CVIČENÍ č. 7

BERNOULLIHO ROVNICE

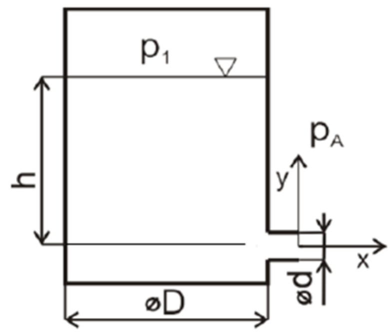
Výtok z nádoby, Průtok potrubím beze ztrát

Příklad č. 1:

Určete hmotnostní průtok vody (pokud otvor budeme považovat za malý), která vytéká z válcové nádoby s průměrem *D* do volné atmosféry kruhovým otvorem ve stěně nádoby o průměru *d*, když výtokový součinitel je μ. Osa otvoru leží v hloubce *h* pod hladinou a tlak nad hladinou je p_1.

Zadané hodnoty: D = 0,9 m, d = 0,09 m, h = 0,8 m, $p_1 = 1{,}12.10^5$ Pa, $p_2 = p_0 = 101325$ Pa, $\mu = 0{,}9$, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}

Vypočtěte: $\dot{m}$



ŘEŠENÍ:

Z Bernoulliho rovnice určíme velikost teoretické výtokové rychlosti a k určení závislosti rychlosti w_1 na w_2 použijeme rovnici kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot h = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot 0$$

$$w_1 \cdot S_1 = w_2 \cdot S_2 \quad \rightarrow \quad w_1 = w_2 \cdot \frac{S_2}{S_1} = w_2 \cdot \frac{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = w_2 \cdot \frac{d^2}{D^2}$$

Dosazením z rovnice kontinuity do Bernoulliho rovnice získáme teoretickou výtokovou rychlost.

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{w_2^2}{2}\cdot\left(\frac{d}{D}\right)^4+g\cdot h=\frac{p_2}{\rho}+\frac{w_2^2}{2}\quad\rightarrow\quad w_2=\sqrt{\frac{2g\cdot h+2\cdot\frac{p_1-p_2}{\rho}}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}}=6{,}087\,m\cdot s^{-1}$$

Pro skutečné objemové průtočné množství můžeme psát:

$$\dot{V}_{skut}=\mu\cdot w_2\cdot S_2=\mu\cdot\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot w_2=0{,}035\,m^3\cdot s^{-1}$$

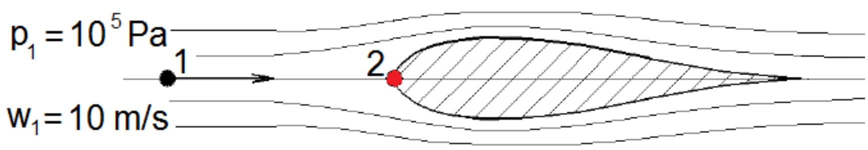
Potom skutečné hmotnostní průtočné množství je:

$$\dot{m}_{skut}=\rho\cdot\dot{V}_{skut}\doteq\mathbf{35\,kg\cdot s^{-1}}$$

Příklad č. 2:

Závěsný kluzák se vznáší v určité nadmořské výšce rychlostí *10 m/s*. Vypočtěte tlak v stagnačním bodě (tj. v bodě nulové rychlosti na konstrukci kluzáku).

Zadané hodnoty: $p_1 = 10^5$ Pa, $w_1 = 10$ m.s^{-1}
Vypočtěte: p_2



ŘEŠENÍ:

Při řešení tohoto úkolu si musíme ujasnit pojem **stagnační bod**. Jinými slovy se jedná o bod, ve kterém je rychlost nulová. Představme si těleso, které je obtékané rovnoměrným nestlačitelným proudem vzduchu (viz. obrázek). Před tělesem uhýbá proud na obě strany, aby se vyhnul 'překážce'. Jedna proudnice je však donucena narazit kolmo na přední část tělesa (*bod 2*), takže její rychlost zde klesne na nulu. *Bod 2* je pro nás v tomto případě stagnační bod, tedy bod nulové rychlosti. Z toho vyplývá, že nám na pravé straně Bernoulliho rovnice vypadne celý druhý člen. Výška *y* je pro oba body stejná, proto tento parametr z celé rovnice vypadne taky.

