

Sestavení této publikace bylo finančně podpořeno projektem OPV
CZ.1.07/2.3.00/20.0139 " Budování excelentního vědeckého týmu pro
experimentální a numerické modelování v mechanice tekutin a termodynamice"



CFD v magnetohydrodynamice a průmyslové aplikace

doc. Ing. Karel Fraňa, Ph.D.

Monografie

14.03.2015

Liberec

Obsah

Úvod	1
1 Současný stav poznání účinku magnetického pole na tekutiny	8
1.1 Vlastnosti magnetického pole	8
1.2 Magnetohydrodynamika v metalurgii a v technologických procesech	8
1.3 Experimentální studie	10
1.4 Teoretická studie	13
1.5 Dosavadní poznatky z oblasti numerických výsledků	15
1.6 Materiálové vlastnosti ovlivňující magnetohydrodynamické procesy	18
2 Příklady použití magnetického pole ve slévarenství	21
3 Matematický model	24
3.1 Definice významných bezrozměrných parametrů	25
3.2 Matematický model pro uvažování nestlačitelné tekutiny	27
3.3 Popis obecného matematického modelu pro účinky magnetického pole	30
3.4 Základní rovnice a vztahy pro malé hodnoty magnetického Reynoldsova čísla	31
3.5 Zkrácený popis matematického modelu v případě rotujícího magnetické pole	33
3.6 Definice Lorentzových sil	35
3.6.1 Matematický model translačního magnetického pole	39
3.6.2 Verifikace matematického modelu TMP	42

3.7	Simulace turbulentního proudění	43
3.8	RANS modely	44
3.9	Hybridní modely typu DES	48
4	Výpočetní software	52
4.1	Historie vývoje výpočetního programu	52
4.2	Motivace k programování NS-FEM3D	54
4.3	Paralelní výpočet	55
4.4	Verifikace programu NS-FEM3D	58
4.4.1	Poiseuillovo proudění	58
4.4.2	Proudění v dutině	60
4.4.3	Rotující magnetické pole v nádobě nekonečné výšky	61
4.5	Struktura výpočetního programu NS-FEM3D	65
4.6	Post-processing - identifikace struktur	75
4.7	Start výpočetního programu	86
5	Rotující magnetické pole - laminární režim	92
5.1	Podkritická oblast magnetického Taylorova čísla - osově symetrická nádoba .	92
5.1.1	Vliv Taylorova čísla na sekundární proudění	93
5.1.2	Charakteristické vlastnosti proudění	94
5.2	Nadkritická oblast magnetického Taylorova čísla - osově symetrická nádoba .	95
5.2.1	Okamžité rychlostní pole	98
5.2.2	Časově zprůměrované rychlostní pole	101
5.2.3	Spektra	105
5.2.4	Vírové struktury	109
5.2.5	Vírové struktury a okamžité rychlostní pole	114
5.2.6	Charakteristické vlastnosti proudění	115
5.3	Osově nesymetrická nádoba	118

6	Rotující magnetické pole - turbulentní režim	119
6.1	Využití turbulentních modelů v magneticky poháněných proudech	119
6.1.1	Definice bezrozměrných veličin	120
6.1.2	Výpočetní síť	121
6.1.3	Časově středované rychlostní pole	121
6.1.4	Reynoldsovo napětí	126
6.1.5	Turbulentní kinetická energie	128
6.2	Osově nesymetrická nádoba	131
6.2.1	Rychlostní pole	131
6.2.2	Vlastnosti turbulentního proudění	136
6.2.3	Vírové struktury	140
7	Translační magnetické pole - laminární režim	141
7.1	Výsledky numerické simulace proudění vyvolaného TMP	141
8	Lineární a nelineární nestability v proudění	146
8.1	Teorie lineárních nestabilit	147
8.2	Dosavadní znalosti a publikace	150
8.3	Popis numerického testu lineárních nestabilit	151
8.4	Proudění vyvolané rotujícím magnetickým polem	153
8.4.1	Velikost nádoby $Z=1$	153
8.5	Proudění vyvolané účinkem translačního magnetického pole	157
8.5.1	Velikost nádoby $Z=1$	157
8.5.2	Velikost nádoby $Z=0.5$	161
8.5.3	Test hustoty sítě	165

9 Porovnání výsledků simulací s experimenty a teorií	166
9.1 Hrubá validace výsledků	167
9.2 Validace na základě Davidsonovy teorie	169
9.3 Validace v oblasti středu rotace proudění	171
9.4 Validace versus komerční software	173
9.5 Validace numerických výsledků s experimentem	175
Závěr	177
Použitá literatura	179
Rejstřík	186

Úvod

V posledních letech se zjevně objevuje znatelný tlak na výrobce, aby hledali nové materiály s novými vlastnostmi, které by byly levnější a přitom spolehlivější. Jedna z možností je ovšem setrvání na použití dosavadních materiálů, ovšem s využitím nových technologií výroby a zpracování. Materiál, který bude mít homogenní strukturu a konstantní materiálové vlastnosti povede ke zvýšení pevnostní jistoty výrobků a tím ke snížení materiálového nároku na konstrukci. Na druhou stranu je snahou i zefektivnit dosavadní technologické postupy a dále snížit energetickou náročnost výroby a dalšího zpracování materiálů. Snížení energetické náročnosti vede ke zvýšení konkurenceschopnosti odvětví na trhu především evropském, kde náklady za energie jsou výrazně vyšší než v jiných mimoevropských destinacích. V této monografii jsou shrnuty závěry výzkumu využití magnetického pole při metalurgických procesech s cílem zvýšit homogenitu konečného materiálu z hlediska přísad a příměsí a zjemnit vzniklou strukturu. Využití magnetického pole je rovněž slibné i při bezkontaktním pohybu roztavených kovů, kdy pomocí vhodného typu a intenzity magnetického pole je možné dosáhnout intenzivního mísení taveniny. Jeden z nejdůležitějších nástrojů výzkumu je Computational Fluid Dynamics (CFD) resp. numerické metody a simulace, které umožňují nahlédnout do přenosů tepla a hmoty aniž by bylo nutné stavět nákladné experimentální zařízení. Na území ČR je v provozu několik úspěšných zařízení, která využívají magnetické pole k promíchávání taveniny.

