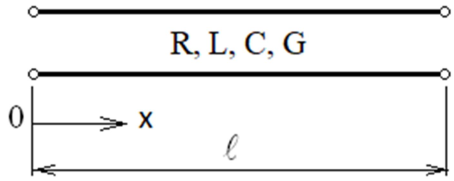
Homogenní vedení

Homogenní vedení je dlouhé vedení s konstantními parametry po celé délce (úseku). Obvykle jde o dvouvodičové či koaxiální vedení.



Obr. 1. Homogenní vedení

V elektrických obvodech se běžně používá zjednodušující předpoklad, že elektromagnetická energie se šíří nekonečnou rychlostí, takže napětí a proudy nezávisejí na prostorové vzdálenosti mezi prvky a jsou funkcí pouze jedné proměnné – času. Vedení považujeme za dlouhé, pokud již nemůžeme zanedbat zpoždění, způsobená konečnou rychlostí šíření vlny (rozruchu). Čím vyšší je rychlost změn (dynamika) vstupních veličin (napětí a proudů), tím kratší délka vedení postačuje k tomu, aby se výstupní signály v daném čase významně odlišovaly od vstupních. Napětí i proudy jsou pak funkcemi dvou proměnných.

$$u = u(t, x); \quad i = i(t, x)$$

Kritérium, zda musíme či nemusíme považovat vedení za dlouhé, tj. brát v úvahu i prostorovou souřadnici, je zřejmé v případě harmonických časových průběhů veličin. Pokud je délka vedení řádově srovnatelná s délkou sinusové vlny $\lambda = \frac{v_0}{f}$, či je větší, je nezbytné na vedení pohlížet jako na tzv. dlouhé, homogenní, s rozloženými parametry. Symbol v_0 označuje rychlost šíření harmonické vlny dané frekvence f po vedení a zpravidla se blíží rychlosti světla c, řádově bývá 10^8 m/s. Pro lepší představu, teorii homogenního vedení je potřeba aplikovat při 50 Hz na vedení dlouhé například 1000 km, při 1 GHz pak na vedení dlouhé několik centimetrů.

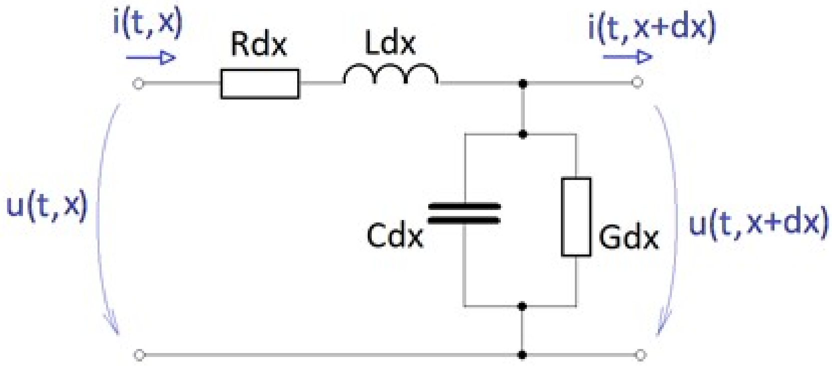
Teorie homogenního vedení je na pomezí mezi Elektrickými obvody a Elektromagnetickým polem. Jelikož jsou zde vodiče a energii v každém místě vedení popisujeme makroskopickými veličinami – napětím a proudem, přísluší tato problematika do Elektrických obvodů.

Vedení je obecně charakterizováno čtyřmi vlastnostmi, vztahovanými na jednotku délky: Je to

podélný odpor R (Ω/m),
podélná indukčnost L (H/m),
příčná kapacita C (F/m) a
příčný svod G (S/m).

V energetice se většinou jako jednotka délky vedení uvažuje 1 km místo 1 m.
Svod G často zahrnuje i vyzařování elektromagnetické energie do okolního prostoru.

