Příklad 1

Vypočítejte účinnost a výkon Humpreyoho spalovacího cyklu bez regenerace, když látkou porovnávacího oběhu je vzduch. Cyklus nakreslete v *p-v* a *T-s* diagramu.

Dáno:

$$T_1 = 300\ [K];\ \tau = \frac{T_3}{T_1} = 4;\ \pi = \frac{p_2}{p_1} = 3;\ \dot{m} = 1{,}5\ [kg.s^{-1}],\ r = 287{,}04\ [J.kg^{-1}K^{-1}],\ \kappa = 1{,}4$$

Na začátku je dobré si připomenout skutečnosti, které jsme si už dříve napsali a při kreslení a výpočtech cyklů je budeme aplikovat. Jednotlivé cykly jsou poskládány z dějů, které byly dříve zmíněny a jejich vlastnosti už dobře známe. Třeba mít na paměti základní předpoklady, které jsou (když není dáno jinak), že:

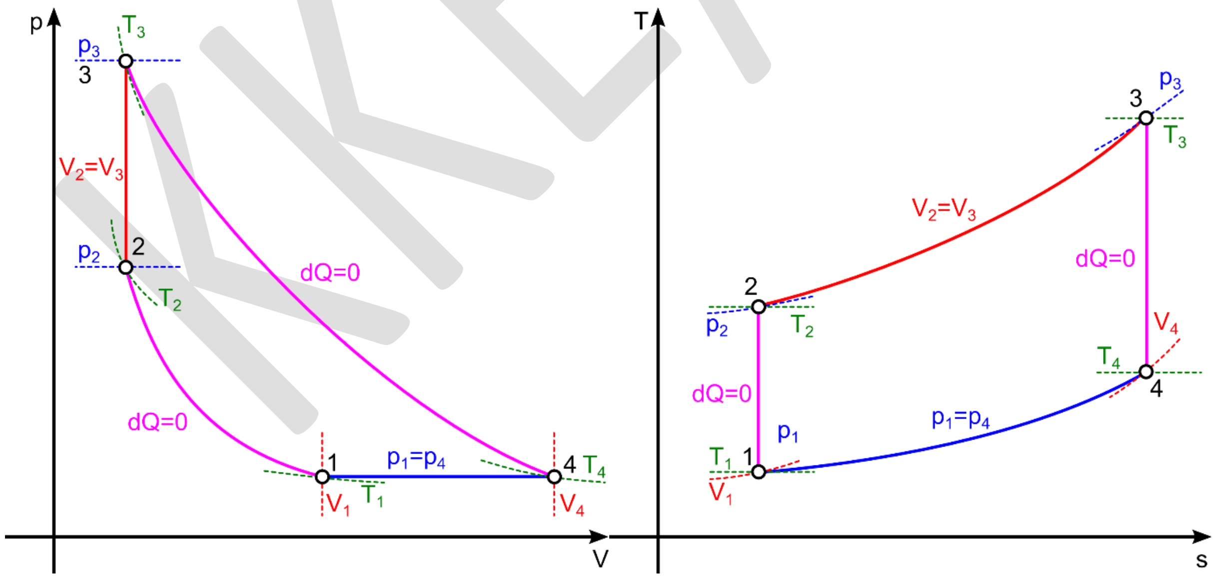
- Děje probíhají jako vratné (kvazistatické), tedy nekonečně pomalu a v každém bodě je systém v termodynamické rovnováze
- Pracovní látkou je ideální plyn, pro který platí v plném rozsahu stavová rovnice (*viz. poznámky k cvičením z termomechaniky – Cvičení 4. – Část Entropie*)

Řešení začneme kreslením grafů, abychom si ujasnili skutečnosti, týkající se tohoto cyklu **(cykly tedy musíte umět kreslit a poznat jednotlivé křivky)**.

