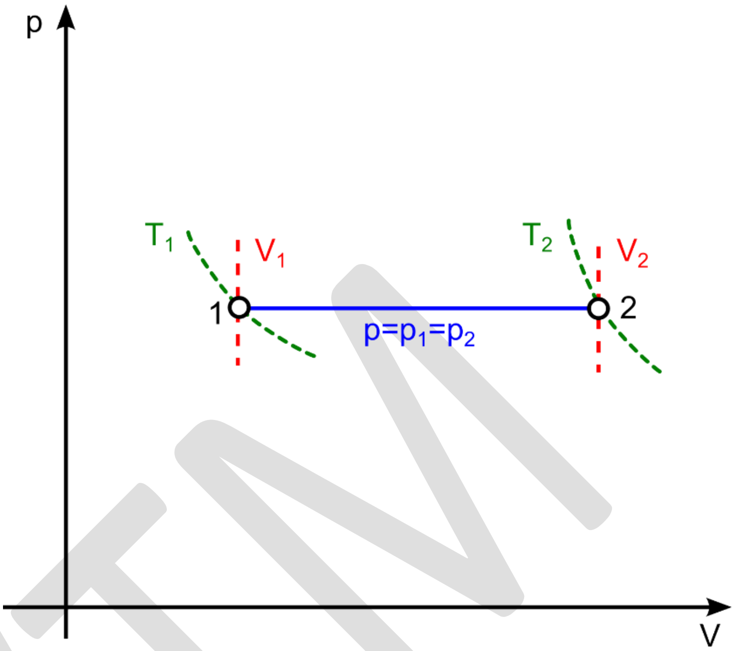
Příklad 1

1kg plynu při izobarickém ohřevu o *710 [°C]* z teploty *40[°C]* vykonal práci *184,5 [kJ.kg^{-1}]*. Vypočítejte molovou hmotnost plynu, množství přivedeného tepla a změnu vnitřní energie

$\Delta T = 710\ [K]$
$a_{12} = 184{,}5.10^3 [J.kg^{-1}]$
$t_1 = 40\ [°C] = 313{,}15\ [K]$
$r = 287{,}04\ [J.kg^{-1}.K^{-1}]$
$Q_{12} = ?\ [J]$
$M = ?\ [kg.mol^{-1}]$



Řešení:

Na začátku řešení je třeba říci, že se jedná o 1 kg látky, tedy můžeme používat měrné jednotky během výpočtu. Budeme vycházet ze základní rovnice pro entalpii:

$$dh = du + p.dv + v.dp$$

Pro izobarický děj nám člen $v.dp$ vypadne a víme, že člen $p.dv = da$. Rovnice teda nabyde tvaru:

$$dh = du + da$$

Z předchozího také víme, že $dh = c_p.\Delta T$ a $du = c_v.\Delta T$. Rovnici tedy upravíme do tvaru:

$$c_p.\Delta T = c_v.\Delta T + a_{12}$$

Přeuspořádáme členy:

$$c_p.\Delta T - c_v.\Delta T = a_{12}$$

$$\Delta T(c_p - c_v) = a_{12}$$

Z Mayerova vztahu víme, že $c_p - c_v = r$, tedy:

$$r.\Delta T = a_{12}$$

Taky platí, že $r = \frac{R}{M}$

$$\frac{R}{M}.\Delta T = a_{12}$$

$$M = \frac{R.\Delta T}{a_{12}} = 0{,}032\ [kg.mol^{-1}]$$

Jedná se o kyslík (O_2), tedy o dvouatomový plyn a tedy $\kappa = 1{,}4$.

Množství přivedeného tepla při izobarickém ději se rovná velikosti změny entalpie:

$$q_{12} = h_{12} = c_p.(T_2 - T_1)$$

Opět úpravou Mayerovy rovnice můžeme přepsat rovnici do tvaru:

$$q_{12} = \frac{\kappa . r}{\kappa - 1}.(T_2 - T_1)$$

Jelikož už máme vyjádřenou molární hmotnost, tak můžeme vyjádřit i specifickou plynovou konstantu r:

$$r = \frac{R}{M} = \frac{8{,}314}{0{,}32} = 259{,}8\ [J.kg^{-1}K^{-1}]$$

Množství přivedeného tepla je tedy:

$$q_{12} = \frac{\kappa . r}{\kappa - 1}.\Delta T = \frac{1{,}4\ .\ 259{,}8}{1{,}4 - 1}.710 = 645603\ [J.kg^{-1}]$$

Změna vnitřní energie je tedy rovna dle rovnice:

$$\Delta u = \frac{r}{\kappa - 1}.\Delta T = \frac{259{,}8}{1{,}4 - 1}.710 = 461145\ [J.kg^{-1}]$$

Pozor!!!! V tomto případě změna vnitřní energie není rovna velikosti technické práce!!!! Velikost technické práce je nulová!!!! Změna vnitřní energie je ale přesto nenulová, protože vnitřní energie je funkcí teploty!!!

