CVIČENÍ č. 9

BERNOULLIHO ROVNICE

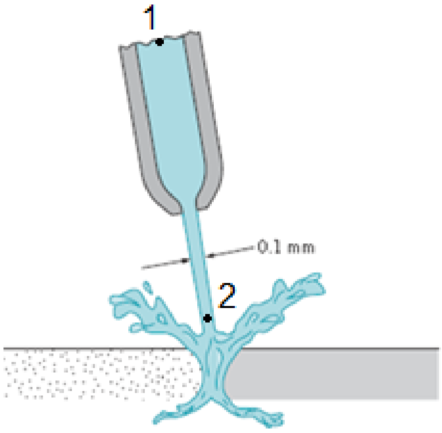
Statický, celkový a dynamický tlak, Stlačitelnost

Příklad č. 1:

Na obrázku je znázorněn princip dělení materiálu pomocí vodního paprsku. Zjistěte velikost tlaku potřebného k dosažení rychlosti *700 m.s^{-1}* vycházející z řezací trysky. Vypočtěte objemový průtok vody.

Zadané hodnoty: d = 0,1 mm, w_2 = 700 m.s^{-1}, ρ = 1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte: p_1, $\dot{V}$



ŘEŠENÍ:

Při řešení budeme vycházet z Bernoulliho rovnice, kterou si upravíme pro náš případ.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2$$

Rychlost w_1 je velmi malá a proto její vliv můžeme zanedbat. Rovněž vzdálenost mezi body *1* a *2* je ve skutečnosti tak malá, že je možné uvažovat $y_1 = y_2$. V bodě *2* působí atmosférický tlak.

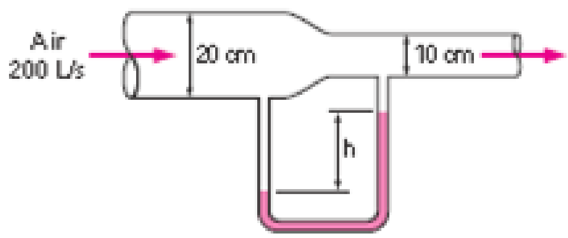
$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad p_1 = p_2 + \frac{\rho \cdot w_2^2}{2} = 101325 + \frac{1000 \cdot 700^2}{2} = \mathbf{245,1\ MPa}$$

$$\dot{V} = w_2 \cdot S_2 = w_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 700 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}0001^2}{4} = \mathbf{5{,}5 \cdot 10^{-6}\ m^3 \cdot s^{-1}}$$

Příklad č. 2:

Objemový průtok vzduchu procházející potrubím má velikost *0,2 $m^3.s^{-1}$*. Rozdíl tlaků v potrubí je měřen kapalinovým manometrem. Vypočtěte rozdíl hladin kapaliny v manometru. Zanedbejte vliv tření.

Zadané hodnoty: $\dot{V}$ = 0,2 $m^3.s^{-1}$, D = 20 cm, d = 10 cm, ρ_{vzduch} = 1,2 $kg.m^{-3}$, ρ_{voda} = 1000 $kg.m^{-3}$
Vypočtěte: Δh



ŘEŠENÍ:
Proudění považujeme za stabilní a nestlačitelné. Takže můžeme opět využít Bernoulliho rovnici.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2$$

Z obrázku je zřejmé, že $y_1 = y_2$. Z upravené Bernoulliho rovnice určíme rozdíl tlaků:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho_{vzduch}(w_2^2 - w_1^2)}{2}$$

Rozdíl tlaků dokážeme určit následovně:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \rho \cdot g \cdot h_1 \\ p_2 &= \rho \cdot g \cdot h_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \ p_1 - p_2 = \rho_{voda} \cdot g \cdot \Delta h$$

Za rozdíl tlaků pak můžeme dosadit součin hustoty vody, gravitačního zrychlení a hledaného rozdílu hladin kapaliny v manometru.

$$\rho_{voda} \cdot g \cdot \Delta h = \frac{\rho_{vzduch}(w_2^2 - w_1^2)}{2} \quad \rightarrow \quad \Delta h = \frac{\rho_{vzduch}(w_2^2 - w_1^2)}{2 \cdot g \cdot \rho_{voda}}$$

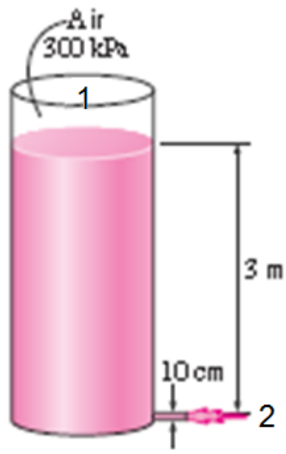
$$\Delta h = \frac{\rho_{vzduch} \cdot \left[\left(\frac{4\dot{V}}{\pi d^2}\right)^2 - \left(\frac{4\dot{V}}{\pi D^2}\right)^2\right]}{2 \cdot g \cdot \rho_{voda}} = \frac{1{,}2 \cdot \left[\left(\frac{4 \cdot 0{,}2}{\pi \cdot 0{,}1^2}\right)^2 - \left(\frac{4 \cdot 0{,}2}{\pi \cdot 0{,}2^2}\right)^2\right]}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1000} = \mathbf{0{,}037\ m}$$

