Vnitřní energie „U“

Vnitřní energie *U* je stavová veličina $U = U\ (p, V, T)$, ale **<u>závisí pouze na teplotě</u>** (experiment Gay-Lussac / Joule)

$$U = f(T)$$

Pro měrnou vnitřní energii (tedy pro vnitřní energii jednoho kilogramu látky) ideálního plynu budeme uvažovat následující vztah:

$$\frac{U}{m} = u = c_v.T\ [J.kg^{-1}]$$

Pro změnu měrné vnitřní energie bude platit:

$$\Delta u = c_v.\Delta T\ [J.kg^{-1}]$$

resp. pro diferenciálně malou změnu bude platit:

$$du = c_v.dT\ [J.kg^{-1}] \qquad (1)$$

Pro změnu vnitřní energie bude platit:

$$\Delta U = m.c_v.\Delta T\ [J]$$

resp. pro diferenciálně malou změnu bude platit:

$$dU = m.c_v.dT\ [J] \qquad (2)$$

Entalpie „H“

Celková energie plynu se nazývá entalpie. Entalpie je stavová veličina, tudíž $H = H\ (p, V, T)$.
Z předchozího je patrné, je *T* určuje *vnitřní tepelnou energii* plynu *U*, pak součin *p.V určuje mechanickou energii* plynu. Součet těchto energií udává entalpii plynu

$$H = U + p.V\ \ [J]$$

Nebo měrnou entalpii plynu:

$$h = u + p.v\ [J.kg^{-1}]$$

V diferenciálním tvaru:

$$dh = du + d(p.v) \qquad (3)$$

$$dh = du + p.dv + v.dp \qquad (4)$$

Nebo užitím stavové rovnice $p.v = r.T$ (*r* je konstanta!!!) a dosazením do rovnice (3)

$$dh = du + r.dT$$

$$dh = c_v.dT + r.dT$$

$$dh = (c_v + r)dT$$

Z Mayerova vztahu $c_p - c_v = r$, pak platí: $c_v + r = c_p$. Pak lze napsat vztah pro entalpii do tvaru:

$$dh = c_p.dT \qquad (5)$$

Absolutní (objemová) práce „A“

Udává objemovou práci plynu. Její velikost odpovídá ploše pod zobrazenou křivkou k ose objemu v *p-v* diagramu (Obr. 1).

Práce:

$$dA = F.dx$$

$$dA = p.S.dx$$

Absolutní (objemová) práce:

$$dA = p.dV \ \ [J] \tag{6}$$

Měrná absolutní práce:

$$da = p.dv \ [J.kg^{-1}] \tag{7}$$

Pozor!!!! Nepoužívá se tvar totálního diferenciálu “da“, protože integrál závisí na integrační cestě!!!

Viz: [2] (46 s.- 49 s.)

$$a_{12} = \int_1^2 p.dv \tag{8}$$

Technická práce „A$_t$“

Udává tlakovou práci plynu. Její velikost odpovídá ploše vlevo od zobrazené křivky k ose tlaku v *p-v* diagramu (Obr. 2).

$$dA_t = -V.dp \ [J] \tag{9}$$

$$da_t = -v.dp \ [J.kg^{-1}] \tag{10}$$

$$a_{t12} = -\int_1^2 v.dp \tag{11}$$

První zákon termodynamiky

Přivedené teplo termodynamické soustavě způsobí zvětšení její vnitřní energie a konání absolutní práce.

$$q_{12} = du + a_{12} = du + p.dv \tag{12}$$

$$Q_{12} = dU + A_{12} = dU + p.dV \tag{13}$$

$$q_{12} = dh + a_{t12} = dh - v.dp \tag{14}$$

$$Q_{12} = dH + A_{t12} = dH - V.dp \tag{15}$$

Provázanost jednotlivých rovnic

Užitím správných rovnic můžeme vyjádřit množství sděleného tepla a vykonané práce termodynamické soustavy pro jednotlivé kvazistatické děje. Pro zjednodušení budou rovnice vyjádřeny pro jeden kilogram látky, tedy v měrných jednotkách.