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{w_1}^2}{2g} + y = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{w_2}^2}{2g} + y \quad / \cdot g$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{{w_1}^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} \quad / \cdot \rho$$

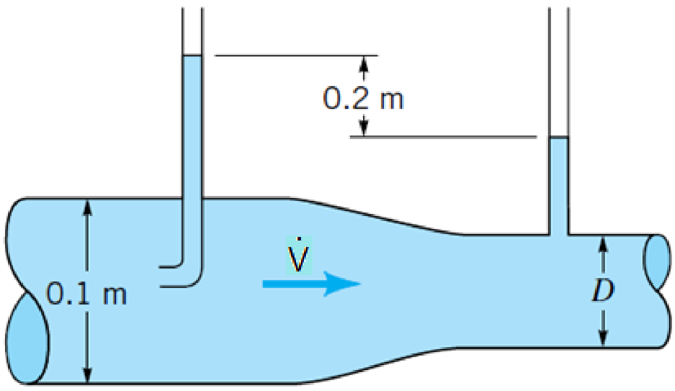
$$p_2 = p_1 + \frac{{w_1}^2 \cdot \rho}{2} = 10^5 + \frac{10^2 \cdot 1{,}23}{2} = \mathbf{100061{,}5\ Pa}$$

Příklad č. 3:

Voda protéká zužujícím se potrubím, jak je znázorněno na obrázku. Pro daný výškový rozdíl hladin kapalinového manometru, určete rovnici vyjadřující objemový průtok jako závislost průměru potrubí *D*.

Zadané hodnoty: $D_1 = 0{,}1$ m, $\Delta h = 0{,}2$ m, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}, $w_1 = 0$ m.s^{-1}

Vypočtěte: $\dot{V} = f(D)$



ŘEŠENÍ:

Opět budeme vycházet z Bernoulliho rovnice, kterou si upravíme pro náš případ dle zadání. Oba uvažované tlaky leží v jedné rovině (na ose tělesa), takže parametr *y* na obou stranách Bernoulliho rovnice je stejný. Ze zadání také víme, že rychlost w_1 je nulová.

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{w_1}^2}{2g} + y = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{w_2}^2}{2g} + y$$

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{w_2}^2}{2g}$$

Z poslední rovnice si vyjádříme rychlost w_2:

$$w_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Velikost tlaků v bodě *1* a *2* sice neznáme, ale máme k dispozici hodnotu výškového rozdílu hladin v trubkách manometru. Tlak v jednotlivých bodech tekutiny můžeme vypočítat jako součin hustoty, gravitačního zrychlení a výšky. Z toho jsme pak schopni určit tlakový rozdíl, který dosadíme do připravené rovnice pro výpočet rychlosti w_2.

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \qquad , \qquad p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (\Delta h \cdot \rho \cdot g)}{\rho}} = \sqrt{2 \cdot \Delta h \cdot g}$$

Objemový průtok tekutiny vypočítáme jako součin rychlosti a plochy průtočného průřezu, přes který tekutina touto rychlostí prochází.

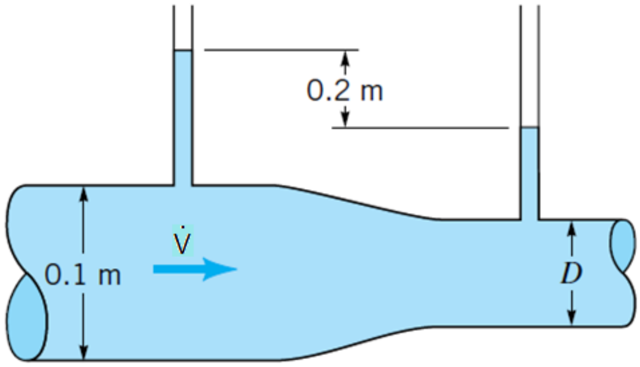
$$\dot{V} = S_2 \cdot w_2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \Delta h \cdot g} = \mathbf{1{,}56 \cdot D^2 \; m^3 \cdot s^{-1}}$$

Příklad č. 4:

Voda protéká zužujícím se potrubím, jak je znázorněno na obrázku. Pro daný výškový rozdíl hladin kapalinového manometru, určete rovnici vyjadřující objemový průtok jako závislost průměru potrubí *D*.

Zadané hodnoty: $D_1 = 0{,}1$ m, $\Delta h = 0{,}2$ m, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}

Vypočtěte: $\dot{V} = f(D)$



ŘEŠENÍ:

Znění příkladu je naprosto stejné jako v *Příkladu č. 3*. Jediným rozdílem je to, že v tomto případě nemáme žádnou rychlost nulovou. Vycházet budeme z Bernoulliho rovnice a rovnice kontinuity, z které si vyjádříme jednu z rychlostí. Následně odvozenou rychlost dosadíme zpátky do Bernoulliho rovnice.

