CVIČENÍ č. 8

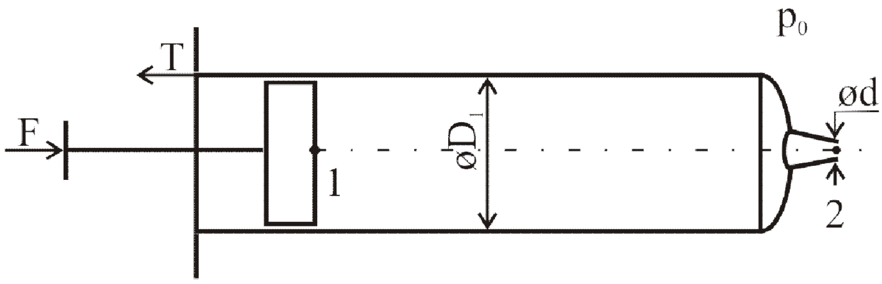
BERNOULLIHO ROVNICE

Výtok z nádoby, Průtok potrubím beze ztrát

Příklad č. 1:

Z injekční stříkačky je skrze jehlu vytlačovaná voda. Průměr stříkačky je *D*, průměr jehly *d*. Určete výtokovou rychlost, jestliže je na píst působeno silou *F* a třecí sílou *T*. Dále určete dálku dostřiku, pokud je stříkačka naklopena pod úhlem *45°*.

Zadané hodnoty: D = 1 cm, d = 0,7 mm, F = 8 N, T = 2 N, ρ = 1000 kg.m^{-3}
Vypočtěte: w_2, L



ŘEŠENÍ:
Při řešení budeme vycházet z rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice:

$$w_1 \cdot S_1 = w_2 \cdot S_2$$

$$w_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = w_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \rightarrow \quad w_1 = w_2 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

$$\frac{p_1}{\rho_v} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot 0 = \frac{p_2}{\rho_v} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot 0$$

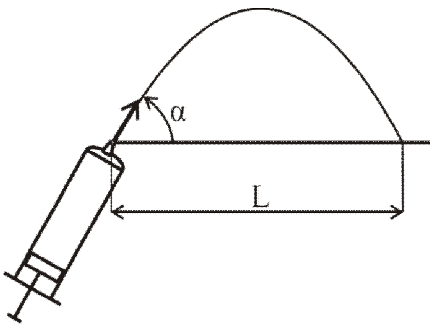
Velikost tlaku v bodě *1* určíme jednoduše ze znalosti velikosti síly (rozdíl působící síly F a třecí síly T), která působí na odpovídající plochu S_1.

$$p_1 = p_0 + \frac{F-T}{S_1} = p_0 + \frac{4 \cdot (F-T)}{\pi \cdot D^2}$$

Takto připravené rovnice pro tlak p_1 a rychlost w_1 dosadíme do Bernoulliho rovnice a vyjádříme výtokovou rychlost w_2.

$$\frac{p_0}{\rho_v} + \frac{4 \cdot (F-T)}{\rho_v \cdot \pi \cdot D^2} + \frac{w_2^2}{2} \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^4 = \frac{p_0}{\rho_v} + \frac{w_2^2}{2} \;\rightarrow\; w_2 = \sqrt{\frac{8(F-T)}{\left[1-\left(\frac{d}{D_1}\right)^4\right] \cdot \rho_v \cdot \pi D^2}} = \mathbf{12{,}36\ m \cdot s^{-1}}$$

Při výpočtu dálky dostřiku si pomůžeme následujícím obrázkem. Rychlost w_2, která vystupuje z injekční stříkačky pod úhlem α můžeme rozložit do složek w_x a w_y.



$$w_x = w_2 \cdot cos\alpha$$

$$w_y = w_2 \cdot sin\alpha$$

Parametr L se vypočte z teorie šikmého vrhu:

$$L = w_x \cdot 2t = w_2 \cdot cos\alpha \cdot 2 \cdot t$$

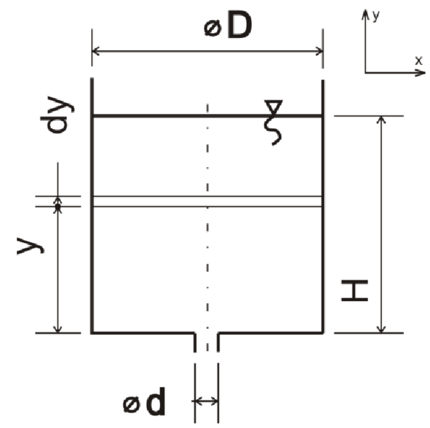
$$w_y = g \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{w_y}{g}$$

$$L = w_2 \cdot cos\alpha \cdot 2 \cdot \frac{w_y}{g} = \frac{w_2^2 \cdot sin(2\alpha)}{g} = \mathbf{15{,}57\ m}$$

Příklad č. 2:

Určete dobu výtoku z otevřené válcové nádoby otvorem ve dně. Rozměry nádoby a otvoru (viz obrázek).