Obecně v problematice materiálového výzkumu, kde se magnetické pole silně uplatňuje, je použití účinku elektromagnetických procesů velmi široké. Z hlediska materiálových procesů se jedná o výzkumné aktivity spojené s přenosovými jevy a termodynamikou. Magnetohydrodynamika zahrnuje zejména proudění tekutiny jako přímý účinek magnetického pole a samotný elektromagnetismus.

Z pohledu fyzikálního účinku v rámci krystalizace materiálu a metalurgických procesů vzniká přirozená konvekce jako přímý důsledek teplotních gradientů resp. jako důsledek rozdílných teplot uvnitř nádob a na jejich površích. Tato přirozená konvekce zapříčiňuje fluktuace proudění a spolu s ní i fluktuace teploty. Praktickým důsledkem, vyskytující se fluktuace během krystalizace, je vznik nehomogenního materiálu, tj. materiálu, který obsahuje různé velikosti krystalů. V metalurgických procesech se pak mluví o nehomogenním materiálu (slitiny) v tom smyslu, že složky materiálů jsou nerovnoměrně promíchány. Tento fakt má negativní vliv na základní vlastnosti materiálu, jako např. pevnostní vlastnosti, teplotní a elektrickou vodivost atd. Snahou tedy je odstranit tuto vznikající materiálovou nehomogenitu tím, že se eliminuje samotná existence přirozeného proudění způsobující tuto nehomogenitu.

Vzhledem k tomu, že většina významných materiálů je eklekticky vodivých (kovy) nebo alespoň částečně vodivých (polovodiče), nabízí se možnost využít této vlastnosti a použít k regulaci přirozené konvekce dodatečné proudění, které je vytvořeno pomocí účinku magnetického pole. Výhodou tohoto způsobu regulace proudění je především bezkontaktní styk, což s uvážením, že většina materiálů je poměrně dosti agresivní, nabízí mnohem snadnější realizaci. Velmi stručně řečeno, působí-li magnetické pole na vodivé materiály, indukuje se proud v tomto materiálu a ten vytváří dodatečné silové účinky, které vyvolávají určitý pohyb tohoto indukovaného materiálu. Tento pohyb pak může mít různý stupeň intenzity s ohledem na intenzitu působícího magnetického pole. Je-li magnetické pole dostatečně silné, vzniká proudění, jehož síla převyšuje přirozenou konvekci a tudíž samotné proudění uvnitř nádoby je ovlivněno pouze magnetickým polem. Tímto způsobem, dle nastavení intenzity magnetického pole, je pak možné ovlivňovat proudění uvnitř nádoby. Charakter pohybu tekutiny je dán nejen typem působícího magnetického pole, ale samozřejmě také jeho intenzitou. Princip je však ve všech případech stejný, tj. pomocí magnetického pole se vyvolá dodatečné proudění, které eliminuje přirozenou konvekci a zároveň se vytvoří ještě dodatečné proudění tekutiny umožňující rovnoměrné tuhnutí a tím i zlepšení homogenity materiálu.

Použití magnetického pole v případě metalurgických procesů je relativně dlouho známé. KÜRTH (1917) [18] se jako jeden z prvních zabýval ideou využít vodivost materiálu a vyvolat dodatečný pohyb tekuté fáze k vykompenzování přirozené konvekce, přičemž použil právě rotující a alternující magnetické pole. O několik let později SHTANKO (1933) [9] předvedl první experimentální výsledky. V roce 1958 MULLIN a HULME [33] navrhli použít rotující magnetické pole také na problematiku krystalizace, přičemž jejich snahou bylo získat rovnoměrnou krystalickou strukturu polovodičů. Samotný proces je totiž velmi podobný metalurgickým procesům, při kterých rovněž dochází k ochlazování materiálu a důsledkem toho vzniká tzv. Rayleigh-Bénard konvekce, která způsobuje opět teplotní fluktuace a s tím i nerovnoměrnou krystalizaci. Takto stručně by se mohl popsat začátek experimentů s magnetickým polem a zkoumání jeho vlivu na proudění materiálu, resp. z praktického hlediska vlivu na konečnou strukturu materiálu.

Jak se však ukázalo během experimentálních pozorování, využití účinku magnetického pole má mnoho limitujících faktorů. První otázkou je samotný typ magnetického pole. První pokusy experimentovaly se statickým magnetickým polem, jehož vytvoření není zcela jednoduché a z praktického hlediska poměrně technicky a finančně nákladné. Proto se stále více pozornosti věnovalo problému rotujícího magnetického pole, jehož realizace je v porovnání k statickému magnetickému poli relativně jednoduchá. Během teoretických a experimentálních studií, na počátku prvních výzkumů tohoto magnetického pole, byl učiněn důkaz o

možnosti pozitivně ovlivnit vývoj struktury materiálu během výroby právě rotujícím magnetickým polem (experimentální studie DAHLBERG (1972) [12], ROBINSON (1973) [73] a numerické studie RICHARDSON (1974) [4] atd.). RICHARDSON se zabýval numerickou studií rotujícího magnetického pole pro případ válcové nádoby nekonečné výšky. Jeho práce ukázala limitující faktor ovlivňující praktické použití rotujícího magnetického pole. Jak bylo bezpečně prokázáno, existuje určitá hodnota magnetické indukce, resp. magnetického Taylorova čísla, kdy se proudění stává nestabilní (mluví se o nadkritickém proudění). Tyto objevující se nestability jsou Taylor-Görtlerova typu a jejich existence je omezena na oblasti v blízkosti stěn nádoby. Tato tzv. nadkritická oblast je obrovskou komplikací, neboť do proudění sice vstupuje stabilizační prvek, který omezuje přirozenou konvekci, ale zároveň i jistá destabilizace, která je tentokrát zapříčiněna samotným účinkem, resp. vedlejším účinkem magnetického pole. Později např. KAISER a BENZ (1998) [74] MÖSSNER a GERBETH (1999) [67], GRANTS a GERBETH (2001) [21] identifikovali přesné hodnoty kritického magnetického Taylorova čísla v závislosti na velikosti rozměrů nádoby. Závěry jejich studií jsou však v některých ohledech silně protichůdné.

