CVIČENÍ č. 4

STATIKA TEKUTIN

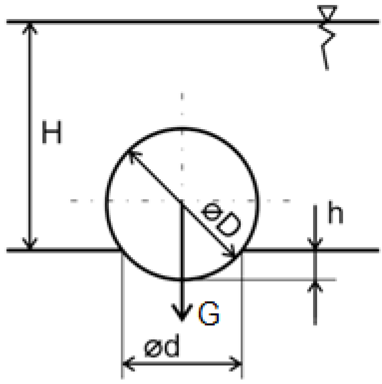
Síly na zakřivené stěny, Stabilita

Příklad č. 1:

Jak velkou silou musíme nadzvednout kulový uzávěr otvoru ve dnu nádoby?

Zadané hodnoty: D = 25 mm, d = 18 mm, h = 7 mm, H = 60 mm, $\rho = 1000\ kg.m^{-3}$, $\rho_{ocel} = 7200\ kg.m^{-3}$

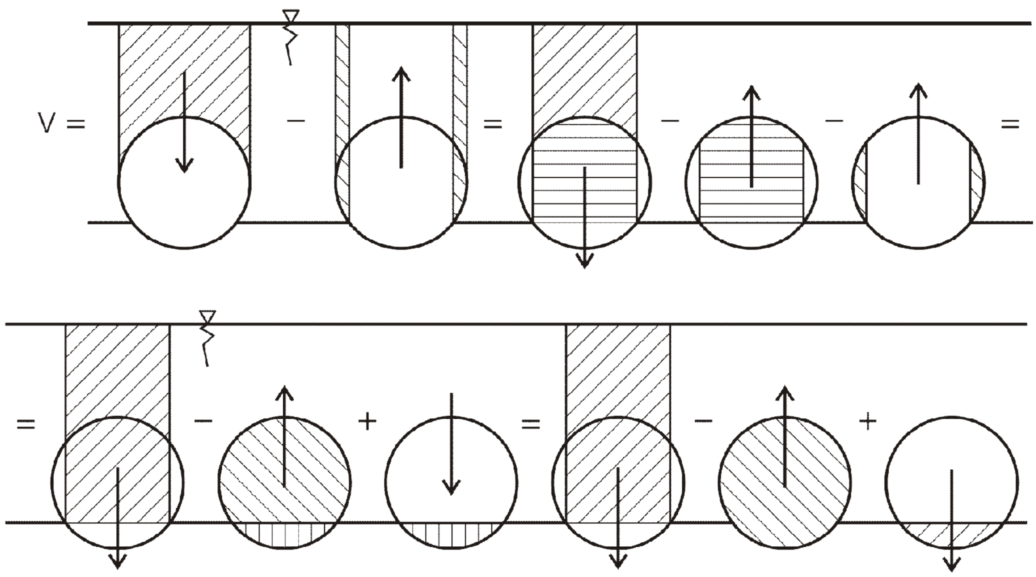
Vypočtěte: F



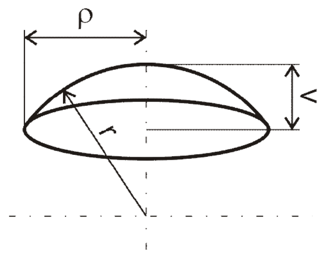
Sílu *F* zjistíme z rovnováhy sil:

$$-F + G + \rho \cdot g \cdot V = 0$$

Objem *V* můžeme určit grafickou metodou:



Objem kulové úseče vypočítáme ze vztahu:



$$V' = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot (3 \cdot \rho^2 + h^2)$$

$$\rho = \sqrt{h \cdot (2 \cdot r - h)}$$

$$V' = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot [3h \cdot (2r - h) + h^2] = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot [6h \cdot r - 3h^2 + h^2] = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot \left[6h \cdot \frac{D}{2} - 2h^2\right]$$

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot \left[3 \cdot \frac{D}{2} - h\right]$$

$$V = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot H - \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{D}{2} - h\right)$$

$$V = \pi \cdot \frac{0{,}018^2}{4} \cdot 0{,}06 - \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{0{,}025}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}007^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{0{,}025}{2} - 0{,}007\right) = 8{,}65 \cdot 10^{-6}\ m^3$$

$$G = \rho_{ocel} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 \cdot g = 7200 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{0{,}025}{2}\right)^3 \cdot 9{,}81 = 0{,}578\ N$$

