

VORONEHO DIAGRAMY A JEJICH APLIKACE

Kateřina Samková

Obsah

1	Historie	2
2	Definice	2
2.1	Poštovní problém	2
2.2	Problém skládky toxického odpadu	3
2.3	Geometrická interpretace	4
3	Jak vypadají Voroneho diagramy	4
4	Výpočet Voroneho diagramu	7
5	Delauneho triangulace	7
6	Zobecnění Voroneho diagramů	8
6.1	Přidání vah	8
6.2	Rozšíření generující množiny	8
6.3	Pohyb bodů	9
6.4	Změna metriky	10
7	Použití	10
7.1	Biologie	10
7.2	Geologie	11
7.3	Mozaiky	12
7.4	Chemie	12
7.5	Geografie	13
7.6	Modelování terénu a tekoucí lávy	13
7.7	Robotika	14
7.8	Počítačová grafika	15
7.9	Příroda, zoologie	15
7.10	Geometrické problémy	16
7.11	Hranice osobního prostoru	16

1 Historie

První použití Voroneho diagramů můžeme vystopovat až do roku 1644, kde se objevily v Descartově práci “Principy filozofie”, kde s jejich pomocí ukazoval uspořádání hmoty ve sluneční soustavě a jejím okolí. Německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet byl první, kdo se začal zabývat přímo těmito diagramy - používal 2D a 3D Voroneho diagramy ve svých studiích kvadratických forem v roce 1850, proto se také setkáváme někdy s názvem *Dirichletovy mozaiky*. Britský fyzik John Snow použil diagramy v roce 1854 k ilustraci jevu, kdy většina lidí, kteří zemřeli v Soho při epidemii cholery žila blíž k infikované pumpě na Broad Street než k ostatním pumpám v Londýně.

Struktury jsou pojmenovány po ruském matematikovi Georgy Fedoseevichovi Voronoi (nebo Voronoy), který je v roce 1908 nadefinoval a dále se zabýval zobecněným n -rozměrným případem diagramů. Voroneho diagramy, které se používají v geofyzice a meteorologii k analýze prostorově rozložených dat (měření srážek, vlhkosti, atd.) se nazývají *Thiessenovy polygony* po americkém meteorologovi Alfredu H. Thiessenovi. Ve fyzice materiálů jsou diagramy také známy jako *Wigner-Seitz jednotkové buňky*. V případě zobecnění na jiné metrické prostory jsou buňky často nazývané *metrické fundamentální polygony*.

V matematice jsou Voroneho diagramy speciálním případem dekompozice metrického prostoru určené vzdálenostmi od specifické diskrétní množiny objektů v prostoru, například diskrétní množinou bodů. Kromě matematiky jsou dnes Voroneho diagramy hojně používané v biologii, medicíně, robotice, chemii, geografii, karotografii atd.

2 Definice

Voroneho diagram dané množiny bodů je kolekce oblastí, které rozdělují rovinu. Každá oblast koresponduje s jedním ze zadaných bodů a všechny ostatní body náležící jedné oblasti jsou v dané metrice blíž svému odpovídajícímu bodu než všem ostatním.

Všechny Voroneho oblasti jsou konvexní mnohoúhelníky. Některé z nich jsou nekonečné - ty korespondují s body konvexního obalu (konvexní obal množiny bodů $\mathbf{P}$ v reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ je nejmenší množina obsahující $\mathbf{P}$). Hranicí mezi dvěma sousedními oblastmi je úsečka (případně polopřímka nebo přímka), která leží na ose úsečky spojující odpovídající body sousedních oblastí. Obvykle se potkávají tři Voroneho oblasti v jednom Voroneho bodu. Pokud tři body určují Voroneho diagram, kružnice, která je těmito třemi body určená má střed právě ve Voroneho bodu.

2.1 Poštovní problém

Ve městě se nachází pošty a je potřeba zjistit, kteří obyvatelé budou každou z pošt navštěvovat. Budeme předpokládat některá zjednodušení (která můžeme zobecňovat - viz 6):

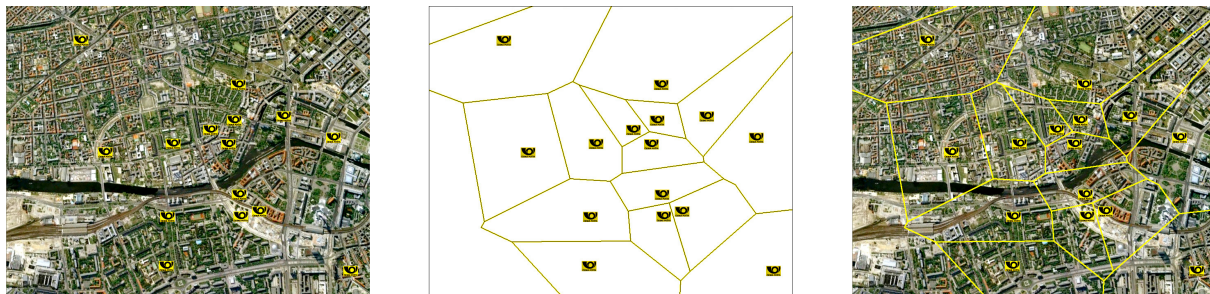
- Neuvažujeme překážky v cestě - domy, zatačky, řeky, atd., takže náklady na cestu se rovnají součtu ceny dopravy a ceny služeb (ty by měly být všude stejné).

- Cenu dopravy získáme jako součin ceny za jednotku vzdálenosti (konstantní) a Euklidovské vzdálenosti na poštu.

Místo pošty bychom mohli potřebovat vyzkoumat, do jakého supermarketu chodí lidé nakupovat. V tom případě je třeba minimalizovat celkové náklady, kromě cesty tedy ještě přibývá cena zboží. V tomto modelu musíme přidat ještě další zjednodušení:

- Cena zboží je stejná v každém obchodě.
- Náklady na získání zboží jsou rovné součtu ceny zboží a ceny dopravy.
- Zákazník se snaží minimalizovat náklady na získání zboží.
- Faktory typu úroveň služeb, šíře sortimentu atd. neuvažujeme.