Při analýze se homogenní vedení modeluje pomocí kaskády elementárních dvojbranů, reprezentujících úseky vedení délky $\Delta x \to 0$, tj. dx. Dvojbrany by měly být – stejně jako je vedení – symetrické podle příčné osy. Vzhledem k nekonečně krátké délce elementů si můžeme dovolit používat i jednodušší nesymetrické články (obr. 2), aniž by vznikla chyba.



Obr. 2. Element vedení délky dx

Pro nekonečně krátké úseky vedení lze funkce, vyjadřující závislost napětí a proudů na souřadnici x, aproximovat lineárními průběhy (přímkami), tj. vyloučit vyšší derivace. Tento předpoklad se v matematice všeobecně uplatňuje u spojitých funkcí na intervalech délky dx. Můžeme tedy psát:

$$u(t,x+dx) = u(t,x) + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\, dx$$

$$i(t,x+dx) = i(t,x) + \frac{\partial i(t,x)}{\partial x}\, dx$$

Neboli

$$-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} dx = u(t,x) - u(t,x+dx)$$

$$-\frac{\partial i(t,x)}{\partial x} dx = i(t,x) - i(t,x+dx)$$

Rozdíl vstupního a výstupního napětí elementu vyplývá z úbytku napětí na podélné větvi s prvky Rdx a Ldx:

$$u(t,x) - u(t,x+dx) = Rdx\; i(t,x) + Ldx\, \frac{\partial i(t,x)}{\partial t}$$

Podobně, úbytek proudu v elementu způsobuje proud příčnou větví, tj. prvky Cdx a Gdx

$$i(t,x) - i(t,x+dx) = Gdx\; u(t,x+dx) + Cdx \frac{\partial u(t,x+dx)}{\partial t}$$

$$i(t,x) - i(t,x+dx) = Gdx\; u(t,x) + Gdx \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} dx + Cdx\, \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \mathrm{Cdx} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} dx$$

Zanedbáme-li dva členy, ve kterých se dx vyskytuje dvakrát (dx^2), jež jsou nekonečně menší než členy s jedním dx, dostaneme po dosazení do předchozí soustavy rovnic a zkrácení dx takzvané ***telegrafní rovnice***

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} &= R\, i(t,x) + L\frac{\partial i(t,x)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(t,x)}{\partial x} &= G\, u(t,x) + C\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \end{aligned}}$$

Tyto diferenciální rovnice pro element vedení poprvé sestavil William Thomson roku 1855 při analýze chování telegrafních kabelů, nově spojujících Evropu s Amerikou.

Řešení pro harmonické ustálené stavy

Symbolicko-komplexním zobrazením telegrafních rovnic dostaneme

$$-\frac{d\bar{U}(x)}{dx} = (R + j\omega L)\, \bar{I}(x)$$

$$-\frac{d\bar{I}(x)}{dx} = (G + j\omega C)\, \bar{U}(x)$$

kde $\bar{U}$(x) a $\bar{I}$(x) jsou fázory v místě určeném souřadnicí *x*.

Nyní dosaďme druhou rovnici do první, zderivované podle *x*

$$\frac{d^2\bar{U}}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)\, \bar{U}$$

Označme násobnou konstantu

$$(R + j\omega L)(G + j\omega C) = \bar{\gamma}^2$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Komplexní konstanta $\bar{\gamma}$ se nazývá ***konstanta šíření***, s jejím užitím

$$\frac{d^2\bar{U}}{dx^2} - \bar{\gamma}^2\, \bar{U} = 0$$

Získali jsme tak v SKM vlnovou rovnici pro napětí. Jejím řešením (diferenciální rovnice druhého řádu) je zřejmě kombinace dvou exponenciál

$$\bar{U} = \bar{K}_1 e^{\lambda_1 x} + \bar{K}_2 e^{\lambda_2 x}$$

Z charakteristické rovnice $\lambda^2 - \bar{\gamma}^2 = 0$ je patrné, že

$$\lambda_{1,2} = \pm\, \bar{\gamma}$$

Takže

$$\bar{U} = \bar{K}_1 e^{\bar{\gamma}x} + \bar{K}_2 e^{-\bar{\gamma}x}$$

Dosazením tohoto řešení do proudové telegrafní rovnice a následnou integrací ještě doplníme řešení pro proud:

$$-\frac{d\bar{I}(x)}{dx} = (G + j\omega C)(\bar{K}_1 e^{\bar{\gamma}x} + \bar{K}_2 e^{-\bar{\gamma}x})$$

$$-\bar{I}(x) = (G + j\omega C)(\frac{\bar{K}_1}{\bar{\gamma}} e^{\bar{\gamma}x} - \frac{\bar{K}_2}{\bar{\gamma}} e^{-\bar{\gamma}x})$$

kde zavedeme ***vlnovou impedanci*** $\bar{Z}_0$

$$\frac{(G + j\omega C)}{\bar{\gamma}} = \frac{(G + j\omega C)}{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{(G + j\omega C)}{(R + j\omega L)}} = \frac{1}{\bar{Z}_0}$$

Nyní můžeme přehledně zapsat obě dosud neupřesněná (s neznámými konstantami K) řešení telegrafních rovnic

$$\bar{U}(x) = \bar{K}_1 e^{\bar{\gamma}x} + \bar{K}_2 e^{-\bar{\gamma}x}$$

$$\bar{I}(x) = -\frac{\bar{K}_1}{\bar{Z}_0} e^{\bar{\gamma}x} + \frac{\bar{K}_2}{\bar{Z}_0} e^{-\bar{\gamma}x}$$

Vidíme, že vlnová impedance $\bar{Z}_0$ umožňuje vzájemně přepočítávat fázory napěťové a proudové vlny.

Dva členy v řešení vlnových rovnic reprezentují šíření vln na vedení oběma směry. Člen se záporným znaménkem v exponentu vyjadřuje šíření vlny ve směru růstu souřadnice x, přičemž amplituda vln vlivem útlumu klesá. Je to tzv. postupná neboli hlavní vlna. Druhý člen představuje šíření vlny v záporném směru osy x, amplituda vln ve směru jejich postupu opět klesá, respektive neroste. Příčinou je snižující se hodnota x v exponentu. Jde zpravidla o vlnu odraženou od konce vedení. Záporné znaménko u odražené proudové vlny ukazuje, že proudy postupující opačnými směry se odčítají.

Fázory hlavní a odražené napěťové vlny se v každém místě vedení sčítají, v závislosti na jejich vzájemných fázových posunech pak vzniká tzv. částečné (a ve zvláštním případě úplné) ***stojaté vlnění***. Vyznačuje se střídáním ***kmiten*** a ***uzlů***, tj. míst, kde je efektivní hodnota, měřitelná voltmetrem, trvale vyšší, a míst, kde má efektivní hodnota trvale lokální minimum.

Odražená vlna je velikostí srovnatelná s hlavní vlnou zejména při nezatíženém konci vedení (konec naprázdno) a vzniklé stojaté vlnění může mít kmitny i s dvojnásobným napětím zdroje. U vysokonapěťových vedení v energetice se tento nebezpečný úkaz nazývá Ferrantiho jev.

Integrační konstanty $\bar{K}_1$ a $\bar{K}_2$ lze určit ze znalosti konkrétních hodnot $\bar{U}_p$ a $\bar{I}_p$ na počátku vedení (počáteční podmínky). Platí (pro x = 0):

$$\bar{U}_p = \bar{K}_1 + \bar{K}_2$$

$$\bar{I}_p = -\frac{\bar{K}_1}{\bar{Z}_0} + \frac{\bar{K}_2}{\bar{Z}_0}$$

Odkud

$$\bar{K}_1 = \frac{\bar{U}_p - \bar{Z}_0 \bar{I}_p}{2}$$

$$\bar{K}_2 = \frac{\bar{U}_p + \bar{Z}_0 \bar{I}_p}{2}$$

Po upřesnění konstant pomocí počátečních podmínek je výsledné řešení telegrafních rovnic pro harmonické ustálené stavy