$$-F + G + \rho \cdot g \cdot V = 0$$

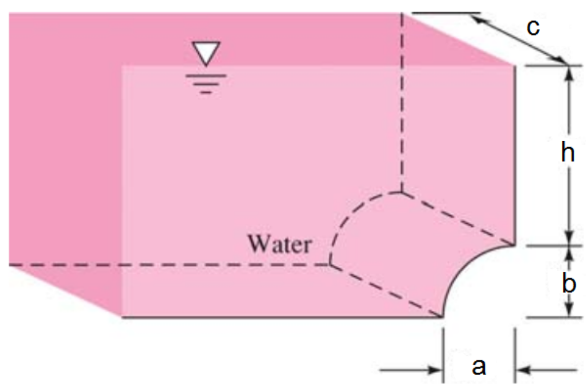
$$F = G + \rho \cdot g \cdot V = 0{,}578 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 8{,}65 \cdot 10^{-6} = \mathbf{0{,}663\ N}$$

Příklad č. 2:

Vypočítejte horizontální a vertikální složku hydrostatické síly působící na pravý dolní roh nádoby čtvrt kruhového tvaru (dle obrázku).

Zadané hodnoty: a = b = 2 m, h = 5 m, c = 6 m, ρ = 1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte: F_H, F_V



Výpočet horizontální složky síly:

$$F_H = \rho \cdot g \cdot h_T \cdot S = \rho \cdot g \cdot \left(h + \frac{b}{2}\right) \cdot a \cdot c$$

$$F_H = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(5 + \frac{2}{2}\right) \cdot 2 \cdot 6 = \mathbf{706320\ N}$$

Výpočet vertikální složky síly:

Vertikální složku hydrostatické síly určíme jako rozdíl tíhy objemu tekutiny v pomocném (náhradním) hranolu a tíhy objemu tekutiny v čtvrť-kruhovém výseku. Náhradní hranol vznikne zanedbáním čtvrť-kruhové části.

$$F_V = F_{hranol} - F_{výseč} = [\rho \cdot g \cdot V_{hranol}] - [\rho \cdot g \cdot V_{výseč}] =$$

$$= [\rho \cdot g \cdot a.(b+h) \cdot c] - \left[\rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{4} \cdot c\right]$$

$$F_V = [9810 \cdot 2 \cdot (2+5) \cdot 6] - \left[9810 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot 6\right] = \mathbf{639219{,}6\ N}$$

Výsledná hydrostatická síla je pak dána vektorovým součtem obou složek:

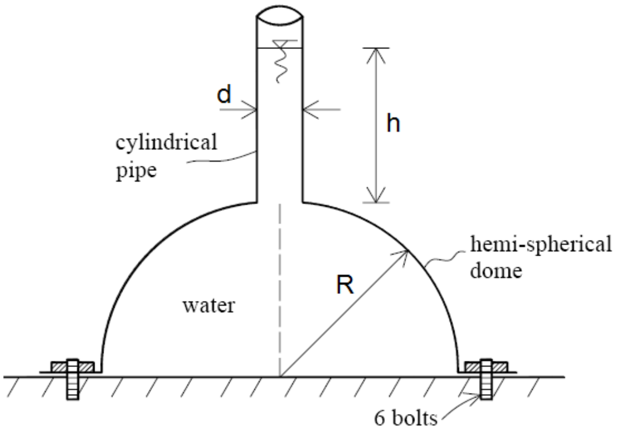
$$F = \sqrt{{F_H}^2 + {F_V}^2} = \mathbf{952622{,}5\ N}$$

Příklad č. 3:

Nádoba ve tvaru polokoule o tíze 30 kN je naplněná vodou a přišroubována k základové desce šesti šrouby. Jaká je potřebná síla v každém šroubu, aby se nádoba od základové desky neodpojila?

Zadané hodnoty: R = 2 m, h = 4 m, d = 3 cm, G = 30 kN, ρ = 1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte: $F_š$



Při řešení uvažujeme dokonalou těsnost všech šroubových spojů. Hydrostatická síla se rovná tíze chybějící vody. Jinými slovy je to tíha objemu vody v pomyslném válci s průměrem *4 m* a výškou *6 m (R+h)*, minus tíha objemu vody v polokouli a malé trubce nahoře.

$$F_{total} = F_{válec} - F_{polokoule} - F_{trubka}$$
$$F_{total} = \rho \cdot g \cdot V_{válec} - \rho \cdot g \cdot V_{polokoule} - \rho \cdot g \cdot V_{trubka}$$
$$F_{total} = \rho \cdot g \cdot \left(V_{válec} - V_{polokoule} - V_{trubka}\right)$$
$$F_{total} = \rho \cdot g \cdot \left[\pi \cdot R^2 \cdot (R+h) - \frac{2}{3}\pi \cdot R^3 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h\right] =$$
$$= 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left[\pi \cdot 2^2 \cdot (2+4) - \frac{2}{3}\pi \cdot 2^3 - \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}03^2 \cdot 4\right] = 574969{,}08\ N$$