Samozřejmě zejména předpoklady stejných cen a lineárního růstu ceny dopravy uvnitř města nejsou ideální, proto nám tento model poskytuje pouze hrubou aproximaci problému. Při vymodelování situace se vytvoří takové oblasti, že lidí bydlících v jedné z nich budou jezdit na poštu (do obchodu) odpovídající danému regionu. To přesně odpovídá definici Voroneho diagramu, kde pošty jsou body generující sítě a regiony jsou Voroneho oblasti. Jakmile tedy sestrojíme Voroneho diagram, můžeme pomocí něj vyřešit poštovní problém.



Obrázek 1: Poštovní problém a jeho Voroneho diagram

2.2 Problém skládky toxického odpadu

Máme n bodů v rovině, které reprezentují města a potřebujeme najít úložiště toxického odpadu a to tak, aby se nacházelo co nejdál od měst. Samozřejmě nejlepším řešením by bylo dát odpad někam úplně mimo města, co nejdál od nich, ale my zavedeme další omezení, které udělá řešení zajímavějším - je potřeba umístit odpad dovnitř konvexního obalu bodů reprezentujících města (za ním už je třeba další stát a odpad není možné vyvážet). S touto podmínkou budou všechna potenciální úložiště ležet na hranách Voroneho oblastí diagramu generovaného sítí měst a to skutečně nejvíc vzdálené najdeme na nejdelší spojnici dvou měst (viz Delauného triangulace, 5).

2.3 Geometrická interpretace

V předchozím textu jsme používali Euklidovskou vzdálenost, aniž bychom si jí nadefinovali. Euklidovská vzdálenost dvou bodů $P = [p_x, p_y]$, $Q = [q_x, q_y]$ je

$$|PQ| = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}.$$

Máme danou množinu $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ n bodů v rovině - ty nazveme sítí nebo středisky. Voroneho diagram množiny $\mathbf{P}$ je rozdělení roviny na n oblastí (regionů, buněk) příslušných k bodům sítě P_i takových, že bod roviny Q leží v oblasti příslušné bodu P_i právě tehdy, kdy je k němu v Euklidovské metrice blíže, než ke kterémukoliv ze zbylých bodů sítě P_j , tedy

$$|QP_i| < |QP_j| \quad \forall P_j \in \mathbf{P} : j \neq i.$$

Voroneho diagram množiny $\mathbf{P}$ značíme $Vor(\mathbf{P})$, oblast odpovídající místu P_i značíme $\nu(P_i)$ a nazýváme ji Voroneho oblastí (regionem, buňkou) místa P_i . Průsečíky hranic Voroneho oblastí nazýváme Voroneho body.

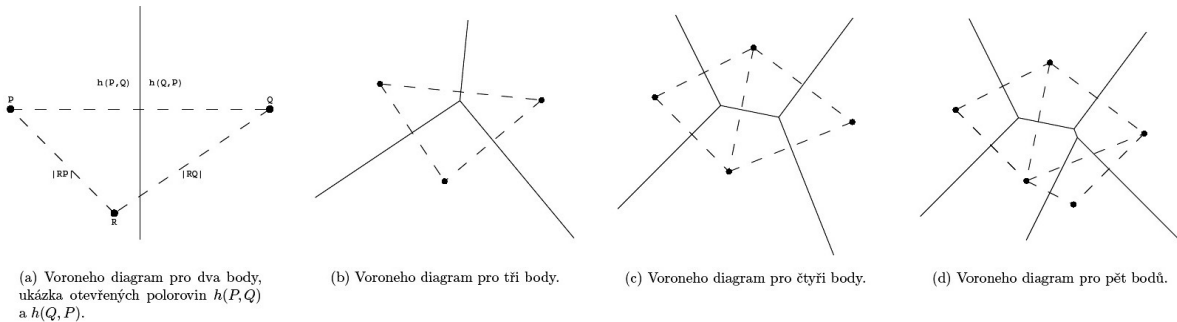
3 Jak vypadají Voroneho diagramy

Pokud je množina $\mathbf{P}$ dvoubodová (máme daná dvě místa P a Q), budou oblastmi Voroneho diagramu poloroviny ohraničené osou úsečky PQ .

$h(P, Q) \dots$ otevřená polorovina obsahující bod P ,

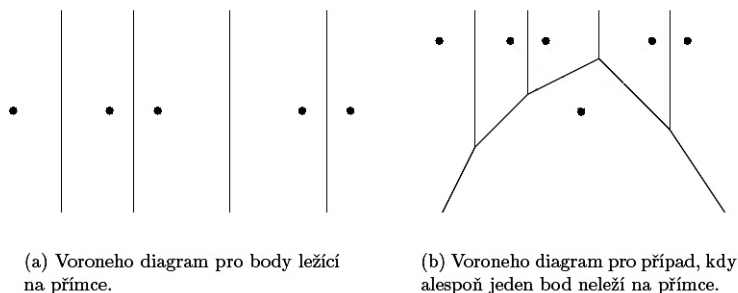
$h(Q, P) \dots$ otevřená polorovina obsahující bod Q .

Pro vícebodovou množinu $\mathbf{P}$ je Voroneho oblast průnikem $n - 1$ polorovin a proto jde o otevřenou konvexní mnohoúhelníkovou oblast ohraničenou nejvýše $n - 1$ vrcholy a nejvýše $n - 1$ hranami. Otevřené buňky náležejí bodům sítě P_i , které tvoří konvexní obal množiny $\mathbf{P}$. Voroneho diagram je vždy souvislý.

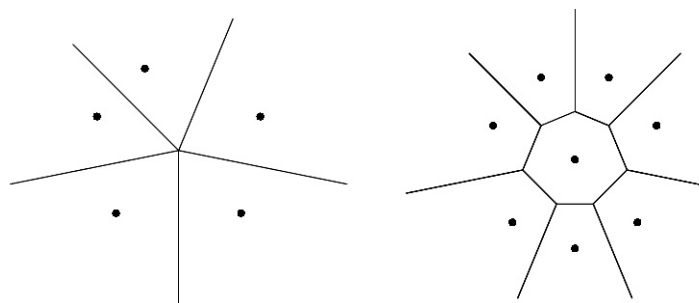


Obrázek 2: Voroneho diagramy

Hrany Voroneho diagramu jsou části přímek - tedy úsečky a polopřímky (na okrajích). Pokud jsou všechny body sítě kolineární, jsou hrany dokonce celé přímky, pokud existuje alespoň jeden bod sítě nekolineární s ostatními, žádná hrana pak nemůže být přímkou (viz obr.3).



