CVIČENÍ č. 6

KINEMATIKA TEKUTIN

Kontinuita, Vířivost, Rychlost deformace

Příklad č. 1:

Nestlačitelné 2-D rychlostní pole je určené ve směru osy y rovnicí:

$$v = 3xy - x^2y$$

Určete rovnici složky rychlosti u, působící ve směru osy x.

Zadané hodnoty: $v = 3xy - x^2y$, ρ = konst.

Vypočtěte: u

ŘEŠENÍ:

Budeme vycházet z obecné 3-D rovnice kontinuity, která má tvar:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0$$

Když aplikujeme podmínku ρ = *konst.*, vypadne ve všech částech levé strany rovnice parametr hustoty tekutiny. Jedná se o případ rovinného proudění (2D), to znamená, že vypadne i třetí člen na levé straně rovnice, tedy dostáváme:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x - x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 3x$$

Přepíšeme parciální derivaci do tvaru totálního diferenciálu a po následné integraci dostáváme vztah pro *x-ovou* složku rychlosti.

$$\int du = \int (x^2 - 3x)dx$$

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C}$$

Příklad č. 2:

Rychlost částice tekutiny, která se pohybuje podél horizontální proudnice (totožná s osou x) ve 2D nestlačitelném rychlostním poli byla experimentálně určena a definována rovnicí $u = x^2$. Naším úkolem je podél této proudnice určit vztah pro:

a.) Složku rychlosti v s ohledem na velikost parametru y (souřadnici y).

b.) Celkové zrychlení částice tekutiny.

c.) Gradient tlaku ve směru osy x.

ŘEŠENÍ:

a.) Opět budeme vycházet z 2-D rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu. Postup řešení je stejný jako v předchozím příkladu.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

$$\int dv = \int -2xdy = \boldsymbol{-2xy + C}$$

b.) Celkové zrychlení částice je obecně vyjádřené rovnicí:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath}$$

Jednotlivé složky zrychlení jsme již odvozovali na předcházejícím cvičení, přičemž pro náš 2D případ platí:

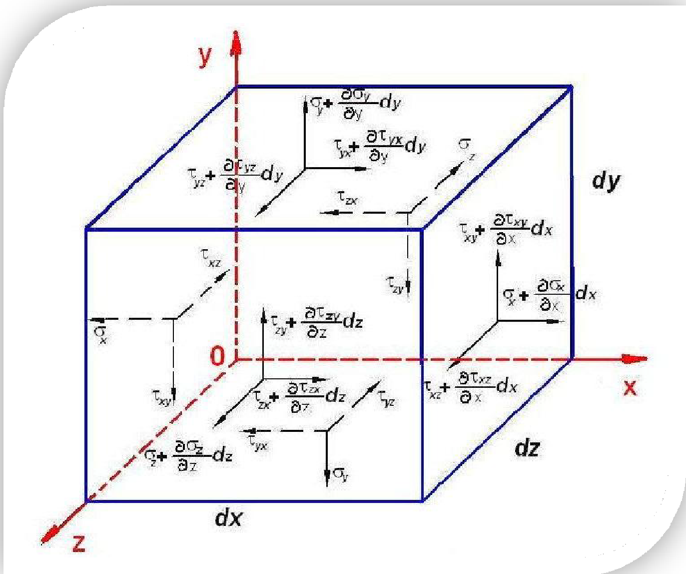
$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v = 2x^3$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial v}{y} \cdot v = 4x^2y - 2x^2y = 2x^2y$$

Protože naše proudnice leží na ose x, platí podmínka $y = 0$, tedy i $a_y = 0$ a výsledný vztah pro zrychlení částice nabývá tvar:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (2\boldsymbol{x}^3) \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}$$

c.) Vztah mezi zrychlením, tlakem a dalšími veličinami nám popisuje N-S rovnice (odváděna přes smykové napětí na elementárním objemu tekutiny, viz obrázek).