$$\bar{U}(x) = \bar{U}_p \frac{e^{\bar{\gamma}x} + e^{-\bar{\gamma}x}}{2} - \bar{Z}_0 \bar{I}_p \frac{e^{\bar{\gamma}x} - e^{-\bar{\gamma}x}}{2}$$

$$\bar{I}(x) = -\frac{\bar{U}_p}{\bar{Z}_0} \frac{e^{\bar{\gamma}x} - e^{-\bar{\gamma}x}}{2} + \bar{I}_p \frac{e^{\bar{\gamma}x} - e^{-\bar{\gamma}x}}{2}$$

Zápis lze formálně zjednodušit užitím Eulerových vztahů, definujících hyperbolické funkce

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{U}(x) &= \bar{U}_p cosh\,\bar{\gamma}x - \bar{Z}_0 \bar{I}_p \sinh \bar{\gamma}x \\ \bar{I}(x) &= -\frac{\bar{U}_p}{\bar{Z}_0} \sinh \bar{\gamma}x + \bar{I}_p \cosh \bar{\gamma}x \end{aligned}}$$

Provozní parametry vedení

V předchozích rovnicích byly zavedeny dvě komplexní konstanty, jejichž souhrnný název je *provozní parametry* homogenního vedení. Je to vlnová impedance $\bar{Z}_0$ a konstanta šíření $\bar{\gamma}$ $(gama)$.

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{Z}_0 &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = Z_0 e^{j\varphi} \\ \bar{\gamma} &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \beta + j\alpha \end{aligned}}$$

Reálná část konstanty šíření $\bar{\gamma}$ je činitel tlumení β a imaginární část je činitel fázového posunu α (úhel v radiánech), vztažený na jednotku délky. Při postupu vlny po vedení vyjadřuje konstanta $e^{-\beta}$ změnu amplitudy (útlum), připadající na jednotku délky. β se proto obvykle udává v logaritmické jednotce dB a popisuje tak přímo poměr efektivních hodnot napětí.na začátku a konci úseku vedení jednotkové délky.

Provozní parametry, jakožto komplexní čísla, představují čtveřici údajů, která je ekvivalentní ke čtyřem vlastnostem R, L, C, a G. Pomocí výše uvedených vztahů se tyto charakterizace dají navzájem snadno přepočítávat.

Ideální vedení

Indukčnost a kapacitu nelze u homogenního vedení nikdy zanedbat, jinak by vedení nebylo schopno přenášet elektromagnetickou energii.

V mnoha případech však můžeme předpokládat, že podélný odpor a příčný svod se významně neprojevují a lze je zanedbat:

$$R = 0, \qquad G = 0$$

Tím se dostáváme k pojmu *ideální vedení*, které je energeticky bezeztrátové a má poměrně jednoduché vlastnosti.

Pro provozní parametry zde platí

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0$$

$$\bar{\gamma} = j\omega\sqrt{LC} = j\alpha$$

kde fázový posun na jednotku délky $\alpha = \omega\sqrt{LC}$. Činitel tlumení $\beta = 0$.

S přihlédnutím ke vzorcům $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ (resp. $\lambda\alpha = 2\pi$) a $T = \frac{2\pi}{\omega}$ můžeme snadno spočítat rychlost šíření vlny na ideálním vedení v_0:

$$\boxed{v_0 = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Rychlost v_0 je na ideálním vedení nezávislá na frekvenci ω. To znamená, že všechny harmonické složky obecných neharmonických signálů postupují stejnou rychlostí. Vzhledem k tomu, že i útlum je na ideálním vedení pro všechny harmonické složky stejný – nulový, nedochází na tomto vedení ke zkreslení výstupního signálu. Například pravoúhlé impulsy postupují po ideálním vedení beze změny svého tvaru a velikosti.