Obrázek 3: Voroneho diagramy pro sít kolineárních bodů



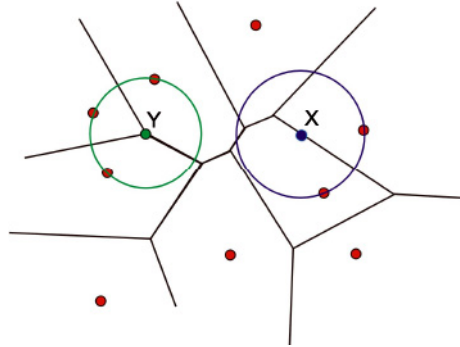
Obrázek 4: Voroneho diagramy pro sít obsahující alespoň čtyři body ležící na kružnici

Pomocí Eulerovy věty dokážeme, že počet vrcholů diagramu $Vor(\mathbf{P})$ je nejvýše $2n - 5$ a počet hran nejvýše $3n - 6$, kde n je počet bodů sítě množiny $\mathbf{P}$ (Eulerova věta udává vztah mezi počtem vrcholů (V), hran (E) a stěn (F) konvexního mnohohostěnu: $V - E + F = 2$). Přidáme nevlastní vrchol $(V + 1) - E + F = 2$:

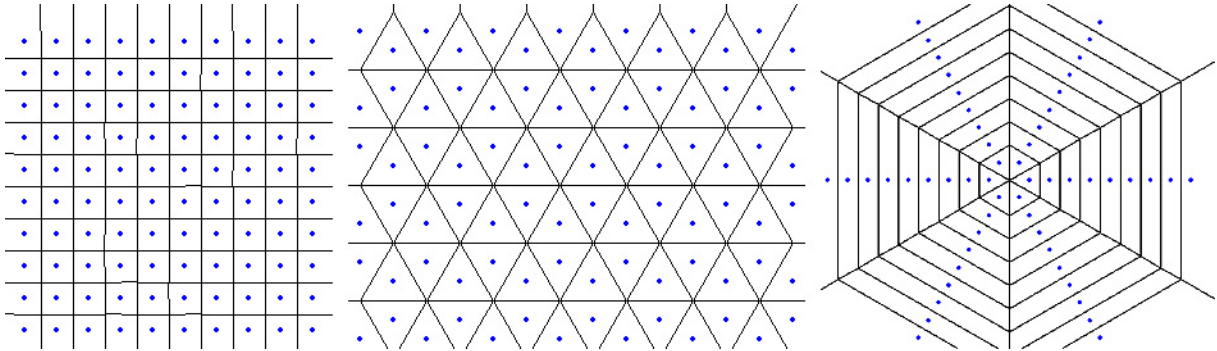
$$\begin{aligned} \sum_i d_i &= 2E \\ V + 1 &= 2 + E - n \\ 2E \geq 3(V + 1) &= 3(2 + E - n) \\ 2E &\geq 3(2 + E - n) \\ 3n - 6 &\geq E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= (V + 1) + n - 2 \\
2E &= 2(V + 1) + 2n - 4 \\
2(V + 1) + 2n - 4 &\geq 3(V + 1) \\
2n - 5 &\geq V
\end{aligned}$$

Dále víme, že hrany buněk jsou částmi os úseček $P_i P_j$, kde P_i, P_j jsou body sítě množiny $\mathbf{P}$ a Voroneho vrcholy jsou průsečíky těchto os. Všechny osy ale nemusí definovat hrany a všechny průsečíky os nemusí tvořit vrcholy Voroneho diagramu. Bod X leží na hraně $Vor(\mathbf{P})$ právě tehdy, když je středem kružnice, která prochází dvěma body sítě a žádný jiný bod sítě v této kružnici neleží. Obdobně je vrcholem bod Y , který je středem kružnice určené (procházející) třemi body sítě a žádný další bod sítě uvnitř této kružnice neleží (viz obr.5).



Obrázek 5: Body na hranách a vrcholech Voroneho diagramu



Obrázek 6: Voroneho diagramy pro speciální rozložení bodů sítě

4 Výpočet Voroneho diagramu

Pro výpočet Voroneho diagramu můžeme použít několik algoritmů:

- **Naivní (průnik polorovin)** - přímá aplikace definice Voroneho diagramu - složitost výpočtu jedné buňky je $O(n \log n)$, tedy $O(n^2 \log n)$ pro výpočet celého diagramu.
- **Inkrementální** - najdeme diagram pro nějaký jednoduchý případ (například vybereme dva nebo tři body z množiny generátorů) a pak postupně přidáváme po jednom zbylé body.
- **Rozděl a panuj** - zadanou generující množinu rekurzivně rozdělujeme, dokud nemáme množinu tří bodů, ze kterých jednoduše sestojíme diagram a následuje zpětný chod. Algoritmus je náchylný na numerické chyby, ale vypočítá celý diagram v čase $O(n \log n)$.
- **Fortuneho (zametací)** - používá se tzv. zametací přímka, kterou postupně pohybujeme jedním směrem a během pohybu se všechny informace potřebné pro výpočet uchovávají vytváří se hledaná struktura. Vypočítá celý diagram v čase $O(n \log n)$.
- **Metoda zdvihu** - transformací přiřazujeme bodu $P = [p_x, p_y]$ paraboloid $y = x^2 + y^2$ a rovinu $z = 2p_x x + 2p_y y - (p_x^2 + p_y^2)$, která je tečnou rovinou paraboloidu v bodě $\bar{P} = [p_x, p_y, p_x^2 + p_y^2]$ ($\bar{P}$ odpovídá kolmému průmětu bodu P na paraboloid). Najdeme všechny obrazy bodů generující množiny na paraboloid, odpovídající tečné roviny a projekce konvexního mnohostěnu vzniklého průnikem rovin je hledaný Voroneho diagram.

