,}4\ m \cdot s^{-2}}$$

Aby bolo možné určit sílu na zadní čelo popřípadě na dno, je nutné znát rozložení tlaku na těchto plochách. Rozložení tlaku obecně v tekutině je možné určit z Eulerovy rovnice hydrostatiky.

$$dp = \rho \cdot R_k \cdot d_k \quad |R_x = -a - g_x\,, R_y = -g_y$$

$$dp = -\rho \cdot \left[(a + g_x) \cdot dx + g_y \cdot dy\right]$$

$$p = -\rho \cdot \left[(a + g_x) \cdot x + g_y \cdot y\right] + C$$

Pro určení integrační konstanty je možné využit znalosti tlaku v bodě [0 , H], kde je určitě atmosférický tlak, protože se nacházíme na volné hladině.

$$C: x = 0, y = H: p = p_0$$

$$p = p_0 + \rho \cdot \left[-(a + g_x) \cdot x + g_y \cdot (H - y)\right]$$

Při výpočtu síly budeme vycházet ze základní definice síly:

$$F = \int_S p dS$$

V tomto případě je možné využít získané rovnice popisující rozložení tlaku v tekutině, nicméně je nutné si uvědomit, že atmosférický tlak působí uvnitř i vně cisterny, proto jej nebudeme do výpočtu síly zavádět. Dále musíme vyjádřit rozložení tlaku na požadované ploše, protože se jedná o zadní čelo cisterny, pro nějž platí *x = 0*, dosadíme tuto hodnotu do obecné rovnice rozložení tlaku. Elementární plochu *dS* můžeme vyjádřit jako *B.dy*.

$$F_{čelo} = \int_0^H p|_{x=0} \cdot B \cdot dy \quad |p|_{x=0} = \rho \cdot g_y \cdot (H - y)$$

$$F_{čelo} = \int_0^H B \cdot \rho \cdot g_y \cdot (H - y) \cdot dy = B \cdot \rho \cdot g_y \cdot \left(H^2 - \frac{H^2}{2}\right) = B \cdot \rho \cdot g \cdot cos\alpha \cdot \frac{H^2}{2}$$

$$F_{čelo} = 2{,}2 \cdot 720 \cdot 9{,}81 \cdot cos5° \cdot \frac{2^2}{2} = \mathbf{30960\ N}$$

Obdobným způsobem získáme sílu na dno cisterny. Vyjádříme rozložení tlaku na požadované ploše, protože se jedná o dno cisterny, pro nějž platí *y = 0*, dosadíme tuto hodnotu do obecné rovnice rozložení tlaku. Elementární plochu *dS* můžeme vyjádřit jako *B.dx*, kde *B* je šířka cisterny a tudíž konstanta. Naznačenými úpravami získáme výslední vztah pro výpočet síly na dno cisterny.

$$F = \int_S p dS$$

$$F_{dno} = \int_0^L p|_{y=0} \cdot B \cdot dx \quad |p|_{y=0} = \rho \cdot \left[-(a + g_x) \cdot x + g_y \cdot H\right]$$

$$F_{dno} = \int_0^L B \cdot \rho \cdot \left[-(a + g_x) \cdot x + g_y \cdot H\right] \cdot dx = L \cdot \rho \cdot B \cdot \left[g_y \cdot H - (a + g_x) \cdot \frac{L}{2}\right]$$

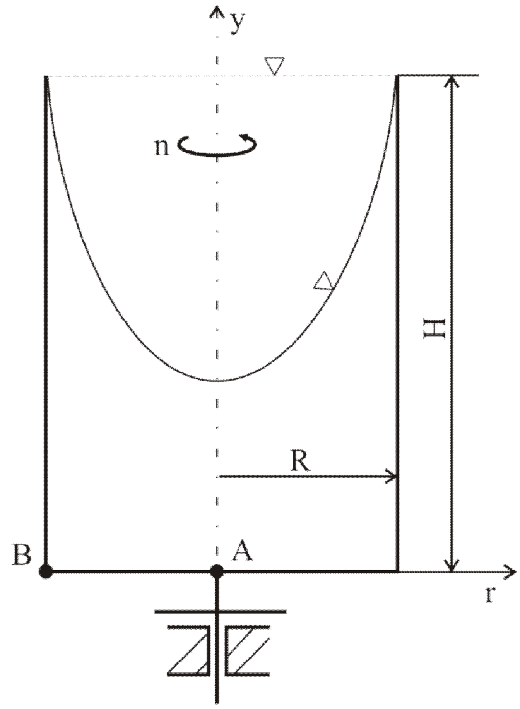
$$F_{dno} = 4 \cdot 720 \cdot 2{,}2 \cdot \left[9{,}77 \cdot 2 - (2{,}4 + 0{,}85) \cdot \frac{4}{2}\right] = \mathbf{82621{,}44\ N}$$