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{w_1}^2}{2g} + y = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{w_2}^2}{2g} + y$$

$$S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2 \quad \rightarrow \quad w_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot w_1 = \frac{\frac{\pi \cdot D_1^2}{4}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} \cdot w_1 = \left(\frac{D_1}{D}\right)^2 \cdot w_1$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{\left(\frac{D_1}{D}\right)^4 \cdot w_1^2}{2g} - \frac{{w_1}^2}{2g}$$

Rozdíl tlaků na levé straně rovnice získáme stejně jako v předcházejícím příkladu, a to ze znalosti rozdílu hladin Δh.

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{w_1^2}{2g} \cdot \left[\left(\frac{D_1}{D}\right)^4 - 1\right] \quad \rightarrow \quad w_1 = \sqrt{\frac{\Delta h \cdot 2g}{\left[\left(\frac{D_1}{D}\right)^4 - 1\right]}}$$

Výsledný objemový průtok tekutiny je pak:

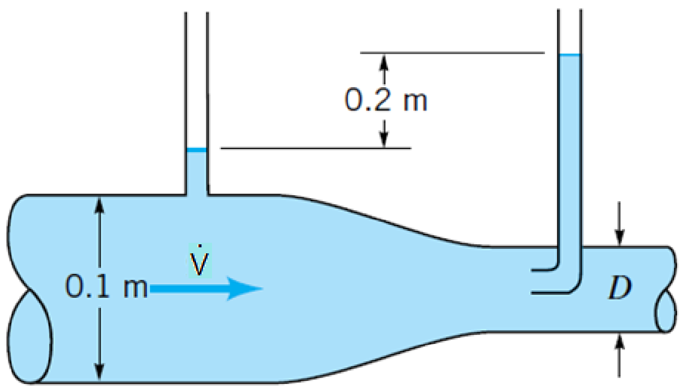
$$\dot{V} = S_1 \cdot w_1 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{\Delta h \cdot 2g}{\left[\left(\frac{D_1}{D}\right)^4 - 1\right]}} = \mathbf{0{,}0156} \cdot \frac{\boldsymbol{D^2}}{\sqrt{\mathbf{0{,}1^4} - \boldsymbol{D^4}}}\ \boldsymbol{m^3 \cdot s^{-1}}$$

Příklad č. 5:

Voda protéká zužujícím se potrubím, jak je znázorněno na obrázku. Pro daný výškový rozdíl hladin kapalinového manometru, určete objemový průtok tekutiny.

Zadané hodnoty: $D_1 = 0{,}1$ m, $\Delta h = 0{,}2$ m, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}, $w_2 = 0$

Vypočtěte: $\dot{V}$



ŘEŠENÍ:

Zadání je téměř stejné jako v předchozích dvou příkladech. Tentokrát je z dvojice rychlostí nulová ta výstupní, tedy $w_2 = 0$. Na základě této skutečnosti je naší úlohou vypočítat průtočné množství tekutiny protékající potrubím. Výchozím bude pro nás opět Bernoulliho rovnice, ale na postup výpočtu se podíváme poněkud z jiného pohledu.

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{w_1}^2}{2g} + y = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{w_2}^2}{2g} + y$$

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{w_1}^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g}$$

Tlak p_1 víme určit jako součin ρ, g a výšky, kterou neznáme. Tuto výšku si označme jako x. Pro tlak p_2 tedy víme, že hladina je v trubce manometru ve výšce $x + \Delta h$.

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot x \quad \rightarrow \quad x = \frac{p_1}{\rho \cdot g}$$

$$p_2 = \rho \cdot g \cdot (x + \Delta h) \quad \rightarrow \quad x + \Delta h = \frac{p_2}{\rho \cdot g}$$

Dosazením x a $x+\Delta h$ do upravené Bernoulliho rovnice dostaneme:

$$x + \frac{{w_1}^2}{2g} = x + \Delta h$$

Z čehož získáme rychlost w_1:

$$w_1 = \sqrt{2g \cdot \Delta h}$$

Výsledný objemový průtok tekutiny bude:

$$\dot{V} = S_1 \cdot w_1 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot \sqrt{2g \cdot \Delta h} = \mathbf{0{,}0156\ m^3 \cdot s^{-1}}$$