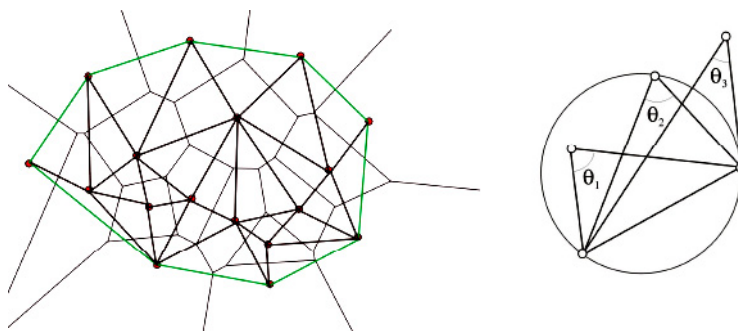
5 Delauneho triangulace

Delauneho triangulaci dostaneme, pokud spojíme navzájem úsečkami ty body sítě, jejichž buňky ve Voroneho diagramu sousedí (viz obr.7). Delauneho triangulace je duální k Voroneho diagramu, rozděluje konvexní obal bodů na síť trojúhelníků a díky dualitě jedno určuje druhé (tedy pokud máme spočítaný Voroneho diagram, snadno dostaneme Delauneho triangulaci a naopak). Taková triangulace lokálně minimalizuje nejmenší úhly a uvnitř kružnice opsané každému jejímu trojúhelníku neleží žádný další vrchol triangulace (to vyplývá z konstrukce diagramu, viz 3). Protože Voroneho diagram má nejvýše $3n - 6$ hran, v okamžiku, kdy chceme najít nejbližší 2 body z generující sítě, stačí prohledat $3n - 6$ dvojic (ty, mezi kterými existuje hrana v Delauneho triangulaci) namísto všech $\frac{n(n-1)}{2}$ dvojic původně připadajících v úvahu.

Některé ze zajímavých vlastností Delauneho triangulace tedy jsou:

- Dualita k Voroneho diagramu - jedno určuje druhé.
- Vlastnost prázdné kružnice - kružnice opsaná libovolnému trojúhelníku z Delauneho triangulace neobsahuje žádný další bod sítě.

- Jde o rovinný graf, který má z Eulerovy věty maximálně $3n - 6$ hran a $2n - 5$ trojúhelníků. Tato vlastnost může být využita při redukci problémů z třídy kvadratické složitosti (nejbližší pár bodů) na lineární.
- Obsahuje “tlusté” trojúhelníky v tom smyslu, že minimální úhel každého Delauného trojúhelníku je největší možný. Pokud bychom sepsali seznam všech úhlů v Delauného triangulaci ve vzestupném pořadí a udělali totéž s jakoukoliv jinou triangulací stejné množiny bodů, Delauného seznam bude určité lexikograficky menší.



Obrázek 7: Delauného triangulace a její minimalizace úhlů

6 Zobecnění Voroneho diagramů

Zobecněním Voroneho diagramů rozumíme změnu některých základních předpokladů.

6.1 Přidání vah

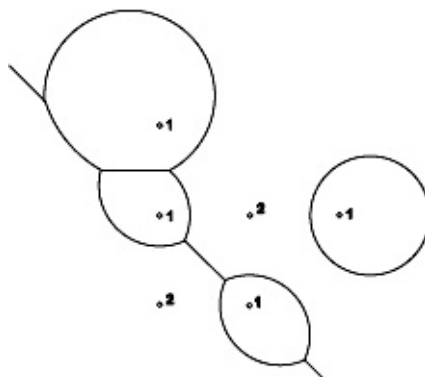
Jednotlivým bodům generující sítě přidáme váhy (to může reprezentovat například levnější ceny v některých obchodech z úvodního příkladu). Nyní tedy máme množinu n bodů v rovině $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ a k nim odpovídající váhy $v_1, \dots, v_n$ a změníme definici oblasti: bod Q leží v oblasti $\nu(P_i)$ právě tehdy, když

$$\frac{|QP_i|}{v_i} < \frac{|QP_j|}{v_j} \quad \forall j \neq i.$$

Hranami tohoto Voroneho diagramu budou části kružnic a části přímk.

6.2 Rozšíření generující množiny

Je možné kromě bodů přidat jako zdrojové objekty i přímky. Pak hledáme množiny bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu a úsečky, což je definice paraboly, a množiny bodů se stejnými vzdálenostmi od 2 bodů a od 2 přímek (obojí jsou přímky).



Obrázek 8: Přidání vah bodům generující sítě

Hrany Voroneho diagramu takové generující množiny tedy budou části přímků a části parabol. Tyto diagramy se využívají například v GIS. Množinu $\mathbf{P}$ bychom mohli rozšířit ještě o oblouky křivek a pak bychom museli zavést pojem osy křivky. Tato problematika by se řešila zavedením axiomatických a abstraktních Voroneho diagramů.

Stejně tak bychom mohli nadefinovat Voroneho diagram měřením vzdáleností k plochám místo k bodům. Tyto typy Voroneho buněk se používají v segmentaci obrázků (to je potřeba například při jejich kompresi nebo dekompozici), k optickému rozpoznávání charakterů a v dalších počítačových aplikacích. Ve výzkumu materiálů jsou polykrystalizace mikrostruktur v kovových slitinách běžně reprezentovány použitím Voroneho mozaiky.

6.3 Pohyb bodů

Řešíme, co se stane, pokud v pevně dané soustavě generujících bodů $P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$ budeme posledním bodem P_n pohybovat. Zkoumáním topologických vlastností Voroneho diagramů bylo zjištěno, že změna nastane tehdy, kdy bod P_n přidáváme nebo mažeme nebo když se změní konvexní obal množiny $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_{n-1}, P_n\}$.

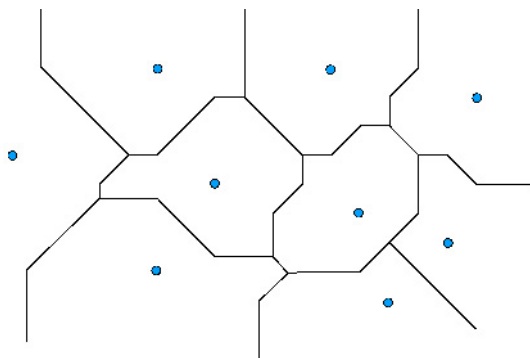
Složitější případ nastane, pokud necháme pohybovat všechny body soustavy. Jako analogii poštovnímu problému můžeme jako generující body sítě brát pošťáky, kteří se pohybují po městě. Pohyb každého z nich můžeme popsat rovnicí $p_i = s_i + v_i t$, kde $s_i \in \mathbb{R}$ je pozice i -tého pošťáka v čase $t = 0$ a v_i jeho rychlost. Mezi pošťáky umístíme další pohybující se osobu p_{i+1} a zajímá nás, ke komu bude v čase $t = 0$ nejbližší a koho dohoní jako prvního. Řešení může vést k diagramu ve třídimenzionálním prostoru (x, y, t) , kde osa t je kolmá na zbylé dvě osy a znázorňuje čas. V každém čase t_j množina bodů $p_i(t_j)$ definuje rovinný Voroneho diagram $Vor(p_i(t_j))$. S pohybem generujících bodů v čase se mění spojitě odpovídající Voroneho diagram a vytváří tak 3D objekty, kde hrany diagramu generují stěny a vrcholy generují hrany 3D diagramu (Voroneho diagram pohybujících se bodů).