U ideálního vedení lze definovat *dobu průletu* t_0, tj. dobu potřebnou k tomu, aby se rázová vlna dostala ze začátku na konec vedení:

$$t_0 = \frac{l}{v_0} = l\sqrt{LC}$$

Řešení telegrafních rovnic pro ideální vedení má v SKM tvar

$$\bar{U}(x) = \bar{U}_p cos\ \alpha x\ - jZ_0 \bar{I}_p \sin \alpha x$$

$$\bar{I}(x) = -j\frac{\bar{U}_p}{Z_0}\sin \alpha x\ + \bar{I}_p \cos \alpha x$$

jelikož cosh(jx) = cos x a sinh(jx) = j sin x.

Výstupní impedanci ideálního vedení délky *l*, při uvažování ideálního napěťového zdroje na vstupu ($x = l$), dostaneme podílem posledních rovnic

$$\bar{Z}_k = \frac{\bar{U}(l)}{\bar{I}(l)} = -jZ_0 tg(\alpha l)$$

Je zřejmé, že výstupní impedance $\bar{Z}_k$ nabývá nulové hodnoty pro vedení délky $l = k\frac{\pi}{\alpha}$, kde k je celé číslo. Pochopitelně je zde nulové také napětí. I ve všech dalších místech vyhovujících uvedenému vztahu je napětí na vedení nulové. Naopak pro vedení délky $l = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ je při nulové vstupní impedanci výstupní impedance nekonečná. Nekonečné impedanci odpovídá nulový proud.

Podobně bylo odvozeno, že vstupní impedance vedení

$$\bar{Z}_p = Z_0 \frac{\bar{Z}_k + jZ_0 tg\ \alpha l}{Z_0 + j\bar{Z}_k tg\ \alpha l}$$

Tento vzorec umožňuje při znalosti vstupního napětí $\bar{U}_p$, zatěžovací impedance $\bar{Z}_k$ a vlnové impedance vedení Z_0 spočítat příslušný vstupní proud $\bar{I}_p$.

$$\bar{I}_p = \frac{\bar{U}_p}{\bar{Z}_p}$$

Pro ideální vedení na konci naprázdno ($\bar{Z}_k \to \infty$)

$$\bar{Z}_p = -jZ_0 \frac{1}{tg\ \alpha l}$$

Součinitel odrazu vln

Jestliže dosadíme do vzorce pro výpočet vstupní impedance $\bar{Z}_p$ ideálního vedení hodnotu zatěžovací impedance $\bar{Z}_k = Z_0$

$$\bar{Z}_p = Z_0 \frac{Z_0 + jZ_0 tg\ \alpha l}{Z_0 + jZ_0 tg\ \alpha l}\ ,$$

zjistíme, že $\bar{Z}_p = Z_0$.

Tento výsledek platí i pro konec vedení a pro celý jeho průběh. Na vedení tedy neexistuje odražená vlna. Hovoříme o ***impedančním přizpůsobení zátěže***. V tomto případě se přenáší ze zdroje do zátěže maximální výkon, označovaný jako ***přirozený výkon vedení***. Jeho velikost je

$$P_P = \frac{U_p^2}{Z_0}$$

Obecně je ***činitel odrazu*** na konci vedení definován vztahem

$$\boxed{\bar{r} = \frac{\bar{Z}_k - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_k + \bar{Z}_0}}$$

Jeho modul $r \in < -1; 1 >$. Pokud zajistíme impedanční přizpůsobení zátěže (nebo na rozhraní mezi dvěma různými úseky vedení při $\bar{Z}_{02} = \bar{Z}_{01}$) je

$$\bar{r} = 0$$

Do zátěže jinak přechází součet hlavní plus odražené napěťové vlny, určený *součinitelem přenosu napětí* (obě napětí se sčítají)

$$\bar{s}_u = 1 + \bar{r} = \frac{2\bar{Z}_k}{\bar{Z}_k + \bar{Z}_0}$$

Součinitel přenosu proudu je pak (uplatňují se opačné směry proudů)

$$\bar{s}_i = 1 - \bar{r} = \frac{2\bar{Z}_0}{\bar{Z}_k + \bar{Z}_0}$$