Humpreyův oběh se skládá z těchto křivek:

Pro p-V diagram:
1 – 2 Adiabata (adiabatická komprese)
2 – 3 Izochora (izochorický přívod tepla)
3 – 4 Adiabata (adiabatická expanze)
4 – 1 Izobara (izobarický odvod tepla)

Pro T-s diagram:
1 – 2 Izoentropická změna (dq=0 ; ds=konst.)
2 – 3 Izochora (izochorický přívod tepla)
3 – 4 Izoentropická změna (dq=0 ; ds=konst.)
4 – 1 Izobara (izobarický odvod tepla)



Obr. 1 p-V (vlevo) a T-s (vpravo) diagram Humperyova cyklu

Dle zadání není nutné určit všechny stavové veličiny. Zadání říká, že je nutné vypočítat tepelnou účinnost a výkon Hympreyho porovnávacího cyklu. Tak k řešení přistoupíme postupně a dopočítáme jenom potřebné veličiny:

- **tepelná účinnost**

Tato hodnota nesmí nabýt hodnot větších jako 1!!!

Rovnice pro výpočet účinnosti lze na základě předchozích znalostí rozvinout do následujících tvarů:

$$\eta_t = \frac{a_c}{q_p} = \frac{q_p - |q_o|}{q_p} = 1 - \frac{|q_o|}{q_p} = 1 - \frac{c_p(T_1 - T_4)}{c_v(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{\left|\frac{\kappa . r}{\kappa - 1}(T_1 - T_4)\right|}{\frac{r}{\kappa - 1}(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{|\kappa(T_1 - T_4)|}{(T_3 - T_2)}$$

Poznámka: Tato rovnice účinnosti je platná jenom pro tento Humpreyův cyklus. Je jasné, že v jiných cyklech bude rozvinutý tvar rovnice pro účinnost vypadat jinak!!!!

Z rovnice pro tepelnou účinnost je vidět, že bude stačit dopočítat teploty pro jednotlivé charakteristické body:

… velikost teploty v **bodě 1** plyne ze zadání:

$$T_1 = 300\ [K]$$

Z poměru teplot mezi bodem *3* a bodem *1*…

$$\tau = \frac{T_3}{T_1}$$

…je možné dopočítat teplotu v **bodě 3**:

$$T_3 = T_1 . \tau = 300 . 4 = 1200\ [K]$$

Ze znalostí o adiabatické změně (*viz. poznámky k cvičením z termomechaniky – Cvičení 4. – Adiabatická změna – rovnice (6) a (7))* a hodnoty stupně zvýšení tlaku při kompresi je možné dopočítat teplotu v **bodě 2**:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_2 = T_1 . \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_1 . (\pi)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 300 . 3^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 410,6\ [K]$$

Pro adiabatickou expanzi mezi body *3* a *4* můžeme napsat:

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_4 = T_3 . \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Pro řešení této rovnice ovšem chybí hodnoty tlaků p_4 a p_3, které je nutno dosadit. Z grafu a vlastností Humpreyova cyklu je známo, že:

Tlak v bodě *1* je roven tlaku v bodě *4*:

$$p_4 = p_1$$

Pro body *2* a *3* můžeme napsat stavové rovnice:

$$p_3 . v_3 = r . T_3$$
$$p_2 . v_2 = r . T_2$$

Jelikož se předpokládá, že se pracovní látka nemění, tak *„r"* z obou rovnic můžeme zanedbat a z grafu cyklu plyne, že mezi body *2* a *3* je izochorická změna (hodnoty objemů jsou stejné – v_2=v_3), tak hodnoty objemů se také vykrátí.

