CVIČENÍ č. 5

KINEMATIKA TEKUTIN

Zrychlení, Proudnice, Zachování hmoty

Příklad č. 1:

Letící letadlo vytváří vířivé proudění v blízkosti koncových částí křídel (jak je naznačeno na obrázku). Za určitých okolností může být toto proudění aproximováno rychlostním polem, které je popsané složkami: $u = \frac{-K \cdot y}{x^2+y^2}$, $v = \frac{K \cdot x}{x^2+y^2}$. Parametr K je konstanta závislá na různých parametrech vztahujících se k samotnému letadlu (tj. tíha letadla, rychlost …) a x, y jsou hodnoty měřené ze středu víru.

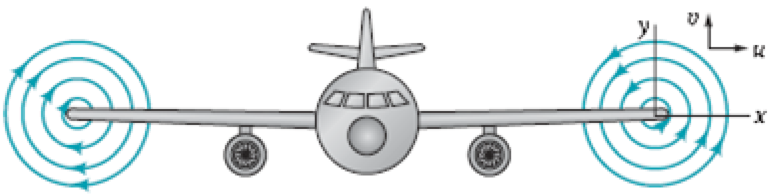
a) Dokažte, že pro toto proudění je rychlost nepřímo úměrná vzdálenosti od počátku:

$$V = \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b) Dokažte, že proudnice jsou v tomto případě kružnice

Zadané hodnoty: $u = \frac{-K \cdot y}{x^2+y^2}$, $v = \frac{K \cdot x}{x^2+y^2}$

Vypočtěte: a), b)



a) Výslednou rychlost určíme z vektorového součtu jednotlivých složek rychlosti u a v.

$$V = \sqrt{u^2+v^2} = \left[\frac{(-K \cdot y)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(K \cdot x)^2}{(x^2+y^2)^2} \right] = \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{K}{r}$$

$$kde \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

b) Rovnice, která nám definuje proudnice je psaná v tvaru:

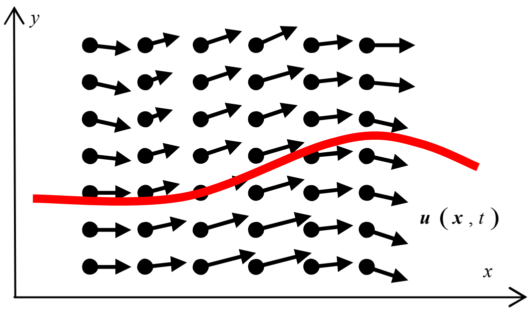
$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}=\frac{\dfrac{(K\cdot x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}}{\dfrac{(-K\cdot y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}}=-\frac{x}{y}$$

Po roznásobení členů a následné integraci dostaneme tvar:

$$y\cdot dy=-x\cdot dx$$
$$\frac{1}{2}\cdot y^2=-\frac{1}{2}\cdot x^2+C$$
$$x^2+y^2=2\cdot C$$

Příklad č. 2

Dvourozměrné rychlostní pole je dáno rovnicemi $u = 1 + y$ a $v = 1$. Určete rovnici proudnice, která prochází počátkem souřadného systému. Naznačte tuto proudnici na grafu.



Proudnice jsou definovány jako vektorové čáry pole rychlostí, pro které platí vztah:

$$\frac{dx}{u(\boldsymbol{x},t)}=\frac{dy}{v(\boldsymbol{x},t)}=\frac{dz}{w(\boldsymbol{x},t)}$$

$u = 1 + y$ a $v = 1$, takže rovnice proudnice v 2D zobrazení:

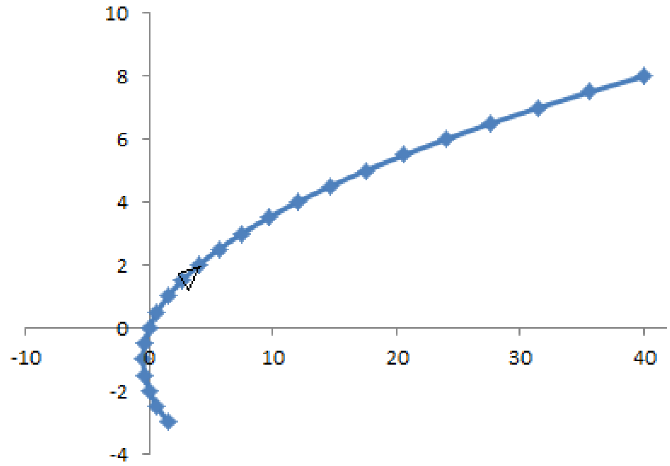
$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}=\frac{1}{1+y}$$

Po následné integraci a definovaní integrační konstanty (dosazení bodu o souřadnicích [0,0]) dostáváme tvar:

$$y + \frac{1}{2} \cdot y^2 = x + C, x = y = 0 \quad \Rightarrow C = 0$$

$$x = y + \frac{1}{2} \cdot y^2$$

Tato proudnice je znázorněna na obrázku.