Příklad č. 3:

Z tlakové nádoby naplněné vodou vytéká voda do atmosféry malým potrubím o průměru *10 cm* umístěným ve spodní části nádoby (jak je naznačeno na obrázku). Výška hladiny v nádobě je *3 m* a tlak nad volnou hladinou je *300 kPa*. Vypočtěte objemový průtok vody vytékající z nádoby.

Zadané hodnoty: d = 10 cm, h = 3 m, p = 300 kPa, $\rho = 1000\ kg.m^{-3}$

Vypočtěte: $\dot{V}$



ŘEŠENÍ:

Budeme vycházet z Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2$$

V bodě *2* je $y_2 = 0$ a tlak p_2 je rovný tlaku okolní atmosféry. Při řešení zanedbáváme rychlost poklesu hladiny v nádrži $(w_1 = 0)$. Z Bernoulliho rovnice pak určíme rychlost, kterou tekutina vytéká z nádrže, a následně vypočteme objemový průtok.

$$p_1 - p_2 + \rho \cdot g \cdot y_1 = \frac{\rho \cdot w_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad w_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho} + 2 \cdot g \cdot y_1}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (3 \cdot 10^5 - 10^5)}{1000} + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 3} = \mathbf{21{,}42\ m \cdot s^{-1}}$$

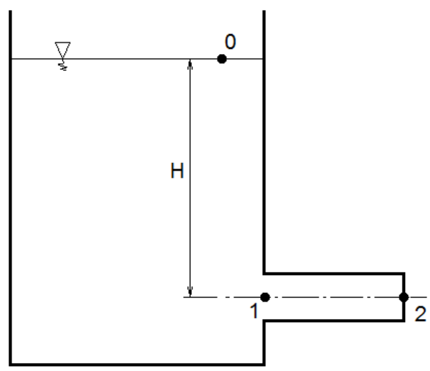
$$\dot{V} = w_2 \cdot S_2 = w_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 21{,}42 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} = \mathbf{0{,}168\ m^3 \cdot s^{-1}}$$

Příklad č. 4:

Určete, v jaké hloubce se nachází osa výstupního potrubí a jaký je tlak v bodě *1*.

Zadané hodnoty: $d_1 = 0{,}1$ m, $d_2 = 0{,}08$ m, $p_0 = 10^5$ Pa, $w_2 = 6$ m.s^{-1}, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}

Vypočtěte: H, p_1



ŘEŠENÍ:

V první části nás bude zajímat hloubka *H*, v níž se nachází osa výstupního potrubí. Použijeme Bernoulliho rovnici (mezi body *0-2*) a určíme okrajové podmínky.

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w_0^2}{2} + g \cdot y_0 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2$$

Souřadnici bodu *2* budeme považovat za nulovou ($y_2 = 0$) a tlak v tomto bodě je roven atmosférickému tlaku ($p_2 = p_0$). Co se týče bodu *0*, v tomto bodě uvažujeme nulovou rychlost, tedy zanedbáváme rychlost poklesu hladiny v nádobě ($w_0 = 0$). Souřadnice tohoto bodu je hledaná výška H ($y_0 = H$).

$$\frac{p_0}{\rho} + g \cdot H = \frac{p_0}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

$$g \cdot H = \frac{w_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad H = \frac{w_2^2}{2 \cdot g} = \frac{6^2}{2 \cdot 9{,}81} = \mathbf{1{,}83\ m}$$

Tlak v bodě *1* určíme pomocí Bernoulliho rovnice mezi body *1-2*.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g \cdot y_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + g \cdot y_2$$

Souřadnice bodů *1* a *2* jsou nulové ($y_1 = y_2 = 0$). Stále nám ale zůstávají dvě neznámé v podobě rychlostí. To znamená, že musíme využít rovnici kontinuity.

$$w_1 \cdot S_1 = w_2 \cdot S_2 \quad \rightarrow \quad w_1 = w_2 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

$$p_1 = \rho \cdot \left[\frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]$$

$$p_1 = \rho \cdot \left\{\frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]\right\}$$

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho \cdot w_2^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] = 10^5 + 1000 \cdot \frac{6^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{0{,}08}{0{,}1}\right)^4\right] = \mathbf{110627{,}2\ Pa}$$