Numerická analýza proudění v oblasti nadkritického Taylorova čísla zahrnuje velkou část prací uskutečněných za předpokladu existence osové symetrie proudění. Toto zjednodušení umožnilo použít jednoduchý 2D výpočetní software GELFGAT a PRIEDE (1999) [26] atd. Ovšem pravdou je, že nadkritické proudění charakterizované výskytem nestabilit se ukazuje jako minimálně přechodové či již turbulentní proudění, a proto je nutné považovat toto proudění za 3D proudění. Vzhledem k tomu, že hlavním zájmem je třídimensionální přechodový nebo turbulentní režim proudění ve válcové nádobě, je nutné volit způsob, jakým bude turbulentní proudění řešeno. Již dopředu se dá odhadnout, že vlivem geometrického tvaru je nutné očekávat silně zakřivené proudnice. Kromě hlavního rotujícího proudění vzniká také mnohem slabší sekundární proudění. Tyto skutečnosti omezují výběr metody simulace turbulentního proudění na několik možných způsobů. Nejlepší simulací pro takto stručně definovaný problém je DNS (Direct Numerical Simulation), která může být považována zároveň za nejpřesnější metodu. Tento způsob výpočtu je vždy z hlediska realizace náročný, neboť vyžaduje zpravidla velké nároky na výpočetní stanice.

V případě, že se bude uskutečňovat numerická analýza za výše uvedených podmínek, prvním úkolem, který je nutno splnit je vytvoření odpovídajícího výpočetního programu, který by splňoval všechny zde uvedené nároky. Tento program musí především umožňovat paralelní výpočet libovolně složité výpočetní oblasti. Musí mít dostatečnou přesnost řešení pro případ DNS (minimálně druhého řádu) a zároveň být k dispozici pro případ dalšího rozšíření. Právě vývoj takového programu, který nese označení NS-FEM3D, je první částí tohoto

předkládaného textu. Druhá část knihy je zaměřena na konkrétní numerickou studii účinku magnetického rotujícího pole a translačního magnetického pole na vodivé materiály. Hlavní pozornost je věnována oblasti nadkritického proudění, které patří z hlediska numerického řešení mezi nejsložitější typy magnetohydrodynamického proudění.

Tato práce je rozdělena do jednotlivých kapitol, ve kterých jsou popsány nejen vlastní výsledky, ale rovněž dosavadní výsledky jiných autorů. V kapitole 'Současný stav poznání' jsou shrnuty významné teoretické, experimentální a hlavně numerické publikované výsledky, které mají vzhledem k této práci zásadní význam. Tyto dosavadní publikace mimo jiné obsahují základní studie magnetického pole, která jsou startovacími body k další práci. Dodržení základních standardů ohledně vizualizace a znázornění výsledků je základním předpokladem pro pozdější vzájemné porovnání v rámci dalších studií na stejné téma. To postihuje hlavně definice základních bezrozměrných parametrů, způsoby výběru referenčních hodnot a samotné znázornění výsledků resp. normalizování výsledků. V této kapitole lze také nalézt experimentální studii konkrétního problému včetně praktické ukázky vlivu magnetického pole na konečnou strukturu materiálu, umožňující snadněji pochopit jevy, které doprovázejí magnetohydrodynamické proudění.

V kapitole 'Příklady použití magnetického pole ve slévarenství' je ukázka praktických realizací induktorů v pecích. Realizace uskutečnila společnost Stinchcombe Technology.

V kapitole 'Matematický model' je možné nalézt teoretické pojednání k problematice výběru vhodného matematického modelu s ohledem na proudění tekutiny vyvolané účinkem nízkofrekvenčního rotujícího magnetického pole. V podstatě tato kapitola shrnuje základní definice rotujícího magnetického pole, zabývá se otázkou výběru vhodného matematického modelu a přináší jeho detailní popis. Kromě samotného popisu lze také nalézt základní popis metody výpočtu s ohledem na výběr matematického modelu.

Kapitola 'Výpočetní software' obsahuje základní informace o vlastnostech a schopnostech vytvořeného výpočetního programu na bázi FEM (Finite Element Method). Kromě popisu lze v této kapitole také nalézt jednotlivé případy verifikace programu. Na jednoduchých úlohách je demonstrováno, že navržený program je schopen dosáhnout stabilního výpočtu pro specifický matematický problém s přesností druhého řádu. Tento fakt je demonstrován na jednoduchém stacionárním i nestacionárním případě proudění v kanálu a stacionárním případě laminárního proudění ve válcové nádobě nekonečných rozměrů. Rovněž tak je věnována pozornost paralelní aplikaci programu doplněné vhodným testovacím příkladem, na kterém je demonstrována účinnost paralelního výpočtu.

Nejdůležitější částí monografie je pak prezentace konkrétních numerických výsledků pro