Příklad 2

Ve válci kompresoru se sacím objemem *4.3 [l]* se izotermicky stlačuje vzduch z *0.096 [MPa]* na *0.34 [MPa]*. Určete hmotnostní průtok vzduchu, objem po stlačení, potřebnou práci a výkon kompresoru, jestliže se kompresor otáčí *500 [ot.min⁻¹]*.

sací objem $V_S = 4{,}3\ [l]$

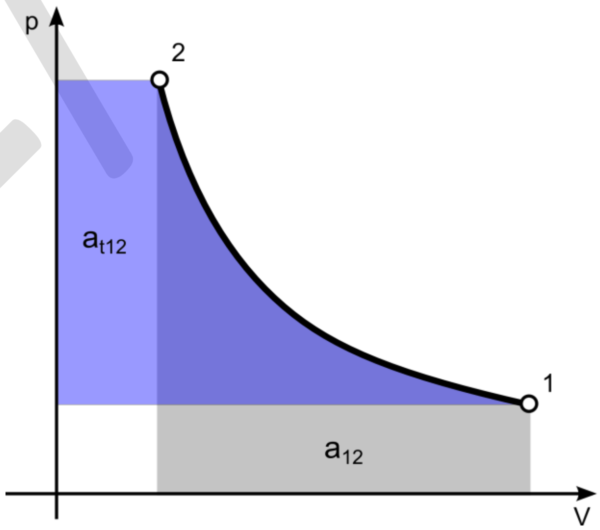
tlak - vstup $p_1 = 0{,}096\ [Mpa]$

tlak - výstup $p_2 = 0{,}34\ [Mpa]$

teplota $t = 20\ [°C]$

otáčky $n = 500\ [ot.min^{-1}]$

r_{vzduch} $r = 287.04\ [J.kg^{-1}K^{-1}]$



Rozbor zadání: V prvním řade, je třeba si uvědomit, že jde o izotermický děj, jak je napsáno v zadání. Pak je nutné si uvědomit, na co je zaměřené zadání (co se má vypočítat) a v jakých jednotkách bude výsledek. Hmotnostní průtok vzduchu $\dot{m} = ?\,[kg.s^{-1}]$; objem po stlačení $V_2 = ?\,[m^3]$ a potřebnou práci a výkon kompresoru. U posledních bodů, je dobré se zastavit a uvědomit si některá fakta. Prvním je, že při izotermickém ději je technická práce rovna absolutní $a_{12} = a_{t12} = ?\,[J]$. Druhým faktem je, že se jedná o kompresor, tedy práce se musí dodávat. Dodávaná práce má záporné znamínko. Záporný výsledek by měl tedy vyjít, když užijeme hranice integrálu v pořadí 1-2 (dle obrázku) a tudíž lze předpokládat, že výkon vyjde v záporných hodnotách.

Hmotnostní průtok vzduchu kompresorem je množství vzduchu, které prochází kompresorem za jednotku času (v základních jednotkách to bude kg.s^{-1}). K proudění vzduchu na vstupu do kompresoru dojde následkem otáčení lopatek. Tedy výpočet pro hmotnostní průtok se bude řídit rovnicí:

$$\dot{m} = m.n$$

V klidovém stavu má kompresor tzv. sací objem v našem případě je to $V_S = 4{,}3\ [l] = 4{,}3.10^{-3}[m^3]$. Ze stavové rovnice je možné vypočítat hmotnost vzduchu na vstupu:

$$p_1.V_1 = m.r.T_1$$

$$m = \frac{p_1.V_1}{r.T_1} = \frac{0{,}096.10^6.4{,}3.10^{-3}}{287{,}04.293{,}15} = 4{,}91.10^{-3}[kg]$$

