Řešené úlohy z MS1 - díl první

P. Girg

23. listopadu 2012

1 Výpočet limity posloupnosti reálných čísel

Věta 1.1 (O algebře limit konvergentních posloupností.) *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou konvergentní posloupnosti reálných čísel a nechť platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Potom platí následující tvrzení.

1. *Posloupnost* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je také* konvergentní *a má limitu*
$$\lim_{n\to\infty} c_n = a + b\,.$$
2. *Posloupnost* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} - \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je také* konvergentní *a má limitu*
$$\lim_{n\to\infty} d_n = a - b\,.$$
3. *Posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je také* konvergentní *a má limitu*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \cdot b\,.$$
4. *Za dodatečného předpokladu* $\forall n \in \mathbb{N}\colon b_n \neq 0$ *a* $b \neq 0$ *je také posloupnost* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} / \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní *a má limitu*
$$\lim_{n\to\infty} y_n = a/b\,.$$

Abychom mohli předchozí větu použít, je třeba znát hodnotu některých limit.

Věta 1.2 *(Známé limity.) Nechť* α, q *a* k *jsou reálná čísla, potom posloupnosti* $\{\frac{k}{n^\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{k\cdot n^\alpha}{q^n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{k\cdot q^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou konvergentní a platí následující tvrzení*

$$\alpha > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^\alpha} = 0\,, \tag{1}$$

$$|q| > 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{k\cdot n^\alpha}{q^n} = 0\,, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k\cdot n^\alpha \cdot q^n}{n!} = 0\,. \tag{3}$$

Příklad 1.3 Vypočtěte limity

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}$,
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot n^{100}}{(11/10)^n}$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{42 \cdot 100^n}{n!}$,
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{n!}$.

Řešení.

ad 1. Limita $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}$ je známá limita z Věty 1.2 typu (1), kde $k = 3$, $\alpha = 2 > 0$. Tudíž $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0$.

ad 2. Limita $\lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot n^{100}}{(11/10)^n}$ je známá limita z Věty 1.2 typu (2), kde $k = 4$, $\alpha = 100$ a $q = 11/10 > 1$. Tudíž $\lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot n^{100}}{(11/10)^n} = 0$.

ad 3. Limita $\lim_{n\to\infty} \frac{42 \cdot 100^n}{n!}$ je známá limita z Věty 1.2 typu (3), kde $k = 42$, $\alpha = 0$ a $q = 100$. Tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{42 \cdot 100^n}{n!} = 0\,.$$

ad 4. Limita $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{n!}$ je známá limita z Věty 1.2 typu (3), kde $k = 1$, $\alpha = 1000$ a $q = 1$. Tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{n!} = 0\,.$$

Věta 1.4 *(Další známé limity.) Posloupnosti* $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{n!}{n^n}\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou konvergentní a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\,, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \doteq 2.7182818284590452354\ldots\,. \tag{6}$$

Nyní si ukážeme, jak ze známých limit z Vět 1.2 a 1.4 lze pomocí Věty 1.1 o algebře limit počítat složitější limity.

Příklad 1.5 Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11n^2+5n+3}{3n^2+7}\,.$$

Řešení. Nejprve vytkneme nejrychleji rostoucí člen z čitatele i jmenovatele.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11n^2+5n+3}{3n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{11+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{7}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{11+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{7}{n^2}} \tag{7}$$

Posloupnosti $\{\frac{5}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{3}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\frac{7}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou známého typu podle Věty 1.2 a jsou tedy konvergentní. Podle (1) platí rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0 \quad \text{a} \ \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} = 0\,.$$

Z těchto rovností dostaneme podle Věty 1.1 (o algebře limit konvergentních posloupností) tuto rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{7}{n^2}} = \frac{11+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{3+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}} = \frac{11+0+0}{3+0} = \frac{11}{3}.$$

Tudíž kombinací předchozí rovnice a (7) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11n^2+5n+3}{3n^2+7} = \frac{11}{3},$$

což jsme měli vypočítat.