Když dáme do poměru upravené rovnice, dostaneme:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

…ze které je možné vyjádřit tlak p_3:

$$p_3 = p_2.\frac{T_3}{T_2}$$

Máme tedy již vyjádřeny hodnoty tlaků p_3 a p_4. Můžeme je tedy dosadit do rovnice pro teplotu T_4 a upravit: Nejprve dosadíme místo p_4 hodnotu p_1:

$$T_4 = T_3\,.\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_3\,.\left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Pak dosadíme za hodnotu p_3 tvar, který jsme si výše vyjádřili. Pozor, že p_3 je ve jmenovateli!!!

$$T_4 = T_3\,.\left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_3.\left(p_1.\frac{1}{p_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_3.\left(p_1.\frac{1}{p_2}.\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_3.\left(\frac{p_1}{p_2}.\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

V rovnici je ještě poměr tlaků $\frac{p_1}{p_2}$, což je převrácená hodnota π. Můžeme tedy napsat a rovnou vypočítat teplotu T_4:

$$T_4 = T_3.\left(\frac{p_1}{p_2}.\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_3.\left(\frac{1}{\pi}.\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1200.\left(\frac{1}{3}.\frac{410{,}6}{1200}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 645{,}3\ [K]$$

Jelikož už jsou teploty v každém bodě známé, můžeme vypočítat tepelnou účinnost cyklu.

$$\eta_t = 1 - \frac{|\kappa(T_1 - T_4)|}{(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{|1{,}4\,.(300 - 645{,}3)|}{1200 - 410{,}6} = 0{,}39\ [-] = 39\ [\%]$$

Pro výkon použijeme již známou rovnici…

$$P = \dot{m}\,.a_c$$

Pro výpočet nám schází vypočítat práci cyklu, kterou můžeme samozřejmě vypočítat samostatně (jak to bylo ukázáno při sabatově oběhu – viz http://home.zcu.cz/~gaspar/cv/CV_TM_06_02.pdf). Nebo můžeme využít již vypočtených hodnot. Z rovnice pro výpočet termodynamické účinnosti se dá lehce práce cyklu odvodit následujícím způsobem:

$$\eta_t = \frac{a_c}{q_p} \rightarrow a_c = \eta_t.q_p = \eta_t.c_v(T_3 - T_2) = \eta_t.\frac{r}{\kappa - 1}.(T_3 - T_2) = 0{,}39\,.\frac{287{,}04}{1{,}4 - 1}.(1200 - 410{,}6) =$$

$$= 220924{,}6\ [J.kg^{-1}]$$

- **Výkon Humpryova cyklu tedy bude:**

$$P = \dot{m}\,.a_c = 1{,}5\,.220924{,}6 = 331387\ [W] = 331\ [kW]$$

Poznámka: Všimněte si jedné zajímavosti…I když v zadání byl udán hmotnostní průtok různý než 1[kg.s^{-1}], tak celý výpočet jsme prováděli za pomoci měrných veličin. Při pohledu na výpočet je vidět, že hmotnostní průtok (nebo množství) pracovní látky nemá vliv na termodynamickou účinnost cyklu. Zásadní vliv má ale při výpočtu výkonu. Zkuste pouvažovat, jak tyto skutečnosti souvisejí s praxí.

Příklad 2

Ideální oběh plynové turbíny pracuje s přívodem a odvodem tepla při konstantním tlaku. Maximální teplota před turbínou je *600 [°C]* a teplota sání kompresoru je *20 [°C]*. Stupeň zvýšení tlaku v kompresoru je *6*. Vypočítejte množství přivedeného a odvedeného tepla, teoretický výkon pro oběhové množství jednoho kilogramu vzduchu a termickou účinnost. Cyklus nakreslete v *p-v* a *T-s* diagramu.