Příklad č. 3

Rychlostní pole je dáno rovnicemi $u = cx^2$ a $v = cy^2$, kde c je konstanta. Určete a_x a a_y, což jsou složky zrychlení v daném směru. V jakém bodě (bodech) proudového pole je zrychlení rovné nule?

$$V = u.\vec{i} + v.\vec{j} + w.\vec{k}$$

$$u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Použijeme odvozené vztahy pro jednotlivé složky zrychlení, pak aplikujeme vztahy ze zadání a po derivaci dostaneme:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u = \left(c \cdot x^2\right) \cdot \left(2.c \cdot x\right) = 2 \cdot c^2 \cdot x^3$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot v = \left(c \cdot y^2\right) \cdot \left(2.c \cdot y\right) = 2 \cdot c^2 \cdot y^3$$

Vektor zrychlení je možno zapsat pomoci jednotkových vektorů ve tvaru:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Z této rovnice je možno snadno vydedukovat, že výsledný zrychlení bude vykazovat nulový hodnoty v bodu o souřadnicích [0,0].

Příklad č. 4

Určete pole zrychlení pro třírozměrné proudění se složkami rychlosti dané rovnicemi $u = - x$, $v = 4x^2 y^2$ a $w = x - y$.

Aplikujeme rovnice pro jednotlivý složky zrychlení s předchozího příkladu:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial u}{\partial t} = (-x) \cdot (-1) + \left(4x^2 y^2\right) \cdot (0) + (x - y) \cdot (0) + 0 = x$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial v}{\partial t} = (-x) \cdot \left(8xy^2\right) + \left(4x^2 y^2\right) \cdot \left(8x^2 y\right) + (x - y) \cdot (0) + 0 = -8x^2 y^2 +$$
$$+ 32x^4 y^3 = 8x^2 y^2 \cdot \left(4x^2 y - 1\right)$$
$$a_z = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial w}{\partial t} = (-x) \cdot (1) + \left(4x^2 y^2\right) \cdot (-1) + (x - y) \cdot (0) + 0 = -x - 4x^2 y^2$$

Výsledný vektor pole zrychlení definujeme jako:

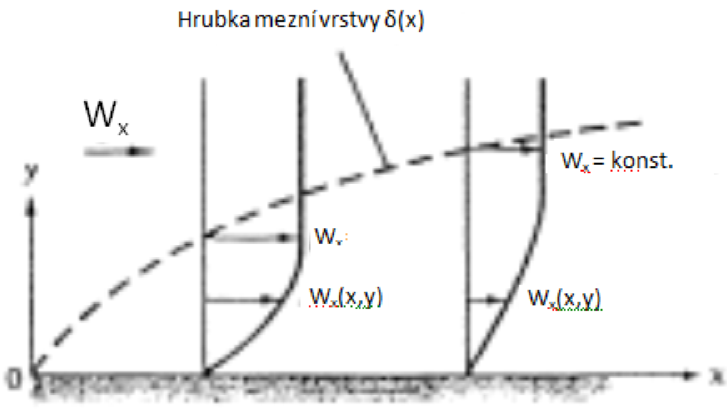
$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$
$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + 8x^2 y^2 \cdot \left(4x^2 y - 1\right) \cdot \vec{j} - \left(x + 4x^2 y^2\right) \cdot \vec{k}$$

Příklad č. 5

Odvozená aproximace pro dvourozměrnou nestlačitelnou laminární mezní vrstvu na rovném povrchu je $w_x = W_x\ (2y/\delta - y^2/\delta^2)$, kde $y \leq \delta$ a $\delta = C\ .\ X^{1/2}$, $C = konst.$

a) Za předpokladu „no slip condition" u stěny najděte vyjádření pro složku rychlosti w_y , kde $y \leq \delta$.

b) Určete maximální hodnotu rychlosti v poloze $x = 1\ m$ pro speciální případ proudění vzduchu, kdy $W_x = 3\ m/s$ a $\delta = 1{,}1\ cm$.



Rovnice kontinuity pro dvourozměrný nestlačitelný případ:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{\partial \left[W_x \cdot \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\right]}{\partial x} = -\frac{\left[W_x \left(-\frac{2y}{\delta^2} + \frac{2y^2}{\delta^3}\right)\right] d\delta}{dx}$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{\partial w_x}{\partial x} = -W_x \cdot \left(\frac{-2y}{\delta^2}\frac{d\delta}{dx} + \frac{2y^2}{\delta^3}\frac{d\delta}{dx}\right)$$

$$dw_y = 2\ W_x \frac{d\delta}{dx} \int_0^y \left(\frac{y}{\delta^2} - \frac{y^2}{\delta^3}\right) dy$$

$$w_y = 2W_x \frac{d\delta}{dx}\left[\frac{y^2}{2\delta^2} - \frac{y^3}{3\delta^3}\right]_0^y \ , \quad kde \left[\frac{d\delta}{dx} = \frac{C}{2\sqrt{x}}\right] \ , \quad [\delta = y] \ , \quad \left[C = \frac{\delta}{\sqrt{x}}\right]$$

$$w_y = \frac{w_x\ \delta}{6\ x} = \frac{3 \cdot 0{,}011}{6 \cdot 1} = \mathbf{0{,}0055\ m \cdot s^{-1}}$$