Použijeme již odvozený vztah z přednášek pro *x-ovou* složku zrychlení elementu tekutiny. Uvažujeme, že $g_x = 0$.

$$a_x = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \upsilon \cdot \nabla^2(u)$$

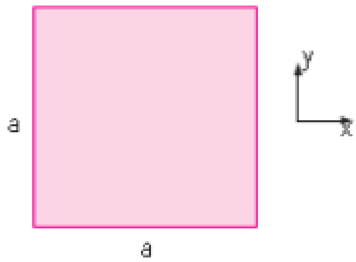
$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho} \cdot \nabla^2(u) - a_x \quad / \cdot \rho$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a_x \cdot \rho$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \cdot (2 + 0) - 2 \cdot x^3 \cdot \rho = \boldsymbol{2 \cdot (\eta - \rho \cdot x^3)}$$

Příklad č. 3

Uvažujme 2D nestlačitelné proudové pole tekutiny, ve kterém má částice (element) tekutiny čtvercový tvar, jak je naznačeno na obrázku. Při pohybu tekutiny dochází k její deformaci. Po určitém čase je rozměr částice stále v souladu s osami x a y, ale deformuje se do obdélníkového tvaru, kde vodorovná složka je rovna *1,06* násobku původní délky a vertikální *0,931* násobku původní délky. Vypočítejte, o kolik procent se zvýší nebo sníží hustota částice tekutiny.



ŘEŠENÍ:

Naším úkolem je zjistit změnu hustoty částice tekutiny po její deformaci. Budeme vycházet ze zákona zachování hmotnosti, tedy hmotnost před a po deformaci musí byt stejná.

Hustota je obecně definována jako poměr hmotnosti a objemu. Objem však nejsme schopni určit, protože neznáme třetí rozměr sledované částice. Budeme tedy uvažovat, že náš element je ve tvaru krychle a *z-ová* souřadnice je rovna rozměru a ze zadání. V tom případě můžeme jednoznačně určit objem elementu a zároveň hodnotu změny hustoty po deformaci.

$$Původní\ hustota\!: \ \rho_1 = \frac{m}{V_1} = 1\,\frac{m}{a^3}$$

$$Hustota\ po\ deformaci\!: \ \rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{m}{(1{,}06 \cdot a) \cdot (0{,}931 \cdot a) \cdot (a)} = 1{,}013\,\frac{m}{a^3}$$

Hustota částice tekutiny se zvýšila oproti původní hodnotě o **1,3%**.

Příklad č. 4

Uvažujme 3D rychlostní pole, které je popsané vektorem se složkami rychlosti:

$$\vec{V} = (u, v, w) = (3 + 2x - y) \cdot \vec{\imath} + (2x - 2y) \cdot \vec{\jmath} + (0{,}5xy) \cdot \vec{k}$$

Vypočítejte rotaci vektoru $\vec{\omega}$ jako funkci prostorových souřadnic *(x, y, z)*.

ŘEŠENÍ:

V Kartézském souřadném systému je rotace vektoru popsaná následovně:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cdot \vec{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \vec{k}$$

Postupně do rovnice pro rotace vektoru dosadíme všechny složky rychlosti ze zadání a parciálně derivujeme podle jednotlivých prostorových souřadnic.

$$\vec{\omega} = (0{,}5x - 0) \cdot \vec{\imath} + (0 - 0{,}5y) \cdot \vec{\jmath} + [2 - (-1)] \cdot \vec{k} = \mathbf{0{,}5x \cdot \vec{\imath} - 0{,}5y \cdot \vec{\jmath} + 3 \cdot \vec{k}}$$

Rotace není nulová, z čehož vyplývá, že proudové pole je rotační.

Příklad č. 5

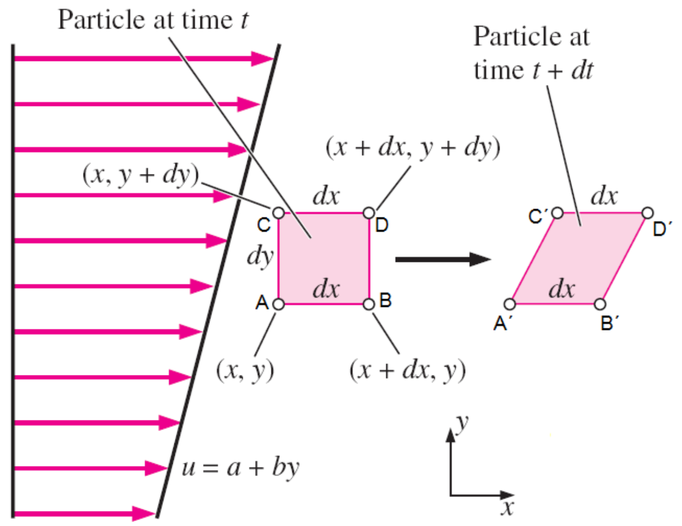
Uvažujme ustálené, nestlačitelné 2D proudové pole (smykový tok), které je popsané rychlostním polem:

$$\vec{V} = (u, v) = (a + by) \cdot \vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$$

Kde *a*, *b* jsou konstanty. V čase *t* si vytkneme element tekutiny s rozměry *dx* a *dy* (jak je naznačeno na obrázku). Částice se potupně deformuje, přičemž se souřadnice jednotlivých bodů elementu v čase *t+dt* posunou do nových pozic.