Šroubům napomáhá tíha samotné nádoby, to znamená, že šrouby musí společně vytvářet sílu zmenšenou o tuto hodnotu.

$$F_{potrebná} = 574969{,}08 - 30000 = 544969{,}08\ N$$

Na jeden šroub pak připadá hodnota síly:

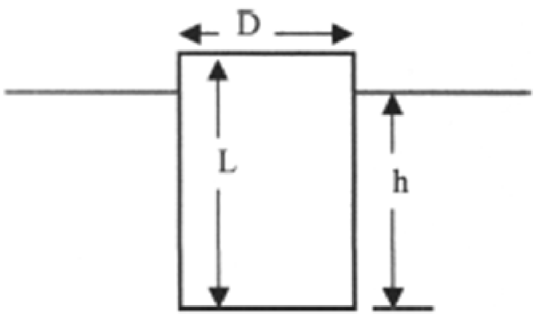
$$F_{š} = \frac{F_{potrebná}}{6} = \frac{544969{,}08}{6} = \mathbf{90828{,}18\ N}$$

Příklad č. 4:

Uvažujeme válec o *specifické hmotnosti*[1] SG < 1, který plave na hladině (podle obrázku). Odvoďte rovnici pro stabilní hodnoty D/L jako funkce SG a použijte to na případ kdy D/L = 1,2.

Zadané hodnoty: D/L = 1,2

Vypočtěte: SG



Určíme rovnováhu sil ve vertikálním směru (vztlaková síla se rovná tíze tělesa):

$$F_v = G$$

[1] SG – Z anglického *„specific gravity"* znamená poměr hustoty tekutiny k standardním (referenčním) hodnotám hustoty (pro kapaliny se uvažuje za referenční hustotu voda a pro plyny vzduch). Odborníci považují tyto bezrozměrné poměry za snadno zapamatovatelné než vlastní numerické hodnoty hustot řady kapalin.

$$\rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h = \rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L \cdot SG \quad \rightarrow \quad h = SG \cdot L$$

Před výpočtem stability tělesa si nejprve určíme základní označení jednotlivých parametrů:

T – těžiště tělesa (předpokládáme, že je ve stálém místě)

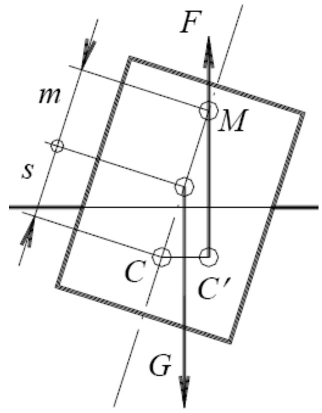
C – působiště vztlakové síly (centrum) v rovnovážné poloze tělesa

M – metacentrum, což je průsečík vektoru vztlakové síly F s osou symetrie příčného průřezu tělesa

M – metacentrická výška, udává vzdálenost metacentra od těžiště a je kladná, je-li metacentrum nad těžištěm

s – vzdálenost bodů C a T

I – kvadratický moment plavební plochy k plavební ose



Pro výpočet metacentrické výšky budeme vycházet ze vztahu:

$$m = \frac{I}{V} - s \quad \rightarrow \quad m + s = \frac{I}{V} \quad \rightarrow \quad |MC| = \frac{I}{V}$$

$$|MC| = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^4}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot h} = |MT| + |TC| = \frac{D^2}{16 \cdot SG \cdot L}$$

$$|TC| = \frac{L}{2} - \frac{h}{2} = \frac{L}{2} - \frac{SG \cdot L}{2} = L \cdot \frac{1 - SG}{2}$$

Pro situaci na hranici stability je metacentrická výška rovná *0*.

$$\frac{D^2}{16 \cdot SG \cdot L} = 0 + \frac{L}{2} \cdot (1 - SG \cdot) \quad \rightarrow \quad \frac{D}{L} = \sqrt{8 \cdot SG \cdot (1 - SG)}$$

Dle zadání máme najít takové hodnoty SG, kterým vyhovuje poměr D/L = 1,2. Následující úpravou poslední rovnice dostaneme kvadratickou rovnici v homogenním tvaru:

$$SG^2 - SG + 0{,}18 = 0$$

Pomocí diskriminantu získáme kořeny kvadratické rovnice, z čehož můžeme napsat závěr:

$$\mathbf{0 \leq SG \leq 0,235 \quad , \quad 0,765 \leq SG \leq 1}$$