případy rotujícího a translačního magnetického pole. V kapitole 'Rotující magnetické pole - laminární režim' jsou shrnuty výsledky simulace proudění v oblasti laminárního režimu proudění, které je generováno rotujícím magnetickým polem pro osově symetrické a nesymetrické nádoby. Obzvláště numerické výsledky pro osově nesymetrické nádoby jsou relativně nové a nebyly obecně doposud významně publikovány. V kapitole 'Rotující magnetické pole - turbulentní režim' jsou prezentovány výsledky CFD v případě použití RANS modelů a hybridních modelů turbulence. Předložená monografie obsahuje rovněž kapitolu 'Translační magnetické pole - laminární režim' zahrnující výsledky proudění generované translačním magnetickým polem. V kapitole 'Lineární a nelineární nestability proudění' jsou popsány výsledky studie nestabilit v oblasti přechodového režimu proudění generované rotujícím magnetickým polem. Především z důvodů validace výsledků a verifikace výpočetního programu NS-FEM3D jsou v této kapitole prezentovány výsledky z oblasti laminárního lineárního a nelineárního režimu proudění. Nejvýznamnější výsledky numerické analýzy jsou uskutečněny pro případy přechodového a turbulentního proudění. K realizaci těchto výsledků je nutné poznamenat, že jejich výpočet se uskutečňuje na výpočetních stanicích, které disponují 128 resp. 64 CPUs. Každý řešený případ definovaný různou hodnotou magnetického Taylorova čísla představuje náročný výpočet jak z hlediska kapacity výpočetní stanice, tak i času potřebného k realizování výpočtu. Běžně je použito k řešení 32 procesorů. Každý výpočet v oblasti přechodového a turbulentního proudění zároveň vyžaduje řešit dostatečně dlouhou dobu, než je možné dosáhnout vyvinutého stavu proudění a zároveň shromáždit dostatečné množství dat pro statistickou analýzu. Velmi hrubě řečeno, dostatečné množství dat je shromážděno asi po 4 měsících výpočtu. Jak lze tedy dovodit, není možné řešit velké množství úloh, nýbrž je nutné se zaměřit na několik typických případů. Numerická analýza se tedy orientuje hlavně na detailní pohled magneticky indukovaného proudění, identifikaci destabilizace prostřednictvím lokálních nestabilit proudění a statistickou analýzu.

Kapitola 'Porovnání výsledků simulací s experimenty a teorií' zahrnuje prezentaci všech dostupných možností validace výsledků popisujících magnetohydrodynamické proudění. Pro oblast laminárního proudění je srovnání uskutečněno na základě teoretických poznatků (DAVIDSON), numerické simulace jsou též ověřené experimentem (GELFGAT a PRIEDE). Numerické výsledky v oblasti přechodového a turbulentního proudění jsou porovnány s teoretickými výsledky (DAVIDSON), numerickými výsledky potvrzenými experimentem (GELFGAT a PRIEDE), a dále s vlastním výpočtem turbulentního proudění pomocí RANS modelu. V neposlední řadě jsou numerické výsledky také přímo porovnány s experimentem (CRAMER). Tato validace by měla podpořit správnost výsledků získaných pomocí numerické analýzy.

Na začátku tohoto úvodu bylo zmíněno, že v samotném využití se objevuje vliv teploty na

indukované proudění. Dále bylo poznamenáno, že dodatečné síly vznikající magnetickým polem eliminují přirozenou konvekci a vytvářejí dodatečné proudění. Toto proudění je pak závislé pouze na magnetickém poli. Vezme-li se v úvahu, že stěny nádoby budou tepelně izolovány a účinek dodatečného magneticky indukovaného proudění bude natolik intenzivní, že jeho vliv je dominantní a vliv přirozené konvekce zanedbatelný (odpovídá vyšším hodnotám magnetické indukce), pak celý problém lze redukovat na jednodušší případ isotermního proudění. Dále je nutné uvážit, že tekutinou z praktického hlediska je vždy roztavený kov či polovodič, takže každopádně nestlačitelná tekutina. Tato fakta a zjednodušení ovlivní výběr vhodného matematického modelu. Numerická studie se nadále bude orientovat pouze na problematiku proudění resp. pouze na proudění vyvolané přímým účinkem rotujícího magnetického pole s nízkou frekvencí rotace a eventuálně na vedlejší vlivy tohoto proudění jako například vznik sekundárního proudění.

Předložená monografie shrnuje významné výsledky CFD v oblasti magnetohydrodynamiky, ale rovněž i představuje robustní výpočetní program NS-FEM3D. Tento program byl úspěšně použit nejen v simulaci proudění, ale i ve výuce. Vývoj dalších výpočetních modulů rozšiřujících užítkovost výpočetního programu NS-FEM3D pokračuje dodnes.

Kapitola 1

Současný stav poznání účinku magnetického pole na tekutiny

1.1 Vlastnosti magnetického pole

Na začátku je nejprve nutné uvést několik důležitých informací ohledně tvarů a rozměrů zkoumaného modelu a některých základních poznatků týkajících se účinku magnetického pole. Důsledkem působení magnetického pole na elektricky vodivé materiály je vznik externích sil dle Ohmova zákona, které narušují rovnováhu tekutiny. K dosažení dodatečné rovnováhy vzniká uvnitř tekutiny proudění. Síly, které vzniknou účinkem magnetického pole, jsou nazývány Lorentzovými silami. Ty jsou časově proměnné, ale v určitých případech je možné je uvažovat jako časově nezávislé. Tyto síly pak vstupují do Navier-Stokesových rovnic. Pro jednoduchost dalších odvození a zkoumání je výzkum v této oblasti silně omezen na jednoduché tvary (válec, krychle), v rámci kterých je možné odvodit analytické vztahy a rovněž je jednodušší uskutečnit porovnávací experimentální měření určujících veličin. S ohledem na složitost problematiky je ale stále velká pozornost výzkumu soustředěna na numerické simulace.

1.2 Magnetohydrodynamika v metalurgii a v technologických procesech

Na rozdíl od neúspěchu v oblasti vývoje nových pohonů ponorek je praktické využití magnetického pole v oblasti materiálového inženýrství mnohem úspěšnější. Podnět k hledání

nových technologických procesů v metalurgii byl vyvolán dvěma požadavky. Prvním z nich byl požadavek snížit energetickou náročnost technologických procesů, která se objevila v souvislosti s energetickou krizí v 70. letech. Dalším podnětem byl stále rostoucí požadavek na kvalitu materiálu z hlediska čistoty a materiálové homogenity především v oblasti leteckého průmyslu.