Příklad č. 2:

Válcová nádoba o poloměru *R* a výšce *H*, je za klidu zcela naplněna vodou o hustotě ρ. Nádoba rotuje konstantními otáčkami *n*, je otevřena, tudíž nad volnou hladinou je tlak p_0. Určete tlaky p_A a p_B, obecné rozložení tlaku v tekutině, rovnici volné hladiny, otáčky, při nichž se paraboloid dotkne dna a objem vylité vody při těchto otáčkách.

Zadané hodnoty: ρ = 1000 kg.m^{-3}, H = 0,6 m, R = 0,3 m, p_0 = 0,1 MPa

Vypočtěte: p, p_A, p_B, n, V_v



Vyjdeme z Eulerovy rovnice hydrostatiky. Vnější zrychlení vyjádříme v cylindrickém souřadném systému. Integrační konstantu určíme ze znalosti tlaku v některém bodě uvnitř tekutiny, popř. využijeme volné hladiny, kde je určitě tlak p_0.

$$dp = \rho \cdot R_k \cdot d_k \quad |R_r = \omega^2 \cdot r, R_y = -g$$

$$dp = \rho \cdot (\omega^2 \cdot r \cdot dr - g \cdot dy)$$

$$p = \rho \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} - g \cdot y\right) + C \quad |C: r = R, y = H, p = p_0$$

$$C = p_0 - \rho \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot R^2}{2} - g \cdot H\right)$$

$$p = p_0 + \rho \cdot \left[\frac{\omega^2}{2} \cdot (r^2 - R^2) + g \cdot (H - y)\right]$$

Dále učíme velikosti tlaků v konkrétních bodech *A* a *B*, dosadíme souřadnice bodů do výše odvozené rovnice obecného rozložení tlaku a vypočteme tlaky p_A a p_B.

Souřadnice bodu A = [0, 0]:

$$p_A = p_0 + \rho \cdot \left[-\frac{\omega^2}{2} \cdot R^2 + g \cdot H\right]$$

Souřadnice bodu B = [R, 0]:

$$p_B = p_0 + \rho \cdot g \cdot H = 10^5 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}6 = \mathbf{105886\ Pa}$$

Tlak p_B jsme byli schopni vypočítat na základě zadaných parametrů. Co se týče tlaku p_A, neznáme úhlové zrychlení, proto ho musíme určit z rovnice tlakové hladiny. Úpravou Eulerovy rovnice pro $p = konst$, tudíž $dp = 0$ a $\rho \neq 0$ získáme rovnici tlakové hladiny. Budeme postupovat obdobně jako v případě řešení Eulerovy rovnice.

$$0 = R_k \cdot d_k \quad |R_r = \omega^2 \cdot r, R_y = -g$$

$$0 = \omega^2 \cdot r \cdot dr - g \cdot dy$$

$$0 = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} - g \cdot y + C$$

Integrační konstantu určíme ze znalosti bodu, jimž má volná hladina procházet.

C: r = R, y = H

$$0 = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} - g \cdot H + C \ \rightarrow \ C = g \cdot H - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{2}$$

$$0 = \frac{\omega^2}{2} \cdot (r^2 - R^2) + g \cdot (H - y)$$

V rovnici se vyskytuje ještě neznámá v podobě úhlové rychlosti, takže použijeme další bod, který byl dán v zadání. Jedná se o vrchol rotačního paraboloidu. Nyní již vyjádříme a vypočteme neznámou úhlovou rychlost.

r = 0, y = 0

$$0 = \frac{\omega^2}{2} \cdot (0 - R^2) + g \cdot (H - 0) \ \rightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{R^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}6}{0{,}3^2}} = 11{,}4368 \, rad \cdot s^{-1}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \ \rightarrow \ n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{11{,}4368}{2 \cdot \pi} = \boldsymbol{1{,}8211 \, s^{-1}}$$