Zadané hodnoty: D = 0,2 m, d = 0,01 m, H = 1,3 m, μ = 0,8, ρ = 1000 kg.m^{-3}
Vypočtěte: t



ŘEŠENÍ:

a) Zanedbáme rychlost klesání hladiny v nádobě.

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{w_1^2}{2}+g\cdot y=\frac{p_2}{\rho}+\frac{w_2^2}{2} \qquad |p_1=p_2$$

$$w_2=\sqrt{2\cdot g\cdot y} \quad , \quad \dot{V}_{skut}=w_2\cdot\mu\cdot S_0=\mu\cdot\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot y}$$

Vyjdeme z předpokladu, že objem, který proteče za elementární časový úsek otvorem, musí odpovídat objemu, o který poklesne hladina v nádobě:

$$-S\cdot dy=\dot{V}\cdot dt$$

$$-\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot dy=\mu\cdot\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot y}\cdot dt$$

$$\int_0^t dt = -\int_H^0 \frac{D^2}{\mu \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y}} dy = \frac{D^2}{\mu \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_0^H \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{D^2}{\mu \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^H$$

$$t = \frac{2 \cdot D^2 \cdot \sqrt{H}}{\mu \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} = \mathbf{257{,}4081\ s}$$

b) Uvažujme rychlost poklesu hladiny v nádobě. Tuto rychlost si určíme z rovnice kontinuity, kterou následně dosadíme do Bernoulliho rovnice a vyjádříme rychlost w_2.

$$S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2 \quad \rightarrow \quad w_1 = w_2 \cdot \frac{S_2}{S_1} = w_2 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot y}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} \quad , \quad \dot{V}_{skut} = \mu \cdot S_2 \cdot w_2 = \mu \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot y}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}$$

Opět vycházíme z předpokladu:

$$-S \cdot dy = \dot{V} \cdot dt$$

$$-\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot dy = \mu \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot y}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} \cdot dt$$

$$\int_0^t dt = -\int_H^0 \frac{D^2 \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}{\mu \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y}} \cdot dy = \frac{D^2 \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}{\mu \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_0^H \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot dy$$

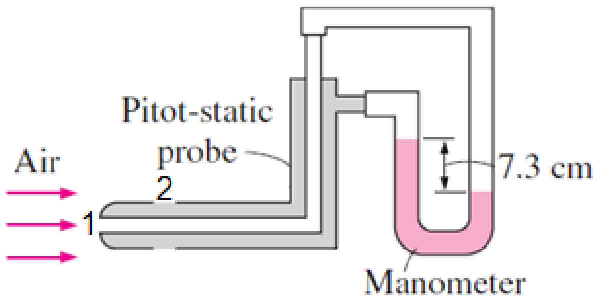
$$t = \frac{2 \cdot D^2 \cdot \sqrt{H \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]}}{\mu \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} = \mathbf{257{,}4073\ s}$$

Podstatnou roli při rozhodnutí o zanedbání rychlosti poklesu hladiny v nádobě hraje druhá mocnina poměru průřezu otvoru a průřezu nádoby (resp. V tomhle případe čtvrtá mocnina jejich průměrů). Jak je vidět, když se druhá mocnina poměru průřezů blíží k nule, je možné rychlost klesání zanedbat aniž se dopustíme velké chyby.

Příklad č. 3:

Na obrázku je zakreslena pitot-statická trubice spojena s kapalinovým manometrem, která se používá k měření rychlosti tekutin. Určete rychlost proudění vzduchu v okolí sondy při výchylce kapalinového manometru *7,3 cm*.