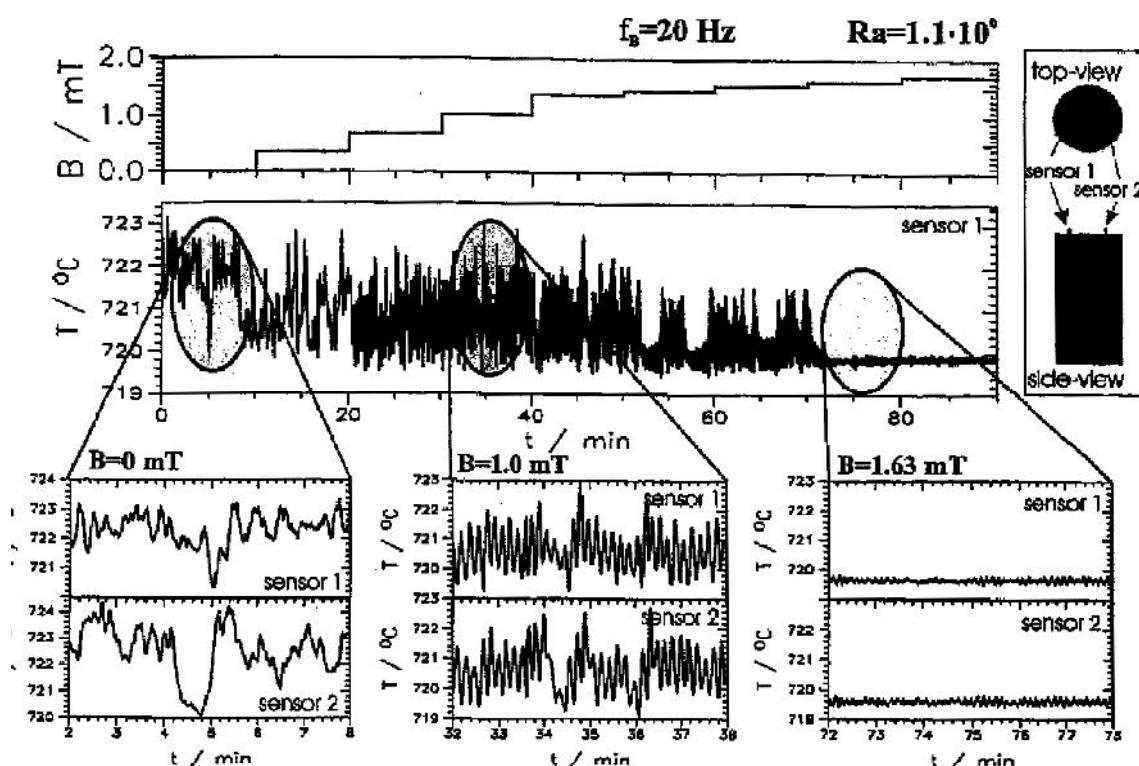
Jak ukázaly první studie, nejdůležitějším pohybem roztaveného kovu během jeho zpracování je jeho rotační pohyb, který byl poprvé studován v literatuře MOFFATT [20]. Otázkou tak bylo, jak tento pohyb vyvolat. Zkoušely se různé možnosti jako např. rotační pohyb nádob či pouze částí nádob, kdy pohyb těchto stěn se přenáší také na tekutinu. Z hlediska efektivnosti nebyla tato varianta příliš úspěšná, a proto se zájem upínal stále více na fakt, že většina kovů je současně velmi dobrými elektrickými vodiči, a tak se nabízela možnost využít této materiálové vlastnosti. Schopnost uvést tyto taveniny do pohybu pomocí magnetického pole bez nutnosti přímého kontaktu s tekutinou nabízí obrovské možnosti. Rotující a translační magnetická pole našla uplatnění především v metalurgii v oblasti kontinuálního slévárnictví a výroby oceli a rovněž v oblasti výroby monokrystalů. Translační magnetické pole se často používá k transportu taveniny. Poněvadž se jedná o bezkontaktní metodu, nedochází k přímému kontaktu taveniny s jinými mechanickými částmi, což umožňuje zvýšit čistotu materiálu snížením oxidů v tavenině. Navíc vzniklý pohyb tekutiny je zpravidla pravidelný a bez vibrací, což se odrazí ve zpřesnění např. dávkování nebo odměřování taveniny pro odlévání. Další uplatnění je v oblasti kontinuálního odlévání oceli, kdy translační magnetické pole vyvolává pohyb odlévané oceli, což vede k zamezení nerovnoměrného tuhnutí SPITZER [47]. Promíchávání tekutého kovu je další alternativa použití magnetického pole. Během tuhnutí mají totiž slitinové materiály tendenci separovat se od dalších materiálů způsobujících nehomogenitu ingotu a následkem toho se objevuje porozita v materiálu, která je formovaná obsahem bublinek plynu (např. CO v oceli). Tuto porozitu lze redukovat či úplně odstranit pomocí vhodného pohybu tekutin vyvolaného magnetickým polem BIRAT [25] a TAKEUCHI [13]. Tekutinu lze uvést do pohybu také například pomocí inertního plynu argonu, což patří mezi časté technické realizace. Promíchávání tekutiny prostřednictvím rotujícího magnetického pole je však mnohem účinnější (rychlejší) a přispívá k lepší homogenizaci rozložení teplotního pole. Více informací lze nalézt v literatuře ROPLEKAR [34]. V oblasti krystalizace materiálu byl zaznamenán úspěch rovněž použitím rotujícího magnetického pole. Rotační pohyb tekutiny v Bridgmanově procesu umožnil redukovat rýhování ve slitině germania a galia, které vzniká v důsledku fluktuace proudění vyvolaného přirozenou konvekcí DOLD a BENZ [57]. Dosavadní výklad využití magnetického pole byl omezen na nejčastější případ generování dodatečného proudění pomocí magnetického pole.

Ovšem existuje ještě jedna významná oblast aplikace magnetického pole a to je možnost tlumení proudění působením magnetického pole. V zahraniční literatuře je tato metoda známá pod pojmem 'Magnetic Damping'. Jak napovídá název, hlavním cílem je úplné utlumení pohybu tekutiny vznikající např. v důsledku teplotního nebo tlakového gradientu. Nejčastější využití je při aplikaci Bridgmanovy techniky, která je spojená s výrobou polovodičových materiálů a zlepšením jejich vlastností, což představuje významný přínos především v elektrotechnice. Více k tomuto tématu lze nalézt např. v publikaci MÜLLER [15]. V případě zájmu o širší použití magnetického pole také např. pro problematiku generování pohybu při technologickém zpracování čistého hliníku a možnosti výrazného snížení energetické náročnosti tohoto procesu lze odkázat na knihu DAVIDSON [60].