Hmotnost i otáčky jsou teď známé, tudíž můžeme vypočítat hmotnostní tok vzduchu. Je třeba dbát na to, že v zadání jsou zadány otáčky za minutu, musí se tedy převést na sekundové otáčky $n = 500[ot.min^{-1}] = \frac{500}{60}[ot.s^{-1}]$. Hmotnostní tok vzduchu kompresorem bude:

$$\dot{m} = m.n = 4{,}91.10^{-3}\ .\ \frac{500}{60} = 0{,}041[kg.s^{-1}]$$

Objem po stlačení v případě izotermického děje je možno vypočítat z rovnice:

$$p_1.V_1 = p_2.V_2$$

$$V_2 = V_1\frac{p_1}{p_2} = 4{,}3.10^{-3}\frac{0{,}096.10^6}{0{,}34.10^6} = 1.214.10^{-3}[m^3]$$

V případě izotermického děje se výpočet velikosti měrné práce kompresoru řídí rovnicemi…

…pro měrnou absolutní práci…

$$a_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p.dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{r.T}{v}dv = r.T\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{v}dv = r.T[\ln\ v]_{v_1}^{v_2} = r.T.\ln\frac{v_2}{v_1}$$

…a pro měrnou technickou práci:

$$a_{t12} = -\int_{p_1}^{p_2} v.dp = -\int_{p_1}^{p_2}\frac{r.T}{p}dp = r.T\int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{p}dv = r.T[\ln\ p]_{p_1}^{p_2} = -r.T.\ln\frac{p_2}{p_1} = r.T.\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Jelikož už známe i velikost koncového objemu, je možné si zvolit kteroukoli rovnici. Rovnice uvedené výše jsou pro měrné veličiny, což znamená, že je nutné násobit ještě hmotností!!!! Pro výpočet technické práce bude tedy platit:

$$A_{t12} = m.a_{t12} = m.r.T.\ln\frac{p_1}{p_2} = 4{,}91.10^{-3}\ .287{,}04.293{,}15\ .\ln\frac{0{,}096.10^6}{0{,}34.10^6} = -522\ [J]$$

$$a_{t12} = -106{,}4\ [kJ]$$

Pro kontrolu je možné udělat výpočet i s poměrem objemů:

$$A_{12} = m.a_{12} = m.r.T.\ln\frac{v_2}{v_1} = 4{,}91.10^{-3}.287{,}04.293{,}15.\ln\frac{1.214.10^{-3}}{4{,}3.10^{-3}} = -522\ [J]$$

$$a_{12} = -106{,}4\ [kJ]$$

Poznámka!!! V obou případech se výsledky shodují a v obou případech jsou záporné, což se shoduje s předpokladem při počátečních úvahách.

Výkon kompresoru se tedy určí za vztahu:

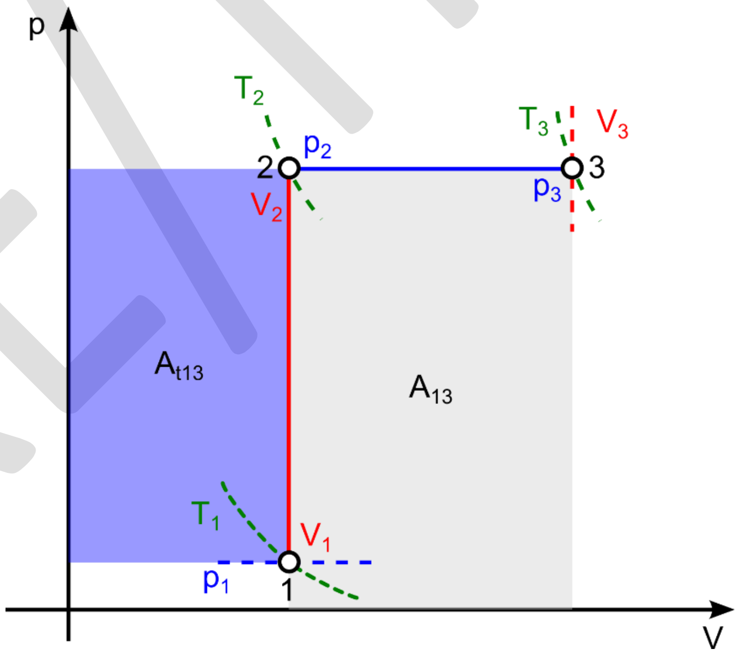
$$P = \dot{m}.a_t\ [kg.s^{-1}.J.kg^{-1}][J.s^{-1}][W]$$