Dáno:

$T_3 = 600[°C] = 873{,}15\ [K];\ T_1 = 20\ [°C] = 293{,}15\ [K];\ \pi = \frac{p_2}{p_1} = 6[-];\ \kappa = 1{,}4;$

$r = 287{,}04\ [J.kg^{-1}K^{-1}];\ \dot{m} = 1\ [kg.s^{-1}],$

Na začátku je dobré si připomenout skutečnosti, které jsme si už dříve napsali a při kreslení a výpočtech cyklů je budeme aplikovat. Jednotlivé cykly jsou poskládány z dějů, které byly dříve zmíněny a jejich vlastnosti už dobře známe. Třeba mít na paměti základní předpoklady, které jsou (když není dáno jinak), že:

- Děje probíhají jako vratné (kvazistatické), tedy nekonečně pomalu a v každém bodě je systém v termodynamické rovnováze
- Pracovní látkou je ideální plyn, pro který platí v plném rozsahu stavová rovnice (*viz. Poznámky k cvičením z termomechaniky – Cvičení 4. – Část Entropie*)

Řešení začneme kreslením grafů, abychom si ujasnili skutečnosti, týkající se tohoto cyklu **<u>(cykly tedy musíte umět kreslit a poznat jednotlivé křivky)</u>**.

Braytnův-Ericsonův oběh se skládá z těchto křivek:

Pro p-V diagram:

1 – 2 Adiabata (adiabatická komprese)

2 – 3 Izobara (izobarický přívod tepla)

3 – 4 Adiabata (adiabatická expanze)

4 – 1 Izobara (izobarický odvod tepla)

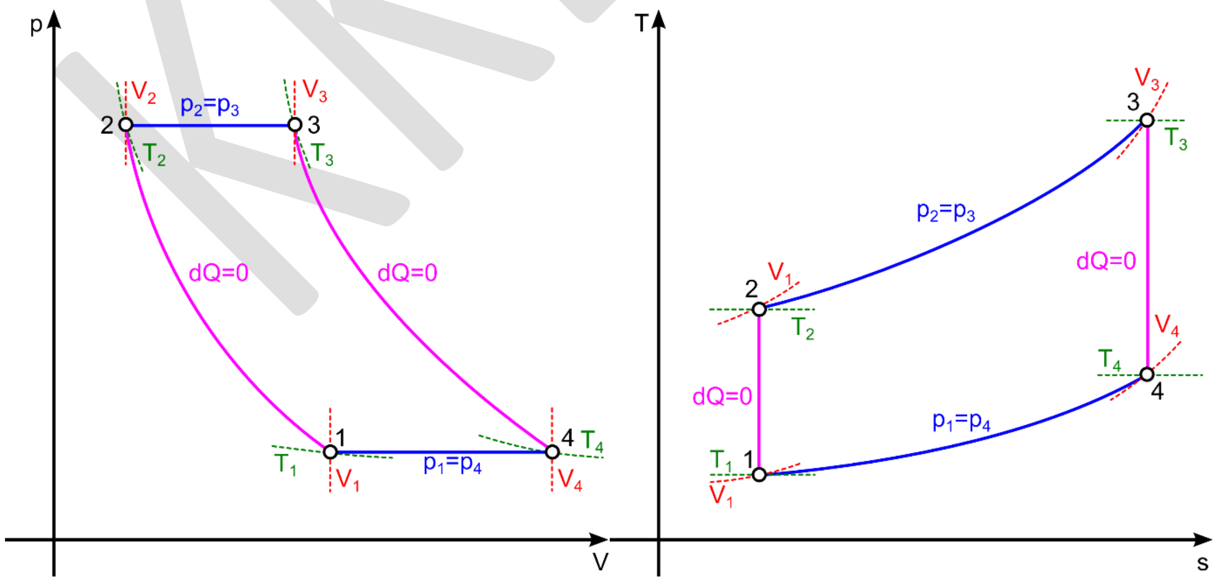
Pro T-s diagram:

1 – 2 Izoentropická změna (dq=0 ; ds=konst.)

2 – 3 Izobara (izobarický přívod tepla)

3 – 4 Izoentropická změna (dq=0 ; ds=konst.)