$\square$

Příklad 1.6 Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+5n+3}{4^{n-1}+1}\,.$$

Řešení. Nejprve vytkneme nejrychleji rostoucí člen z čitatele i jmenovatele.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+5n+3}{4^{n-1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^{n-1}} \cdot \frac{1+\frac{5n}{4^n}+\frac{3}{4^n}}{1+\frac{1}{4^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{1+\frac{4n}{4^n}+\frac{3}{4^n}}{1+\frac{1}{4^{n-1}}} \tag{8}$$

Abychom mohli použít Větu 1.1, musíme ukázat, že posloupnosti $\{\frac{5n}{4^n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{3}{4^n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\frac{1}{4^{n-1}}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní a vypočítat jejich limity.

1. Posloupnost $\{\frac{5n}{4^n}\}_{n=1}^{\infty}$ je známého typu $(k=5, \alpha=1, q=4)$ podle Věty 1.2, je konvergentní a podle (2) je $\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{4^n}=0$.

2. Posloupnost $\{\frac{3}{4^n}\}_{n=1}^{\infty}$ je známého typu $(k=3, \alpha=0, q=4)$ podle Věty 1.2, je konvergentní a podle (2) je $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4^n}=0$.

3. Posloupnost $\{\frac{1}{4^{n-1}}\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{4}{4^n}\}_{n=1}^{\infty}$ je známého typu $(k=4, \alpha=0, q=4)$ podle Věty 1.2, je konvergentní a podle (2) je $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{4^n}=0$.

Z předchozích rovností dostaneme podle Věty 1.1 (o algebře limit konvergentních posloupností) tuto rovnost

$$\lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{1+\frac{4n}{4^n}+\frac{3}{4^n}}{1+\frac{1}{4^{n-1}}} = 4 \cdot \frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{4^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4^n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^{n-1}}} = 4 \cdot \frac{1+0+0}{1+0} = 4$$

Tudíž kombinací předchozí rovnice a (8) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+5n+3}{4^{n-1}+1} = 4,$$

což jsme měli vypočítat.

□

Příklad 1.7 Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}\,.$$

Řešení. Protože podle Věty 1.4 je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ platí předposlední rovnost v následujících úpravách (ostatní úpravy jsou základní algebraické úpravy):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n} = \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

□

Příklad 1.8 Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}.$$

Řešení. Protože podle Věty 1.2 je $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ a podle Věty 1.4 je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}\,,$$

platí podle Věty 1.1 uvedené rovnosti v následujících úpravách (kromě prvních dvou úprav, které jsou základní algebraické úpravy):

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \\
&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \\
&\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \\
&\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]\cdot\left[\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\right] = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}^2\,.
\end{aligned}$$

□

Příklad 1.9 (Řešitelný pouze „odmocninovým“ trikem!) Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Řešení. Člen $\sqrt{n+1}$ i člen $\sqrt{n}$ roste nade všechny meze. Ani jedna z posloupností $\{\sqrt{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní a *nelze* přímo použít Větu 1.1 o algebře limit. Naštěstí lze provést následující trik (zvaný odmocninový trik) založený na rovnosti $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=1\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=$$

$$\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Protože $\forall n\in\mathbb{N}\colon n+1>n$, je také $\forall n\in\mathbb{N}\colon \sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ a tedy

$$\forall n\in\mathbb{N}\colon \sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0. \tag{10}$$

Dále

$$\forall n\in\mathbb{N}\colon \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{1/2}{n^{1/2}}. \tag{11}$$

Kombinací rovností (9), (10) a (11) dostaneme

$$\forall n\in\mathbb{N}\colon 0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1/2}{n^{1/2}}. \tag{12}$$

Podle Věty 1.2, rovnost (1) ($k=1/2$ a $\alpha=1/2>0$), je

$$\lim_{n\to 0}\frac{1/2}{n^{1/2}}=0.$$

Z této limity, nerovnosti (12) a Věty o sevření (viz přednáška) dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0,$$

což jsme měli vypočítat.

$\square$

Věta 1.10 (O součinu omezené posloupnosti a posloupnosti konvergentní k nule) *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel a nechť platí*

$$\lim_{n\to\infty} b_n=0.$$

Potom posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\cdot\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je také konvergentní *a má limitu*

$$\lim_{n\to\infty} c_n=0.$$

Příklad 1.11 Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}.$$

Řešení. O posloupnosti $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ nevíme nic kromě toho, že je omezená, neboť

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon |\sin n| \leq 1\,.$$

O posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ víme, že konverguje k 0. Tudíž podle Věty 1.10 platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0\,.$$

$\square$