Zadané hodnoty: $\Delta h = 7{,}3$ cm, $\rho_{voda} = 1000$ kg.m^{-3} , $\rho_{vzduch} = 1{,}25$ kg.m^{-3}
Vypočtěte: w_1



ŘEŠENÍ:

Princip činnosti pitot-statickej trubice vychází z Bernoulliho rovnice, která definuje, že celkový tlak je roven součtu statického a dynamického tlaku. Jinak řečeno, tlak na vstupu otevřené trubky je součtem statického tlaku prostředí a dynamického tlaku pohybujících se molekul plynu. My si ale odvodíme vztah pro rychlost z obecní Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2 \quad | y_1 = y_2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} \quad | w_2 = 0$$

$$w_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{\rho_{vzduch}}}$$

Velikost tlaků v bodě *1* a *2* sice neznáme, ale máme k dispozici hodnotu výškového rozdílu hladin v trubkách manometru. Tlak v jednotlivých bodech tekutiny můžeme vypočítat jako součin hustoty, gravitačního zrychlení a výšky. Z toho jsme pak schopni určit tlakový rozdíl, který dosadíme do připravené rovnice pro výpočet rychlosti w_2.

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \ , \ \ p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2$$

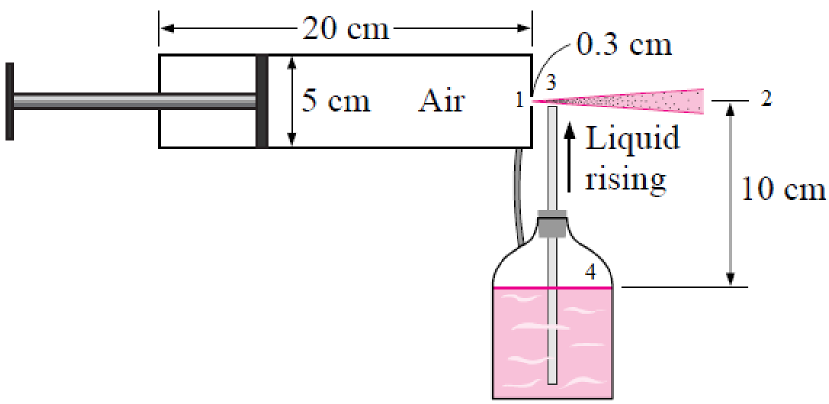
$$p_2 - p_1 = \rho_{voda} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$w_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{(\rho_{voda} \cdot g \cdot \Delta h)}{\rho_{vzduch}}} = \sqrt{2 \cdot \frac{(1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}073)}{1{,}25}} = \mathbf{33{,}85\ m.s^{-1}}$$

Příklad č. 4:

Malá ruční pumpa, spojená s kapalinovou nádržkou, slouží jako rozprašovač (viz obr.). Pumpa žene vzduch o vysoké rychlosti přes malý otvor o velikosti 0,3 cm. Určete minimální rychlost pístu potřebnou k tomu, aby zařízení pracovalo správně, tedy jako rozprašovač.

Zadané hodnoty: h = 10 cm, ρ_{vody} = 1000 kg.m^{-3}, r = 287 J.kg^{-1}.K^{-1}, p_{atm} = 95kPa, T_{atm} = 20°C
Vypočtěte: $w_{pístu}$



ŘEŠENÍ:

Po zohlednění všech zjednodušujících předpokladů (ideální plyn, ustálené laminární proudění, neuvažujeme třecí ztráty a rychlost částice kapaliny v trubičce je zanedbatelná), můžeme zapsat Bernoulliho rovnici pro vzduch a to pro body *1,2* a následovně Bernoulliho rovnici pro vodu v bodech *3* a *4*.

1-2:

$$\frac{p_1}{\rho_{vzduch}} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 = \frac{p_2}{\rho_{vzduch}} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2 \quad |y_1 = y_2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} \quad |w_2 = 0, p_2 = p_{atm}$$

$$w_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{(p_{atm} - p_1)}{\rho_{vzduch}}}$$

3-4:

$$\frac{p_3}{\rho_{voda}} + \frac{w_3^2}{2} + g \cdot y_3 = \frac{p_4}{\rho_{voda}} + \frac{w_4^2}{2} + g \cdot y_4 \quad |w_3 = w_4 = 0, y_3 = 0, y_4 = -h$$

$$p_3 - p_4 = -\rho_{voda} \cdot g \cdot h \quad |p_1 = p_3, p_2 = p_4 = p_{atm}$$

$$p_1 - p_{atm} = -\rho_{voda} \cdot g \cdot h$$

$$p_{atm} - p_1 = \rho_{voda} \cdot g \cdot h$$

Neznáme hustotu vzduchu, proto si ji dopočítáme a to použitím stavové rovnice pro ideální plyn ve tvaru:

$$\frac{p}{\rho} = r \cdot T$$

$$\rho_{vzduch} = \frac{p}{r \cdot T} = \frac{95000}{287 \cdot 293} = 1{,}13\ kg.m^{-3}$$

Použitím druhé odvození rovnice a hustoty vzduchu, můžeme pro rychlost v místě *1* napsat:

$$w_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{(p_{atm} - p_1)}{\rho_{vzduch}}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\rho_{vody} \cdot g \cdot h}{\rho_{vzduch}}} = \sqrt{2 \cdot \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1}{1{,}13}} = 41{,}7\ m.s^{-1}$$

Rychlost pístu určíme z rovnice kontinuity, protože je úměrná rychlosti kapaliny v okolí pístu.