6.4 Změna metriky

Voroneho diagramy nemusíme počítat pouze v Euklidovské metrice, mohli bychom použít například metriku L_p , kde definujeme vzdálenost dvou bodů v rovině $P = [p_x, p_y], Q = [q_x, q_y]$ jako

$$\|PQ\|_p = \sqrt[p]{|p_x - q_x|^p + |p_y - q_y|^p},$$
$$\|PQ\|_\infty = \max\{|p_x - q_x|, |p_y - q_y|\}$$

Samozřejmě v těchto metrikách bude vypadat Voroneho diagram jinak než v Euklidovské metrice (viz obr.9).



Obrázek 9: Voroneho diagram v L_1 metrice

7 Použití

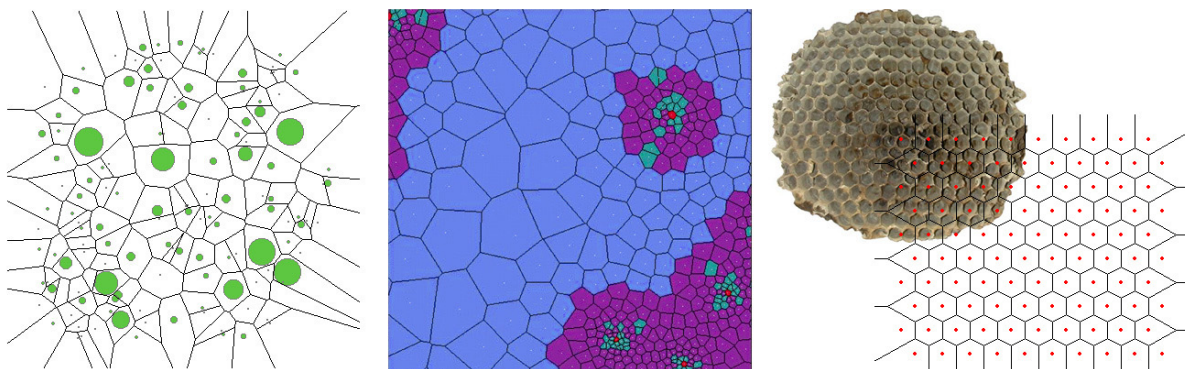
7.1 Biologie

Biologický model růstu rostlin - máme danou skupinu rostlin v rovině, které jsou charakterizované souřadnicemi, poloměrem a druhem. Různé druhy mají rozdílná pravidla, podle kterých rostou a které definují poměr mezi velikostí oblasti, kterou okupují a šířkou rostliny. Naším úkolem je studovat vztahy velikost-vzdálenost, velikost-plocha a vztahy v hustě posázeném systému rostoucích rostlin. K tomu se používá vážený Euklidovský Voroneho diagram, rostliny jsou reprezentovány body sítě, diagram je pro komunitu rostlin konstruován inkrementální metodou, oblast okupovaná rostlinou se spočítá jako obsah oblasti odpovídající buňky Voroneho diagramu.

Obdobně se dá modelovat růst buněk v mitóze (zelená, obr.10) - ty obalují krevní cesty (červená) a tyto buňky jsou pak obaleny odpočívajícími buňkami (fialová), které tvoří hrozny - skupiny buněk. Modře zobrazené rozlišené buňky doplňují prostor a obklopují hrozny.

Včelí plástve jsou také postavené do tvaru Voroneho diagramu, dokonce do speciálního mozaikovitého případu. Každá larva má mít stejně velký a stejně tvarovaný prostor, čehož se docílí právě tím, že se speciálně rozmístěné larvy vezmou jako generující body pro

Voroneho diagram. Výsledná struktura bude z horního pohledu množina šestiúhelníků (obr.10).



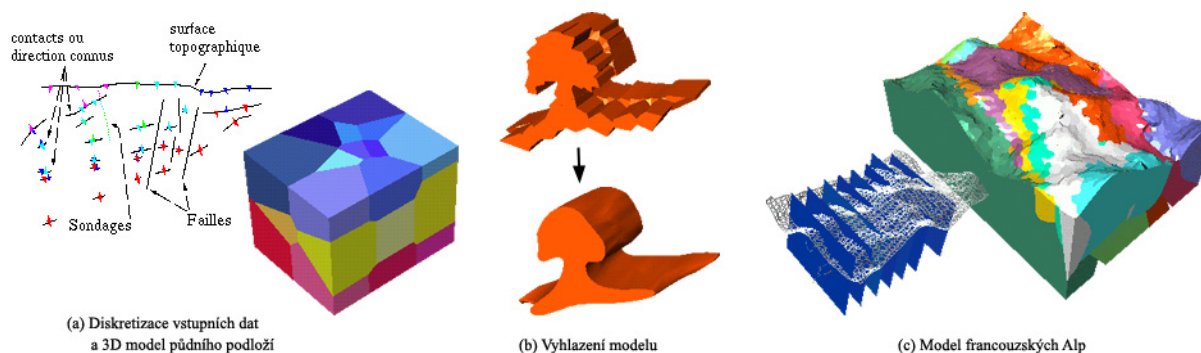
Obrázek 10: Model růstu rostlin (vlevo), simulace růstu buněk (uprostřed), včelí plástve

7.2 Geologie

Rekonstrukce geologických dat za použití 3D Voroneho diagramů (z projektu PRISME) - nekompletní a heterogenní data potřebujeme zpracovat, abychom s nimi mohli pracovat například na lokálních zkoumáních (vrty, studny, tunely), mohli udělat numerický model terénu, geologickou mapu, interpretovat geologické řezy atd.

Heterogenní vstupní data se diskretizují, vzniklým bodům se přiřadí barva (každá barva koresponduje s jinou geologickou formací - obr.11a). Voroneho diagram těchto bodů vytváří dekompozici prostoru do konvexních buněk. Tato metoda nám dává 3D reprezentaci půdního podloží. Geologické formace určené Voroneho diagramy jsou pak vyhlazeny za použití 3D deformací, které zachovávají vstupní topologii modelu.