Takto jsme získali úhlovou rychlost, resp. otáčky, při nichž se paraboloid dotýká dna a prochází horním okrajem nádoby.

$$p_A = p_0 + \rho \left[-\frac{\omega^2}{2} R^2 + g \cdot H \right] = 10^5 + 1000 \cdot \left[-\frac{11{,}4368^2}{2} \cdot 0{,}3^2 + 9{,}81 \cdot 0{,}6 \right] \doteq \boldsymbol{100000 \, Pa}$$

Zbývá určit objem vylité vody z nádoby, což určíme jako objem mezi horním okrajem nádoby a paraboloidem. Pro lepší představu vypočteme objem "vzduchu" v nádobě nad volnou hladinou. Z rovnice volné hladiny vyjádříme poloměr $r = r(y)$.

$$V_v = \int_0^H \pi \cdot r^2 \cdot dy \quad \Big| r^2 = \frac{2 \cdot g \cdot (y - H)}{\omega^2} + R^2$$

Následnými úpravami získáme vztah pro výpočet objemu vylité tekutiny.

$$V_v = \pi \cdot \int_0^H \left[\frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot (y - H) + R^2\right] dy = \pi \cdot \left[\frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot \left(\frac{H^2}{2} - H^2\right) + R^2 \cdot H\right] = \pi \cdot R^2 \cdot H - \pi \cdot \frac{g}{\omega^2} H^2$$

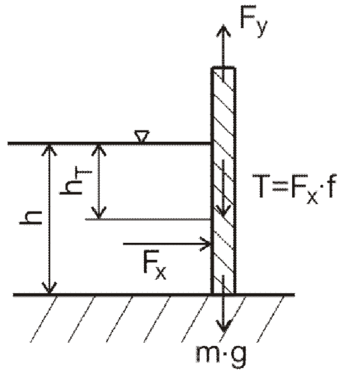
$$V_v = \pi \cdot H \cdot \left(R^2 - \frac{g}{\omega^2} \cdot H\right) = \pi \cdot 0{,}6 \cdot \left(0{,}3^2 - \frac{9{,}81}{11{,}4368^2} \cdot 0{,}6\right) = \mathbf{0{,}0848\ m^3}$$

Příklad č. 3:

Určete minimální velikost síly Fy potřebné k nadzdvižení stavidla o hmotnosti *120 kg* a šířce *2,5 m*, je-li hloubka *1,3 m*. Hustota kapaliny je *998,5 kg/m³* a součinitel tření mezi stavidlem a vodícími lištami je *0,3*.

Zadané hodnoty: $\rho = 998{,}5\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, $m = 120$ kg, $b = 2{,}5$ m, $h = 1{,}3$ m, $f = 0{,}3$

Vypočtěte: F_y

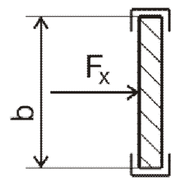


$$F_x = h_T \cdot \rho \cdot g \cdot S = \frac{h}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot b = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot b \cdot \rho \cdot g$$

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot 1{,}3^2 \cdot 2{,}5 \cdot 998{,}5 \cdot 9{,}81 = 20692{,}5\ N$$

$$T = F_x \cdot f = 20692{,}5 \cdot 0{,}3 = 6207{,}8\ N$$

Rovnováha sil ve směru osy *y*:



$$F_y - T - m \cdot g = 0$$

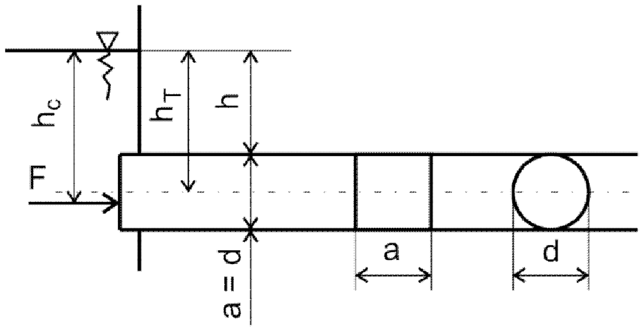
$$F_y = m \cdot g + T = 120 \cdot 9{,}81 + 6207{,}8 = \mathbf{7385\ N}$$

Příklad č. 4:

Vypočítejte sílu působící na čtvercový a kruhový poklop a hloubku jejího působiště.