1.3 Experimentální studie

Velmi důležitá část výzkumu v oblasti účinku magnetického pole je zastoupena experimentální studií. Nutno však na úvod poznamenat, že experimenty v rámci problematiky krystalizace versus magnetické pole jsou relativně velmi technicky náročné. Většina materiálů, na kterých jsou experimenty uskutečněny, jsou velmi agresivní vůči měřicím sondám. Celý fakt je komplikovaný také tím, že se jedná o roztavené kovy, kde velkou roli hraje při měření také teplota. Další problematickou stránkou je vytvoření příslušného magnetického pole z hlediska investic do zařízení a také energetické náročnosti. Tyto všechny aspekty komplikují experimentální část studie a tudíž v současné době neexistuje dostatečné množství experimentálních výsledků pro případy validace. Některé významnější výsledky, pocházející z experimentů, jsou blíže popsány v následujících částech kapitoly.

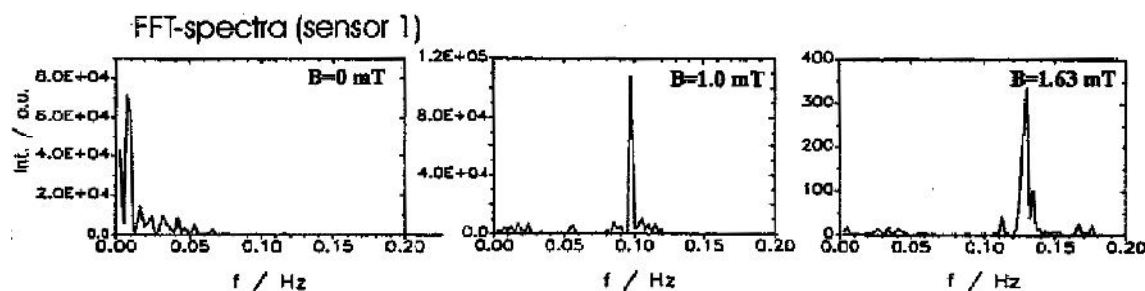
Mezi již dnes starší výsledky patří experimenty RICHARDSONA [4], který se věnoval experimentální studii rotujícího magnetického pole. Kromě publikace konkrétních hodnot hlavního rotujícího proudění identifikoval také sekundární proudění. Tyto výsledky byly jako jedny z prvních tehdy publikovaných experimentálních výsledků. VIVES [7] publikoval celou řadu uskutečněných experimentů, zabývajících se tuhnutím hliníkových slitin a současným působením rotujícího magnetického pole. V jeho publikaci je možné nalézt průběh rotujícího azimutálního a rovněž tangenciálního rychlostního pole. Oproti zde publikovaným numerickým výsledkům, které předpokládají uzavřenou výpočetní oblast definovanou pevnou stěnou, VIVES předpokládal otevřenou válcovou nádobu. Tato variace problému má výrazný vliv především na sekundární proudění. VIVES také publikoval vliv magnetického pole na vzniklé struktury, resp. evidentně je ukázáno, že struktury, která vznikají během působení



Obrázek 1.1: Časový průběh teploty znázorňující účinek rotujícího magnetického pole na experimentální studii krystalizace gallia legovaného Germaniem. (Experimenty DOLD a BENZ)

magnetického pole, jsou homogenní.

DOLD a BENZ [57] se soustředili na účinek rotujícího magnetického pole v případě roztaženého kovu gallia legovaného germaniem. V roce 1993 HURLE [11] popsal, že v důsledku přirozené konvekce vzniká jako výsledek rozdílných teplot na dně a víku nádoby fluktuace teploty a rychlosti. Tento závěr ukázal na fakt, že přirozená konvekce je vlastně přímo zodpovědná za negativně se vyvíjející krystalizaci materiálu. Snahou je tedy redukovat přirozenou konvekci účinkem uměle vyvolaného pohybu např. právě pomocí magnetického pole. DOLD a BENZ prezentovali výsledky teplotního vývoje za předpokladu působení různých hodnot magnetické indukce (obrázek 1.1 a 1.2). Na obrázku 1.1 je možné pozorovat časový průběh teploty. Je-li hodnota magnetické indukce rovna nule, pak model není vystaven účinku magnetického rotujícího pole a reálnou oscilaci teploty je možné pozorovat na obrázku 1.1. Teplotní fluktuace vykazuje neperiodický charakter a její maximální amplituda je přibližně 3°C . Na obrázku 1.2 (vlevo) je zobrazeno teplotní spektrum, na kterém je možné si povšimnout dominantní frekvence zhruba kolem hodnot 0.01 Hz .

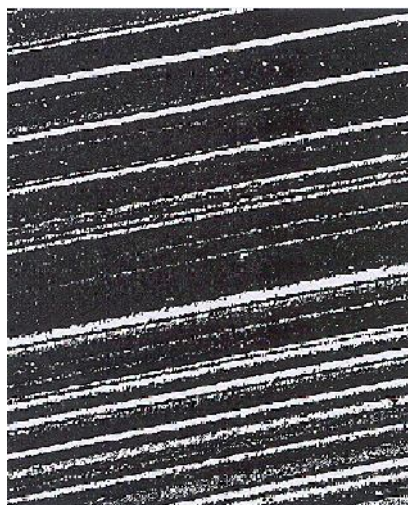
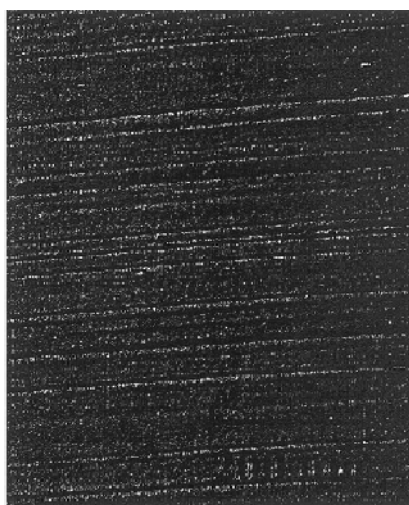


Obrázek 1.2: Spektrum teploty pro tentýž případ experimentů znázorněných na obrázku 1.1.