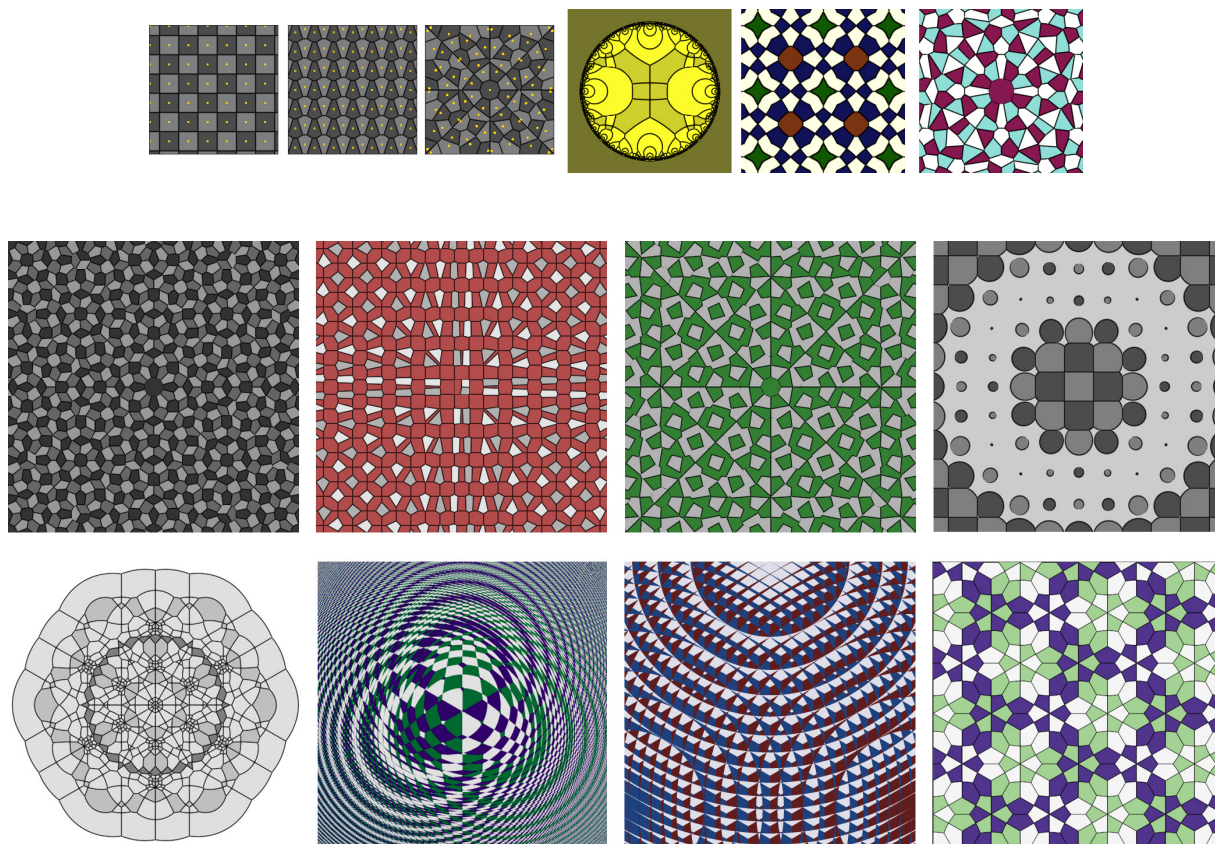
Na obrázku 11c je rekonstrukce půdního podloží Morges (francouzských Alp), na kterém jsou data vymodelovaná jako numerický model terénu, geologická mapa a osm geologických řezů (ty jsou interpretované a nekompletní, na víceméně paralelních rovinách).



Obrázek 11: Rekonstrukce geologických dat

7.3 Mozaiky

Pokud zvolíme určité speciální rozložení bodů generující sítě, můžeme dostat Voroneho diagramy jako zajímavé pravidelné mozaiky.

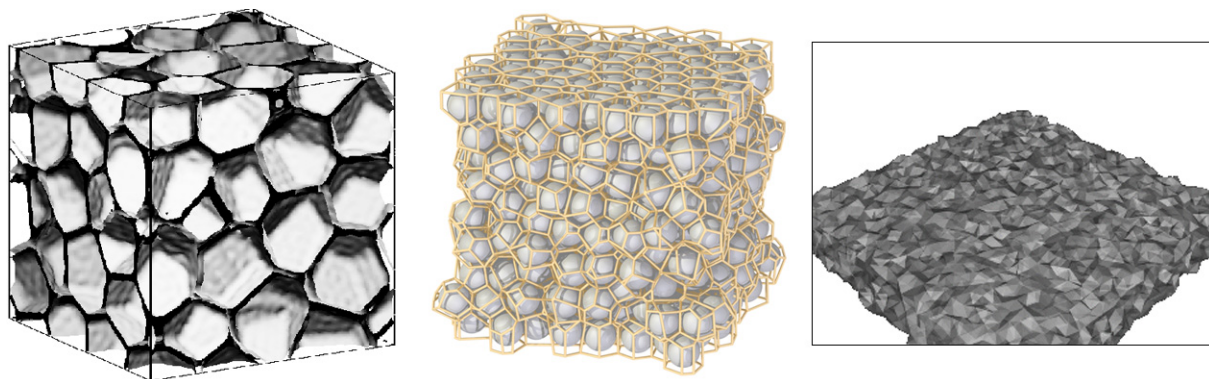


7.4 Chemie

Voroneho mozaikový rozklad - běžný 3D model buněk, chemických prvků apod. - se vykresluje jako Voroneho mozaika generujících bodů v prostoru. Kolem každého bodu je oblast, jejíž všechny body jsou k bodu sítě blíže než ke kterémukoliv dalšímu. Při konstrukci 3D diagramu necháme z každého bodu sítě růst koule, všechny stejnou rychlostí. Tam, kde se dvě sousední dotknou, dostáváme kontaktní bod. Po projití všech bodů můžeme sestavit Voroneho diagram, kde jsou všechny oblasti konvexními mnohostěny. Polygony náležící bodům konvexního obalu jsou otevřené. Na obrázku vlevo je aproximace Kelvinovy pěny Voroneho diagramem - všechny buňky mají jednotný tvar, jsou plné a splňují Plateauovo pravidlo pěnové rovnováhy (tři stěny se potkávají pod úhlem 120° a čtyři vzpěry pod úhlem $109,5^\circ$). Aby toto platilo, musí být stěny a hrany lehce zahnuté.