$$P = 0{,}041.(-106{,}4.10^3) = -4362\ [W]$$

Příklad 3

Pod pístem spočívajícím na zarážkách je vzduch o obejmu *0,3 [m³]*, tlaku *0,15 [MPa]*, teplotě 20 *[°C]*. Přívodem tepla začne tlak plynu pod pístem stoupat a při hodnotě *0,3 [MPa]* se tlaková síla působící na píst vyrovná s tíhou pístu a píst začne stoupat, dokud se objem vzduchu pod pístem nezvětší o trojnásobek původního objemu. Vypočítejte konečnou teplotu vzduchu po expanzi, vykonanou absolutní a technickou práci a množství tepla nutné pro vykonání změny. Proveďte kontrolu pomocí prvé věty termodynamické.

$V_1 = V_2 = 0{,}3[m^3]$
$p_1 = 0{,}15[MPa] = 0{,}15.10^6[Pa]$
$t_1 = 20[°C] = 293{,}15\ [K]$
$p_2 = p_3 = 0{,}3[MPa] = 0{,}3.10^6[Pa]$
$V_3 = 3.V_1 = 0{,}9[m^3]$
$r = 287{,}04\ [J.kg^{-1}.K^{-1}]$
$A_{13} = ?\ [J]$
$A_{t13} = ?\ [J]$
$Q_{12} = ?\ [J]$



Řešení:
Před řešením příkladu je třeba si uvědomit, že nejde o jeden samostatný děj. Odpovědi, o jaký děje jde, je třeba hledat v zadání příkladu. V zadání se objeví věta: „…tlaková síla působící na píst vyrovná s tíhou pístu a píst začne stoupat…“, to znamená, že před tím, než se píst pohne, dojde k nějaké změně. Jakožto poloha pístu se nezmění, nezmění se ani objem ale teplo se přivádí. To znamená, že dojde k izochorické změně. Pak píst začne stoupat a objem se zvětší na trojnásobek původního objemu. Při stálém přívodu se předpokládá i nárůst teploty, tedy se musí jednat o izobarický děj. Celkový děj se tedy bude skládat z jedné izochorické a jedné izobarické změny.

Pak je nutno si uvědomit, které veličiny není nutno určit výpočtem, ale plynou ze zadání. První změnou je změna izochorická. To znamená, že tlak i teplota budou na konci děje vyšší, ale objem zůstane konstantní tj. $V_1 = V_2 = 0{,}3[m^3]$. Pak ze zadání je patrné, že koncový objem bude třikrát větší než původní, tedy $V_3 = 3.V_1$. V zadání je také uvedeno, že velikost tíhové síly pístu se vyrovná s velikostí tlakové síly při hodnotě 0,3 [MPa]. To znamená, že tlak na konci izochorického a na začátku izobarického děje bude 0,3 [MPa]. Bude tedy platit $p_2 = 0{,}3[MPa]$ a tedy $p_2 = p_3 = 0{,}3\ [MPa]$.

V zadaní není udána hmotnost vzduchu pod válcem, tedy budeme uvažovat hmotnost *m*. Jelikož z pod pístu žádný vzduch neuniká, můžeme uvažovat zákon zachování hmoty, a tedy hmotnost vzduchu bude stejná na konci i na začátku děje. Můžeme si ji tedy vyjádřit z rovnice pro počáteční stav:

$$p_1.V_1 = m.r.T_1 \rightarrow m = \frac{p_1.V_1}{r.T_1} = \frac{0{,}15.10^6.0{,}3}{287{,}04\ .\ 293{,}15} = 0{,}535\ [kg]$$

Pro výpočet konečné teploty pak můžeme této skutečnosti využít a můžeme napsat:

$$\frac{p_1.V_1}{r.T_1} = \frac{p_3.V_3}{r.T_3}$$

Při uvažování stejného plynu se z rovnice může vyjmout i *r*:

$$\frac{p_1.V_1}{T_1} = \frac{p_3.V_3}{T_3}$$

Pak teplota na konci děje bude rovna:

$$T_3 = T_1.\frac{p_3.V_3}{p_1.V_1} = \frac{293{,}15.0{,}3.10^6.0{,}9}{0{,}15.10^6.0{,}3} = 1758{,}9\ [K]$$