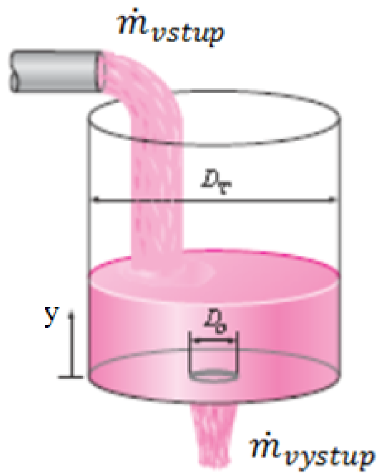
$$\dot{V}_{válec} = \dot{V}_{otvor}$$

$$w_{pist} \cdot S_{válec} = w_1 \cdot S_{otvor}$$

$$w_{pist} = \frac{S_{otvor}}{S_{válec}} \cdot w_1 = \frac{\frac{\pi \cdot D_{otvor}^2}{4}}{\frac{\pi \cdot D_{válec}^2}{4}} \cdot w_1 = \left(\frac{D_{otvor}}{D_{válec}}\right)^2 \cdot w_1 = \left(\frac{0{,}003}{0{,}05}\right)^2 \cdot 41{,}7 = \mathbf{0{,}15\ m.s^{-1}}$$

Příklad č. 5:

Voda vstupuje do nádrže s průměrem D_T stálým hmotnostním průtokem $\dot{m}_{vstup}$. Na dně nádoby je otvor s průměrem D_0, přes který voda uniká z nádrže. Otvor má kruhový tvar, takže třecí ztráty můžeme zanedbat. Určete maximální výšku *z*, do které voda v nádrži vystoupá.



ŘEŠENÍ:

Předpokládejme, že bod *1* je na volné hladině vody v nádrži a bod *2* je v místě výtoku vody z nádrže. Průtok přes otvor je ustálený, nestlačitelný a zanedbává se třecí efekt - takže můžeme využít Bernoulliho rovnici.

Souřadnicový systém si volíme v místě výtoku vody z otvoru na dně nádrže - tedy v bodě *2*. Čili *y-ová* souřadnice bodu *2* bude nulová $(y_2 = 0)$ a kladný směr *y-ové* osy bude směrem nahoru. Dále předpokládáme, že v bodech *1* a *2* působí atmosférický tlak, protože nádoba je otevřená z obou stran *(p1 = p2)* a že rychlost tekutiny na volné hladině je velmi malá $(w_1 = 0)$.

Bernuoulliho rovnice mezi těmito body *1* a *2* bude vypadat:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2 \quad |p_1 = p_2, y_2 = 0, w_1 = 0$$

$$g \cdot y_1 = \frac{w_2^2}{2}$$

$$w_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot y_1}$$

Poté, hmotnostní průtok vody přes otvor na dně nádrže pro maximální výšku hladiny vody bude:

$$\dot{m}_{vystup} = \rho \cdot \dot{V}_{vystup} = \rho \cdot S_2 \cdot w_2 = \rho \cdot \frac{\pi D_0^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y_1}$$

$$y_1 = z_1$$

- z_1 je maximální výška, do níž voda v nádrži může vystoupat při daném vstupním hmotnostním průtoku.

$$\dot{m}_{vystup} = \rho \cdot \frac{\pi D_0^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z_1}$$

Při určení maximální výšky hladiny z_1 musí platit, že hmotnostní průtočné množství vstupující do nádrže se musí rovnat hmotnostnímu průtočnému množství vystupujícímu z nádrže.

$$\dot{m}_{vystup} = \dot{m}_{vstup}$$

$$z_1 = \left(\frac{\boldsymbol{4 \cdot \dot{m}_{vstup}}}{\boldsymbol{\rho \cdot \pi \cdot D_0^2}}\right)^{\boldsymbol{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2 \cdot g}}$$