Zadané hodnoty: $\rho = 1000\ kg.m^{-3}$, $h_1 = 0\ m$, $h_2 = 0{,}5\ m$, $a = d = 1m$

Vypočtěte: $F_{1,(h=0\ m)}$, $F_{1,(h=0,5\ m)}$, $h_{c1,(h=0\ m)}$, $h_{c1,(h=0,5\ m)}$, $F_{2,(h=0\ m)}$, $F_{2,(h=0,5\ m)}$, $h_{c2,(h=0\ m)}$, $h_{c2,(h=0,5\ m)}$



1. Čtverec (h_1 = 0 m)

$$F_{1,(\mathrm{h=0\ m})} = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot S = \rho \cdot g \cdot \left(h_1 + \frac{a}{2}\right) \cdot a^2$$

$$F_{1,(\mathrm{h=0\ m})} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1^2 = \boldsymbol{4905\ N}$$

$$h_{c1,(\mathrm{h=0\ m})} = y_c = \frac{J_{x,T}}{S \cdot y_T} + y_T = \frac{\frac{a^4}{12}}{a^2 \cdot \left(h_1 + \frac{a}{2}\right)} + y_T = \frac{\frac{a^2}{12}}{\left(h_1 + \frac{a}{2}\right)} + \left(h_1 + \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{12 \cdot \left(h_1 + \frac{a}{2}\right)} + \left(h_1 + \frac{a}{2}\right)$$

$$h_{c1,(\mathrm{h=0\ m})} = \frac{1^2}{12 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right)} + \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{0{,}667\ m}$$

2. Čtverec (h_1 = 0,5 m)

$$F_{1,(\mathrm{h=0,5\ m})} = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot S = \rho \cdot g \cdot \left(h_1 + \frac{a}{2}\right) \cdot a^2$$

$$F_{1,(\mathrm{h=0,5\ m})} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1^2 = \boldsymbol{9810\ N}$$

$$h_{c1,(\mathrm{h=0,5\ m})} = y_c = \frac{J_{x,T}}{S \cdot y_T} + y_T = \frac{\frac{a^4}{12}}{a^2 \cdot \left(h_2 + \frac{a}{2}\right)} + y_T = \frac{\frac{a^2}{12}}{\left(h_2 + \frac{a}{2}\right)} + \left(h_2 + \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{12 \cdot \left(h_2 + \frac{a}{2}\right)} + \left(h_2 + \frac{a}{2}\right)$$

$$h_{c1,(\mathrm{h=0,5\ m})} = \frac{1^2}{12 \cdot \left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right)} + \left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{1{,}083\ m}$$

3. Kruh (h_1 = 0 m)

$$F_{2,(\mathrm{h=0\ m})} = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot S = \rho \cdot g \cdot \left(h_1 + \frac{d}{2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$F_{2,(\mathrm{h=0\ m})} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{1^2}{4} = \mathbf{3852\ N}$$

$$h_{c2,(\mathrm{h=0\ m})} = y_c = \frac{J_{x,T}}{S \cdot y_T} + y_T = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \left(h_1 + \frac{d}{2}\right)} + \left(h_1 + \frac{d}{2}\right) = \frac{d^2}{16 \cdot \left(h_1 + \frac{d}{2}\right)} + \left(h_1 + \frac{d}{2}\right)$$

$$h_{c2,(\mathrm{h=0\ m})} = \frac{1^2}{16 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right)} + \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0{,}625\ m}$$

4. Kruh (h_1 = 0,5 m)

$$F_{2,(\mathrm{h=0{,}5\ m})} = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot S = \rho \cdot g \cdot \left(h_2 + \frac{d}{2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$F_{2,(\mathrm{h=0{,}5\ m})} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{1^2}{4} = \mathbf{7705\ N}$$

$$h_{c2,(\mathrm{h=0{,}5\ m})} = y_c = \frac{J_{x,T}}{S \cdot y_T} + y_T = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \left(h_2 + \frac{d}{2}\right)} + \left(h_2 + \frac{d}{2}\right) = \frac{d^2}{16 \cdot \left(h_2 + \frac{d}{2}\right)} + \left(h_2 + \frac{d}{2}\right)$$

$$h_{c2,(\mathrm{h=0{,}5\ m})} = \frac{1^2}{16 \cdot \left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right)} + \left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right) = \mathbf{1{,}062\ m}$$