Pokud potřebujeme namodelovat tvar krystalu nějaké látky, stačí nám znát rozložení atomů v něm. Ty pak bereme jako generující množinu bodů pro Voroneho diagram, ten sestavíme, najdeme Delaunayho triangulaci a ta je pak velmi dobrou aproximací tvaru krystalu (obr.12

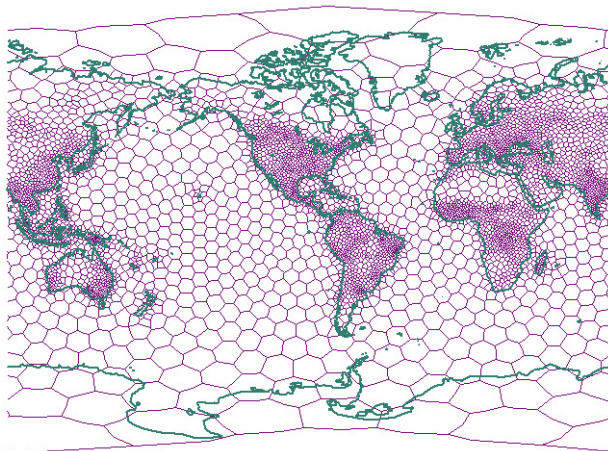
vpravo). Voroneho diagramy se také používají k určení strukturálních vlastností proteinů (nalezení největšího volného prostoru, konstrukce povrchu molekul atd.).



Obrázek 12: 3D Voroneho diagramy využívané v chemii

7.5 Geografie

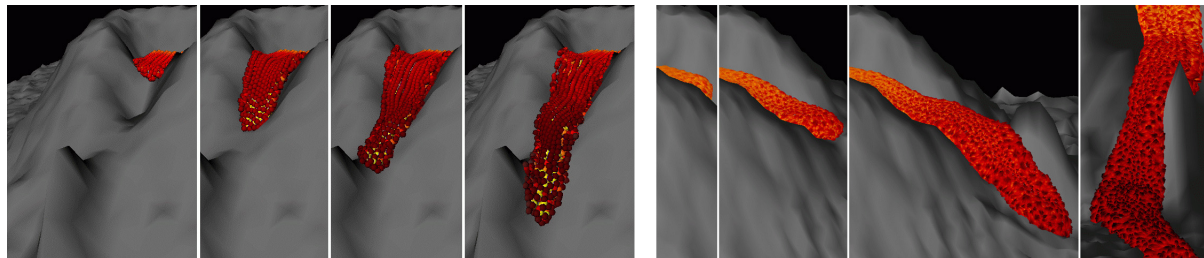
V geografii se Voroneho diagramy využívají k analýze sídel. Například rozložíme Zemi na polygony založené na lidské populaci. Kde je vysoká hustota obyvatel, bude víc buněk (také samozřejmě budou menší). Tam, kde žije obyvatel málo, vznikne málo velkých regionů - viz následující obrázek.



7.6 Modelování terénu a tekoucí lávy

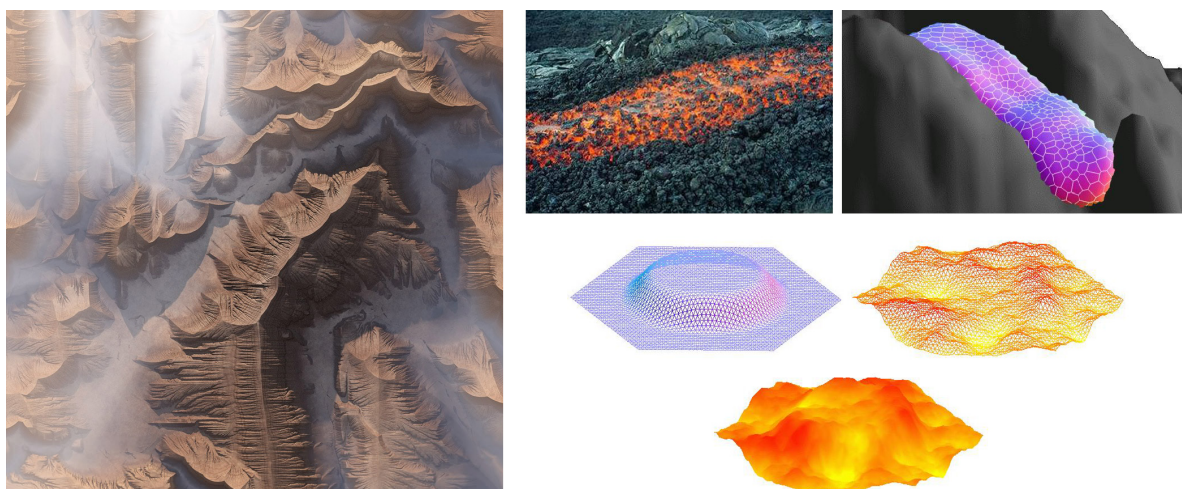
Cílem je realisticky namodelovat předpokládanou cestu lávy po výbuchu sopky - tato úloha je důležitá při plánování únikových cest, při evakuaci, při výstavbě nových domů v dosahu sopky atd. Velmi zjednodušeně (neuvažujeme rozdíly teplot, erozi, atd.) - nejdříve je potřeba namodelovat terén - to uděláme pomocí Voroneho diagramu a jemu odpovídající

Delauného triangulací. Pak se musí namodelovat láva - to je možné buď velmi jednoduše - jako množinu navzájem se dotýkajících koulí, které se přirozeně pohybují aproximací terénu (obr.13 vlevo) nebo použijeme v každém okamžiku středy těchto koulí jako generující body sítě pro 3D Voroneho diagram. Z něj vypočítáme opět Delauného triangulaci a tu bereme jako dobrou aproximaci pohybující se lávy (obr.13 vpravo). Obdobně se dá vygenerovat i animace povrchu lávy, pokud necháme na koule působit další síly (proud, atd.).