Absolutní práce A_{13} se pak může vyjádřit ve tvaru:

Poznámka: Používá se rovnou tvar s velikými písmeny, protože se objemy udávají přímo v m^3. Z rozměrové analýzy pak plyne, že $Pa.m^3 = \frac{N}{m^2}.m^3 = N.m = J$

$$A_{13} = A_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p.dV = p_{2.}(V_3 - V_2) = 0{,}3.10^6.(0{,}9 - 0{,}3) = 180[kJ]$$

Technická práce A_{t13}:

$$A_{t13} = -\int_{p_1}^{p_2} V.dp = -V_{1.}(p_2 - p_1) = V_{1.}(p_1 - p_2) = 0{,}3.(0{,}15 - 0{,}30).10^6 = -45[kJ]$$

Z teorie bylo patrné, že množství přivedeného tepla při izochorickém ději se rovná velikosti změny vnitřní energie $\Delta U_{12} = m.c_v(T_2 - T_1)$ –**(jenom mezi body 1-2 je izochorický děj)** a množství přivedeného tepla při izobarickém ději se rovná velikosti změny entalpie $\Delta H_{23} = m.c_p.(T_3 - T_2)$ – **(jenom mezi body 2-3 je izobarický děj)**. **Pozor na zadávání teplot!!! Respektujte zadání!!!** Z toho je patrné, že množství přivedeného tepla bude rovna:

$$Q_{13} = \Delta U_{12} + \Delta H_{23}$$

$$Q_{13} = m.c_{v.}(T_2 - T_1) + m.c_{p.}(T_3 - T_2)$$

Do rovnice je nutno dopočítat ještě teplotu T_2, tedy z předchozího bude platit pro T_2:

$$T_2 = T_1 . \frac{p_2 . V_2}{p_1 . V_1} = \frac{293{,}15 . 0{,}3 . 10^6 . 0{,}3}{0{,}15 . 10^6 . 0{,}3} = 586{,}3\ [K]$$

$$Q_{13} = m . \left[c_v . (T_2 - T_1) + c_p (T_3 - T_2)\right]$$

$$Q_{13} = m . \left[\frac{r}{\kappa - 1} . (T_2 - T_1) + \frac{r . \kappa}{\kappa - 1} (T_3 - T_2)\right]$$

$$Q_{13} = 0{,}535 . \left[\frac{287{,}04}{1{,}4 - 1} . (586{,}3 - 293{,}15) + \frac{287{,}04 . 1{,}4}{1{,}4 - 1} (1759{,}9 - 586{,}3)\right]$$

$$Q_{13} = 743\ [kJ]$$

Tento postup je časově náročný, navíc zahrnuje možnost numerické chyby. Také je třeba dbát na správné zadávání teplot při řešení!!!!
Převeďme kontrolu za pomoci první věty termodynamické…

Jeden z tvarů první věty termodynamické definuje množství přivedeného tepla jako součet změny vnitřní energie a vykonané absolutní práce:
Poznámka: Za zmínku stojí, jak se tady zadávají teploty. Velikost absolutní práce se v předchozím počítala na celý děj, tedy i změna vnitřní energie je se musí počítat pro celý děj. Z toho plyne, že v rovnici pro výpočet vnitřní energie bude zadán rozdíl teplot $(T_3 - T_1)$. Výpočet bude tedy následující:

$$Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13}$$

$$\Delta U_{13} = m . c_{v.} (T_3 - T_1) = m . \frac{r}{\kappa - 1} . (T_3 - T_1) = 0{,}535 . \frac{287{,}04}{1{,}4 - 1} . (1758{,}9 - 293{,}15) = 562{,}7 [kJ]$$

$$Q_{13} = 562{,}7 + 180 = 743 [kJ]$$

Pro druhý tvar prvního zákona termodynamiky pak dostáváme:

$$Q_{13} = \Delta H_{13} + A_{t13}$$

$$\Delta H_{13} = m . c_{p.} (T_3 - T_1) = m . \frac{\kappa . r}{\kappa - 1} . (T_3 - T_1) = m . \frac{1{,}4 . 287{,}04}{1{,}4 - 1} . (1758{,}9 - 293{,}15) = 787{,}8 [kJ]$$

$$Q_{13} = 787{,}8 - 45 = 743 [kJ]$$