Pro izobarický děj…

…budeme vycházet z rovnice (4) pro entalpii.

$$dh = du + p.dv + v.dp$$

Použitím rovnice (7) pro absolutní práci a dosazením do rovnice (4) dostaneme:

$$dh = du + a_{12} + v.dp$$

Použitím rovnice pro první větu termodynamickou (12) dostaneme následující tvar rovnice:

$$dh = q_{12} + v.dp$$

Z rovnice (10) plyne, že výraz $v.dp = -a_t$. Dosazením do předchozí rovnice dostáváme tvar:

$$dh = q_{12} - a_{t12}$$

Přeskupením členů dostáváme druhý tvar první věty termodynamické (14)

$$q_{12} = dh + a_{t12}$$

V případě izobarického děje platí, že tlak je konstantní ($p = konst.$), tedy druhý člen v rovnici (14) se rovná nule ($dp = 0$). Tedy veškeré přivedené nebo odvedené teplo při izobarickém ději se rovná pouze změně entalpie, tedy dle rovnice (5):

$$q_{12} = dh = c_p dT$$

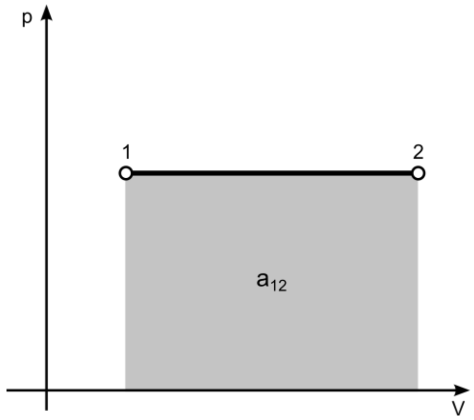
Z grafického řešení této úlohy (obr. 1) plyne, že neexistuje plocha mezi křivkou (1-2) a osou tlaků *p*, tudíž $da_t = 0$. Velikost práce je tedy reprezentována plochou mezi křivkou (1-2) a osou objemů *V*, což odpovídá velikosti absolutní práce $da = p.dv$.

Pro výpočet velikosti absolutní práce tedy musíme využít vztahu:

$$a_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p.dv = p \int_{v_1}^{v_2} dv = p.[v]_{v_1}^{v_2} = p.(v_2 - v_1)$$

Poznámka: Tento zdlouhavý postup samozřejmě není nutné aplikovat vždy. Má jenom demonstrovat provázanost jednotlivých rovnic. Použitím vhodného tvaru první věty termodynamické se tento postup značně zkrátí:

Z rovnic (12) a (14) vybereme rovnici, ve které figuruje derivace (rozdíl, změna…) tlaku. Víme, že při izobarickém ději je tlak konstantní. Tlak je tedy konstanta. Derivace konstanty je nula a tedy tento člen nám z rovnice vypadne. Proto je vhodným kandidátem rovnice (14). Pak se dostaneme na požadovaný tvar rovnice $q_{12} = dh = c_p dT$ ve dvou krocích.



Obr. 1

Pro izochorický děj …

…budeme opět vycházet z první rovnice (4) pro entalpii:

$$dh = du + p.dv + v.dp$$

V případě izochorického děje platí, že objem je konstantní ($V = konst.$), tedy druhý člen v rovnici (4) se rovná nule ($dv = 0$).

$$dh = du + v.dp$$

Přeskupením členů dostáváme následující tvar rovnice pro vnitřní energii:

$$du = dh - v.dp$$

Z rovnice prvního zákona termodynamiky (14) platí, že pravá strana rovnice vyjadřuje množství přivedeného nebo odvedeného tepla:

$$du = q_{12}$$

Z daného vztahu plyne, že veškeré přivedené nebo odvedené teplo při izochorickém ději se rovná pouze změně vnitřní energie, tedy dle rovnice (1):

$$q_{12} = du = c_v.dT$$

Z grafického řešení této úlohy (obr. 2) plyne, že žádná plocha mezi křivkou (1-2) a osou objemů *V* nevznikne, tudíž $da = 0$. Velikost práce je tedy reprezentována plochou mezi křivkou (1-2) a osou objemů *p*, což odpovídá velikosti technické práce $da_t = -v.dp$.

Pro výpočet velikosti technické práce tedy musíme využít vztahu:

$$a_{t12} = \int_{p_1}^{p_2} -v.dp = -v \int_{p_1}^{p_2} dp = -v.[p]_{p_1}^{p_2} = -v.(p_2 - p_1) = v.(p_1 - p_2)$$

Poznámka: K tomuto závěru se dopracujeme, i když použijeme vhodný tvar rovnice pro první větu termodynamickou:

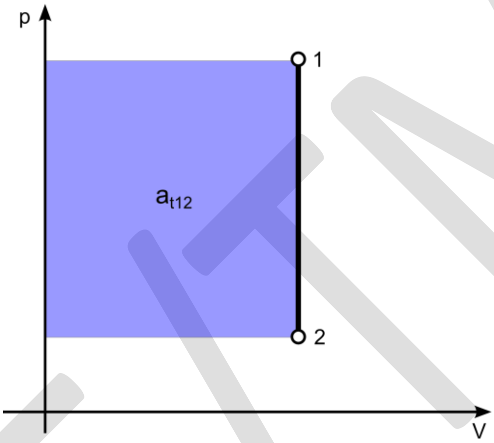
$$q_{12} = \Delta u + a_{12}$$

Po rozepsání druhého členu na pravé straně rovnice platí:

$$q_{12} = \Delta u + p.dv$$

V případě izochorického děje platí, že objem je konstantní ($V = konst.$)*, tedy druhý člen na pravé straně rovnice se rovná nule. A tedy rovnice nabyde tvaru:*

$$q_{12} = \Delta u = c_v \Delta T$$



Obr. 2

Pro izotermický děj…

…budeme při vyjadřování přivedeného nebo odvedeného tepla vycházet z rovnic pro první zákon termodynamiky (12) a (14):

$$q_{12} = du + a_{12}$$

$$q_{12} = dh + a_{t12}$$

Užitím rovnic (1) a (5) převedeme tyto rovnice na tvar:

$$q_{12} = c_v dT + a_{12}$$

$$q_{12} = c_p dT + a_{t12}$$

Jelikož jde o izotermický děj ($T = konst.$), tak členy s derivací teploty se rovnají nule ($dT = 0$). A rovnice se převedou na tvar:

$$q_{12} = a_{12}$$

$$q_{12} = a_{t12}$$

Z předchozího je patrné, že velikost přivedeného nebo odvedeného tepla bude rovna velikosti absolutní nebo technické práce. Z toho plyne, že absolutní a technická se rovnají, tedy bude platit i vztah:

$$a_{12} = a_{t12}$$

Z grafického řešení této úlohy (obr. 3) plyne, že plocha mezi křivkou (1-2) a osou objemů *V*, bude stejná jako plocha mezi křivkou (1-2) a osou tlaků *p*. Teda $a_{12} = a_{t12}$.

Pro výpočet práce můžeme použít rovnice pro vyjádření technické i absolutní práce:

$$a_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p.dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{r.T}{v} dv = r.T \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{v} dv = r.T[\ln\ v]_{v_1}^{v_2} = r.T.\ln\frac{v_2}{v_1}$$

$$a_{t12} = -\int_{p_1}^{p_2} v.dp = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{r.T}{p} dp = r.T \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} dv = r.T[\ln\ p]_{p_1}^{p_2} = -r.T.\ln\frac{p_2}{p_1} = r.T.\ln\frac{p_1}{p_2}$$

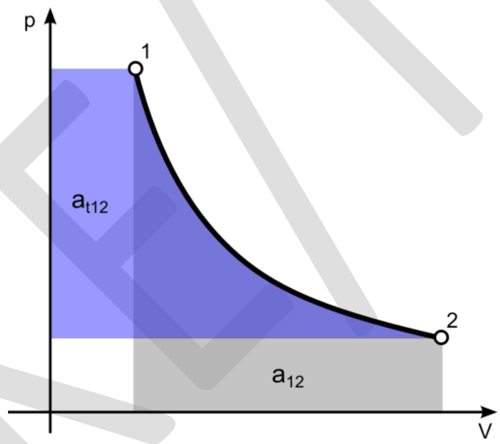
Pro kontrolu si můžeme porovnat obě rovnice:

$$r.T.\ln\frac{v_2}{v_1} = r.T.\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Po zjednodušení se dostáváme na tvar rovnice, pro izotermický děj:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow plat\acute{\imath}\ pro\ izotermick\acute{y}\ d\check{e}j$$

$$a_{12} = a_{t12}$$



Obr. 3

Literatura

[1] MAREŠ, Radim. Kapitoly z termomechaniky [CD-ROM]. Plzeň: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 978-80-7043-706-3.

[2] KALČÍK, Josef a SÝKORA, Karel. Technická termomechanika. 1. vyd. Praha: Academia, 1973. 536s.

[3] Linhart, Jiří. Termomechanika – Stručné učební texty, Plzeň: ZČU, 2012. 103 s.

[3] Vondráček, V.; Středa, I.; Mamula V.; Hlinka M. Mechanika IV – Mechanika tekutin a termomechanika pro SPŠ strojnické, Praha: STNL, 1978. 252 s.