V případě, že magnetická indukce dosáhne hodnoty $B = 1\text{ mT}$, začne se projevovat vliv magnetické pole. Intenzita účinku magnetického rotujícího pole je zhruba ve stejné velikosti jako je účinek přirozené konvekce. Jak je opět patrné z obrázku 1.1 a 1.2, maximální amplituda teplotní fluktuace dosahuje opět zhruba 3°C , ovšem výrazně se posouvá dominantní frekvence směrem k vyšším hodnotám frekvencí. A konečně, jestliže hodnota magnetické indukce se ještě zvýší až na hodnotu $B = 1.63\text{ mT}$, pak je možné zřetelně pozorovat výrazné zklidnění fluktuace teploty, kdy maximální hodnota amplitudy je přibližně 0.2°C (1.1 vpravo) a hodnota dominantní frekvence se posune na hodnotu 0.125 Hz . Tento případ odpovídá stavu, kdy velikost účinku pohybu tekutiny v důsledku magnetického pole je dominantní a přirozená konvekce již nehraje žádnou roli. Tím se dosáhne úplného řízení prouděním tekutiny v nádobě.

Na obrázku 1.3 je možné pozorovat výslednou strukturu pro případ krystalizace bez účinku magnetického pole (vlevo) a s působením definovaného magnetického pole (vpravo). Z obou obrázků je možné detailně vidět, že tzv. žlábkování (světlé označení) představuje legující materiál (germanium) a tmavý materiál gallium. Jestliže působí magnetické pole během krystalizace, pak je zřetelně vidět, že žlábkování je mnohem méně intenzivní resp. přechod mezi jednotlivými složkami materiálu není tak markantní a tím i vzniklou strukturu je možné charakterizovat jako více homogenní. DOLD a BENZ [57] demonstrovali vliv magnetického pole na samotný průběh teplot a eventuální vliv na vznikající strukturu materiálu.

Jak bylo prakticky ukázáno, pomocí účinku magnetického rotujícího pole je možné získat kontrolu nad přirozenou konvekcí, která vyvolává silné oscilace teploty a proudění. Právě již zmíněná oscilace teploty a proudění je příčinou způsobující nehomogenní materiál. Je-li hodnota magnetické indukce dostatečně velká, pak vliv přirozené konvekce je potlačen. Jak by se mohlo zdát, stačí zvýšit účinek magnetického pole a tím je možné odstranit libovolnou nežádoucí přirozenou konvekci.

 $B = 0\text{mT}$  $B = 2\text{mT}, f = 50\text{Hz}$

Obrázek 1.3: Ukázka konečné krystalické struktury. Vlevo struktura vznikající bez vlivu magnetického pole. Vpravo pak konečná krystalická struktura v případě působení rotujícího magnetického pole.

Z praktického hlediska je však problém mnohem komplikovanější. V mnoha případech při intenzivním působení magnetického pole se dostavuje destabilizační jev, který je v takovémto případě vyvolán samotným magnetickým polem. Přirozená konvekce je sice potlačena, ovšem dodatečné nestability, které se začnou objevovat v proudění, jsou mnohem intenzivnější, než je samotná destabilizace vlivem přirozené konvekce. Tento závěr je tak limitujícím faktorem praktického využití pozitivního účinku magnetického pole při krystalizaci. V dalších kapitolách bude postupně popsán vznik nestabilit jako vedlejší produkt stabilizace magnetickým polem.

1.4 Teoretická studie

Mnohé uznávané poznatky o problému účinku magnetického pole na vodivé materiály vycházejí z teoretických studií. Velmi známé jsou např. práce MOFFATTA (válcová nádoba nekonečné délky) nebo např. práce DAVIDSONA.

MOFFATT [19] se zabýval otázkou účinku magnetického pole na válcovou nádobu nekonečné výšky nádoby. Jeho teoretická práce byla zaměřena především na laminární oblast proudění. Moffatt předpokládal, že je-li magneticky vyvolané proudění výrazně pomalejší než je samotná rychlost rotace magnetického pole ωL , kde L je charakteristické délkové měřítko

(většinou poloměr válcové nádoby), pak rychlostní pole neovlivňuje rotující magnetické pole. Velmi jednoduše vyjádřeno, existuje pouze účinek magnetického pole na vodivé tekutiny, zatímco zpětný vliv je zanedbatelný. Na základě tohoto zjednodušení MOFFATT teoreticky odvodil rozložení magnetického pole ve válcové nádobě. Za již zmíněných předpokladů lze definovat také analytický vztah popisující rozložení hlavní azimutální rychlosti, přičemž tento rychlostní profil je závislý pouze na poloměru nádoby. MOFFATT také analyticky odvodil velikost rotace jádra proudu v závislosti na charakteristických vlastnostech magnetického pole. V rámci laminárního režimu je znám analytický průběh rychlostního pole. Velmi podobným směrem pokračoval taky DAHLBERG [12].