4 – 1 Izobara (izobarický odvod tepla)



Obr. 2 p-V (vlevo) a T-s (vpravo) diagram Brayton-Ericsonova cyklu

Jak je napsáno v zadání a jak je vidět na grafu Bayton-Ericsonova cyklu, teplo se přivádí při konstantním tlaku. Při výpočtu se opřeme o fakta, které jsme si odvodili už v předchozích případech (Výpočet Sabbatova oběhu – viz http://home.zcu.cz/~gaspar/cv/CV_TM_06_02.pdf). Tedy můžeme uvažovat, že velikost přivedeného tepla, je rovna rozdílu entalpií. Rozvineme tuto úvahu do rovnice:

$$q_p = \Delta h = c_p . \Delta T = c_{p.}(T_3 - T_2) = \frac{\kappa . r}{\kappa - 1} . (T_3 - T_2)$$

Z rovnice plyne, že musíme dopočítat jednotlivé teploty. Teplota před turbínou je nejvyšší teplota v Brayton-Ericsonovém cyklu, tedy dle obrázku je patrné, že je to v **bodě 3**. Jelikož tuto hodnotu máme zadanou, můžeme napsat:

$$T_3 = 873{,}15\ [K]$$

Ze znalostí o adiabatické změně (*viz. poznámky k cvičením z termomechaniky – Cvičení 4. – Adiabatická změna – rovnice (6) a (7))* a hodnoty stupně zvýšení tlaku v kompresoru je možné dopočítat teplotu v **bodě 2**:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_2 = T_1 . \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_1 . (\pi)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 293{,}15 . 6^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 489{,}12\ [K]$$

Po dosazení dostáváme množství přivedeného tepla:

$$q_p = c_{p.}(T_4 - T_1) = \frac{\kappa . r}{\kappa - 1} . (T_3 - T_2) = \frac{1{,}4 . 287{,}04}{1{,}4 - 1} . (873{,}15 - 489{,}12) = 385811{,}9\ [J . kg^{-1}]$$

Poznámka: V zadání je uvedeno „pro oběhové množství jednoho kilogramu vzduchu", tedy pro $\dot{m} = 1\ [kg . s^{-1}]$*. Z toho plyne, že výsledek můžeme prohlásit za správný a konečný.*

Velikost odvedeného tepla stanovíme obdobně:

$$q_o = \Delta h = c_p . \Delta T = c_{p.}(T_1 - T_4) = \frac{\kappa . r}{\kappa - 1} . (T_4 - T_1)$$

Ze znalostí o adiabatické změně (*viz. poznámky k cvičením z termomechaniky – Cvičení 4. – Adiabatická změna – rovnice (6) a (7))* a hodnoty stupně zvýšení tlaku v kompresoru je možné dopočítat teplotu v **bodě 4**:

$$T_4 = T_3 . \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_3 . \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 873{,}15 . \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 523{,}31\ [K]$$

Po dosazení dostáváme množství odvedeného tepla:

$$q_o = c_{p.}(T_4 - T_1) = \frac{\kappa . r}{\kappa - 1} . (T_1 - T_4) = \frac{1{,}4 . 287{,}04}{1{,}4 - 1} . (523{,}31 - 293{,}15) = -231227{,}94\ [J . kg^{-1}]$$

Práce cyklu může být vypočtena různými způsoby. Zaměříme se na nejjednodušší, tj. velikost práce cyklu je dána rozdílem přivedeného a odvedeného tepla.
(Výpočet Sabbatova oběhu – viz http://home.zcu.cz/~gaspar/cv/CV_TM_06_02.pdf).

Tedy velikost práce cyklu je:

$$a_c = q_p - |q_o| = 385811{,}9 - 231227{,}94 = 154583{,}96\ \ [J . kg^{-1}]$$

Jelikož hmotnost pracovního média je jeden kilogram, tak výkon cyklu bude stejný jako práce cyklu:

$$P = \dot{m} . a_c = 1 . 154583{,}96 = 154583{,}96\ [W]$$

Účinnost cyklu vypočtěme dle již známé rovnice:

$$\eta_t = \frac{a_c}{q_p} = \frac{154583{,}96}{385811{,}9} = 0{,}4\ [-] = 40[\%]$$