- **a.)** Určete souřadnice bodů deformované částice
- **b.)** Ze základní definice lineární rychlosti deformace vypočítejte: $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$
- **c.)** Porovnejte výsledky z bodu **b.)** s hodnotami lineárních rychlostí deformace získanými z obecných rovnic:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$



ŘEŠENÍ:

a.) Nejdřív si kvůli přehlednosti přepíšeme jednotlivé body původního elementu s odpovídajícími souřadnicemi.

$$A = (x, y)$$
$$B = (x + dx, y)$$
$$C = (x, y + dy)$$
$$D = (x + dx, y + dy)$$

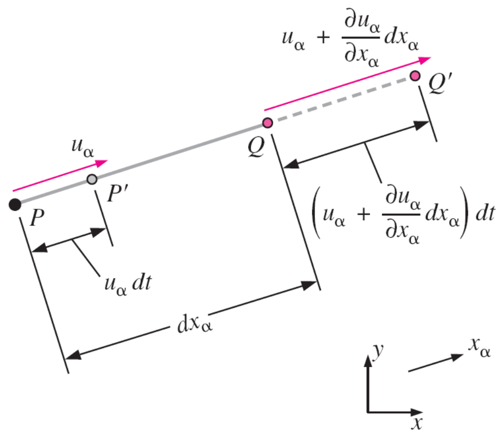
Levý dolní roh (*bod A*) má v čase *t* souřadnice *(x, y)*. V čase *t* + *dt* se tento bod přesune do nové polohy (*A´*) o dráhu $u \cdot dt$. Nesmíme zapomínat, že *x-ová* složka rychlosti je známá ze zadání a má velikost $u = a + by$. To znamená, že souřadnice bodu *A´* jsou:

$$A' = (x + u \cdot dt, y) = (x + (a + by)dt, y)$$

Stejným způsobem určíme zbylé souřadnice bodů deformované částice.

$$B' = (x + dx + u \cdot dt, y) = (x + dx + (a + by)dt, y)$$
$$C' = (x + u \cdot dt, y + dy) = \big(x + \big(a + b \cdot (y + dy)\big)dt, y + dy\big)$$
$$D' = (x + dx + u \cdot dt, y + dy) = \big(x + dx + \big(a + b \cdot (y + dy)\big)dt, y + dy\big)$$

b.) Základní definice lineární rychlosti deformace vyplývá z následujícího obrázku:



Na obrázku je znázorněna úsečka PQ, která má počáteční délku označenou jako dx_α. Deformací této úsečky získáváme nové body $P'Q'$. Pro lineární rychlost deformace v tomto případě platí:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{P'Q' - PQ}{PQ}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\left[\left(u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha\right) dt + dx_\alpha - u_\alpha dt\right] - [dx_\alpha]}{dx_\alpha}\right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

V Kartézském souřadném systému lze lineární rychlost deformace zapsat pro každou složku jako:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Část **b.)** a **c.)** tohoto příkladu je možné tedy sloučit a přeformulovat do jednoho bodu zadání, kde je naši úlohou dokázat platnost výše uvedených rovnic pro jednotlivé složky lineárních rychlostí deformace.

Všechny uvedené skutečnosti pak můžeme aplikovat a dopočítat lineární rychlost deformace ve směru osy x (ε_{xx}) a y (ε_{yy}).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{dt}\left[\frac{[x + dx + (a + by)dt - (x + (a + by)dt)] - [dx]}{dx}\right] = \mathbf{0}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{dt}\left[\frac{[y + dy - y] - [dy]}{dy}\right] = \mathbf{0}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(a + by)}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial 0}{\partial y} = \mathbf{0}$$

Oběma způsoby výpočtu vycházejí stejné výsledky, čímž jsme dokázali, že platí:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$