Obrázek 13: Modelování proudů lávy

Pomocí Delauného triangulace se dá vygenerovat terén velmi přesně a realisticky (obr.14 vlevo), můžeme pomocí ní kromě pohybu lávy namodelovat i její texturu (obr.14 vpravo - skutečná láva a vymodelovaná láva, vpravo dole je naznačen postup modelování povrchu).



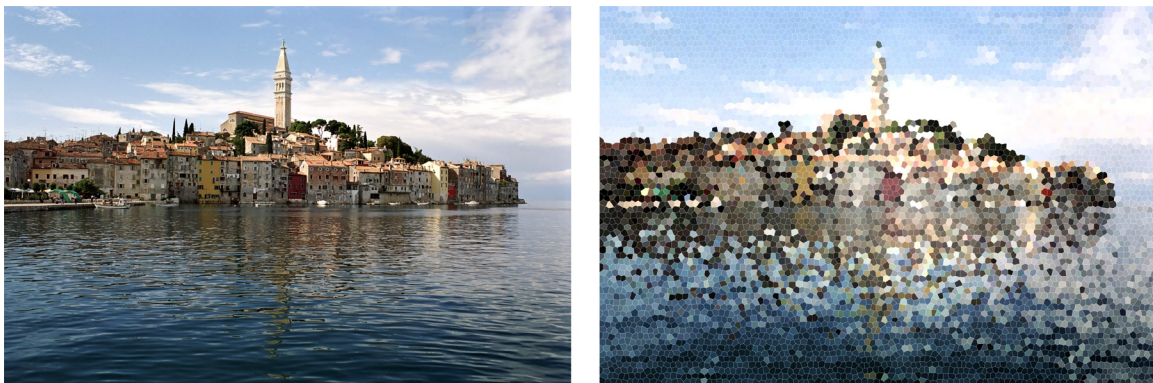
Obrázek 14: Modelování terénu, toku a textury lávy

7.7 Robotika

V kybernetice a robotice se Voroneho diagramy používají v okamžiku, kdy je potřeba naplánovat cestu nějakému pohybujícímu se stroji. Protože chceme, aby se robot vyhl co nejlépe překážkám, musí jet co nejdál od nich. Toho docílíme, když pro překážky jako generující plochy sítě vytvoříme Voroneho diagram a robota naprogramujeme tak, aby se pohyboval po hranách diagramu.

7.8 Počítačová grafika

Pomocí Voroneho diagramů se dají vygenerovat ideální mozaiky z barevné mapy. Středů oblastí s příbuznými barvami (v zadané toleranci) se vezmou jako generující body diagramu, vytvoří se hranice a jednotlivé buňky se vyplní barvou, která odpovídá generujícímu bodu oblasti. Podobný princip se používá také při kompresi obrázků.



Obrázek 15: Dekompozice fotky na mozaiku pomocí Voroneho diagramu

7.9 Příroda, zoologie

V zoologii se používají Voroneho diagramy k modelování teritorií jednotlivých zvířat, stád, tlup apod. Do buněk Voroneho mnohoúhelníků se tvarují křídla vážek, v důsledku smršťování a roztahování pudy buď kvůli zamrzání a roztávání tundry (Island, severní Evropa) nebo kvůli vysušování a zavodňování zeminy (solné pouště v jižní Americe) do těchto tvarů praská nebo se naopak shlukuje zem. Mořské korály si staví buňky do tvaru Voroneho diagramů (každý tvoreček staví rozdílnou rychlostí a v okamžiku setkání se sousedem už nemůže pokračovat dál). Dál je možné v přírodě pomocí 3D Voroneho diagramů modelovat srážky a jejich regionální předpověď.



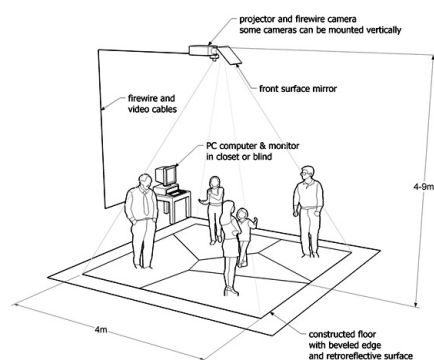
Obrázek 16: Voroneho diagramy v přírodě - křídlo vážky, poušť Atacama, tundra na Islandu, korál

7.10 Geometrické problémy

Pomocí Voroneho diagramů se řeší také velké množství geometrických problémů. Jak uspořádat kabely různého průměru do válcového objektu, problém nalezení nejkratší cesty nebo problém největšího toku.

7.11 Hranice osobního prostoru

Jak určit hranici osobního prostoru člověka pohybujícího se mezi dalšími lidmi? Prostor, který náleží pouze jemu je nečekaně opět region Voroneho diagramu, který se dynamicky mění s tím, jak se pohybuje nejen sledovaná osoba, ale i všichni lidé okolo ní. Tento model byl dokonce zrealizován v měřítku 1:1 na malé čtvercové ploše - lidé se po této ploše pohybují, jejich aktuální pozice je ze stropu snímána a přenášena do počítače. Ten zpracuje data a v závislosti na nich dynamicky generuje na zemi Voroneho diagram, jehož hranice jsou hranicemi osobního prostoru. Když se nějaká osoba pohne, pohnou se i tyto hranice a změní se tvar buněk. Pro dvě osoby bude hranicí vždycky přímka, pro více osob ve většině případů půjde o mnohoúhelníkové buňky.



Obrázek 17: Počítačový generátor Voroneho diagramu v rovině - demonstrace velikosti osobního prostoru

Reference

- [1] Světlana Tomiczková: Voroneho diagramy
- [2] Kokichi Sugihara: Voronoi Diagrams
- [3] František Ježek: Aplikace geometrického modelování (24. konference o geometrii a počítačové grafice)
- [4] Bohumír Bastl: Aplikace geometrie 2 - pomocný učební text
- [5] Craig S. Kaplan: Voronoi diagrams and ornamental design
- [6] <http://en.wikipedia.org>
- [7] <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/gina/voronoi.html>
- [8] <http://www.snibbe.com/scott/bf/index.htm>
- [9] <http://ciks.cbt.nist.gov/~garbocz/closedcell/node5.html>
- [10] <http://www-imagis.imag.fr/Membres/Marie-Paule.Cani/Lave/>
- [11] <http://www.diku.dk/hjemmesider/studerende/duff/Fortune/>
- [12] <http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/projects/voronoi/>
- [13] <http://www.cs.unc.edu/~geom/voronoi/>