Další významnou částí teoretické studie magnetického pole je práce DAVIDSONA [61] a [59]. Ten se věnoval otázce účinku magnetického pole na proudění v uzavřené válcové nádobě. V důsledku uzavřené nádoby resp. důsledku konečných rozměrů a existence koncových stěn válcové nádoby vzniká nejen hlavní rotační proudění, ale také proudění sekundární. Toto sekundární proudění MOFFATT nemohl identifikovat, neboť je to důsledek existence pevných koncových stěn nádoby. Mimo jiné, DAVIDSON definoval vzniklé proudění jako dvě oblasti proudu s odlišnými vlastnostmi. V blízkosti osy rotace je rychlost velmi malá a tato oblast je dostatečně vzdálená od pevné stěny nádoby, takže účinky viskózních sil jsou zanedbatelné. Pro tuto oblast je možné definovat analytický vztah určující tzv. frekvenci rotace resp. rotační rychlost jádra Ω (více je možné nalézt v kapitole numerické výsledky, kde je uskutečněno porovnání těchto výsledků s numerickými výsledky). Kromě toho se tato neviskózní oblast vyznačuje faktem, že proudění je do jisté míry určeno pouze poloměrem nádoby a není závislé na vertikální velikosti (vztažené k výšce nádoby). Druhou oblastí je oblast v blízkosti pevné stěny nádoby, kde viskózní síly hrají významnou roli. DAVIDSON také odvodil velmi důležitou teorii pro vývoj azimutálního rychlostního pole. Z hlediska dvou režimů proudění (laminárního a turbulentního) je možné definovat závislost azimutální rychlosti na velikosti magnetického Taylorova čísla. Je-li proudění v oblasti laminárního proudění (malé hodnoty Reynoldsových čísel), pak vývoj azimutální rychlosti je v lineární závislosti na magnetickém Taylorově číslu. Bude-li naopak proudění již turbulentní, bude azimutální rychlost závislá na $2/3$ velikosti magnetického Taylorova čísla. Tyto závěry budou později v kapitole 9 ještě jednou zmíněny a použity pro případ validace výsledků.

Kromě teoretické studie MOFFATTA a také DAVIDSONA je nutné ještě zmínit práci autorů GORBACHEV, NIKITIN a USTINOV [52]. Tyto publikované výsledky zahrnovaly jak experimentální tak i teoretickou studii pohybu tekutiny jako důsledek účinku magnetického pole. Velmi důležitým přínosem bylo odvození analytického vztahu pro rozložení silového účinku rotujícího magnetického pole. Tak bylo možné určit přímo vliv magnetického pole na tekutinu

prostřednictvím analytického vztahu a tím se také vyhnout eventuálnímu náročnějšímu výpočtu indukovaného elektrického proudu, který je za jistých okolností nezbytný pro definici Lorentzových sil.

Tím byly velmi stručně zmíněny významné teoretické práce, které zásadně ovlivnily vývoj v oblasti magnetohydrodynamiky a zároveň jsou v této práci mnohokrát použity. Například teoretické poznatky MOFFATTA, ohledně rozložení rychlostního pole v laminárním Stokesovém režimu proudění, jsou použity přímo pro verifikaci výpočetního softwaru. Závěry DAVIDSONA, týkající se rychlostního pole v závislosti na hodnotě magnetického Taylorova čísla a rovněž proudění v jádře rotujícího proudu, jsou použity při validaci numerických výsledků. Pravděpodobně nejdůležitější přínos představuje práce GORBATCHEVA, jehož definice analytického rozložení silového účinku magnetického rotujícího pole se využila také zde při konkrétní aplikaci.

1.5 Dosavadní poznatky z oblasti numerických výsledků

Do doby vzniku této práce bylo publikováno několik významných numerických studií, ze kterých vyplynuly některé velmi zajímavé závěry, přičemž některé z nich byly také ověřeny experimentem. Z tohoto důvodu je učiněn v této kapitole stručný přehled o dosavadních poznatcích, které vyplynuly na základě numerických studií. Na okraj je nutné poznamenat, že rotující magnetické pole je jedno z několika možných magnetických polí, která mají pozitivní vliv na krystalizaci materiálu a na pochody v metalurgii. V odborných publikacích je možné nalézt také jiné práce, které se zabývají například statickým magnetickým polem a jeho účinkem na krystalizaci materiálu. Vzhledem k tomu, že tato práce se zaměřuje především na rotující magnetické pole s nízkou úhlovou frekvencí rotace, jsou zde zmíněny především dosud publikované studie spojené s výzkumem účinku rotujícího magnetického pole.

Dosavadní numerické studie lze rozdělit na dvě základní skupiny. První skupinou jsou výsledky na základě teorie osové symetrie proudění. Autoři těchto publikací předpokládali, že magneticky indukované proudění lze řešit v podstatě jako 2D problém, kdy existence nesymetrického proudění v azimutálním směru proudu nehraje významnější roli a může být zanedbána. Tak či onak, toto zjednodušení je vždy platné v případě laminárního proudění. V oblasti přechodového nebo dokonce turbulentního proudění už tomu tak pravděpodobně být nemusí. Druhá kategorie výsledků jsou případy řešeného 3D proudění, kterých ovšem existuje příliš málo. Z tohoto důvodu je práce zaměřena především na 3D charakter proudění a jeho podrobnější studii.

Typické studie daného problému jako 2D proudění představuje práce GELFGAT a PRIEDE [26], kteří numericky řešili problém magnetohydrodynamického proudění ve válcové nádobě konečné délky. Ve své publikaci popsali několik základních režimů proudění, které byly identifikovány na základě chování hlavního rotujícího proudu a vztahu k sekundárnímu proudění. Prvním režimem je laminární režim, který se vyskytuje pro případy $Ta < 10^3$. Základním charakteristikou laminárního proudění je tzv. symetrie proudění a to jak primárního rotujícího proudění, tak i sekundárního proudění. Tato symetrie respektuje geometrii válcové nádoby. Proudění je ovlivněno především viskózními efekty na bočních stěnách nádoby, zatímco koncové stěny nehrají téměř žádnou roli. Jestliže magnetické Taylorovo číslo překročí hranici $Ta > 10^3$, pak se proudění dostává do tzv. nelineárního laminárního režimu proudění. Na koncových stěnách se formuje Bödewadtova mezní vrstva. Konvektivní člen Navier-Stokesovy rovnice se začíná vyrovnávat difuznímu členu a začíná hrát významnější roli. Dále dochází k větší interakci mezi primárním rotačním prouděním v azimutálním směru a mezi sekundárním prouděním ve vertikálním směru. V případě konkrétní velikosti nádoby, magnetického pole a materiálu tekutiny lze definovat určitou kritickou hodnotu magnetického Taylorova čísla, při kterém se v proudění začnou objevovat tzv. Taylor-Görtlerovy nestability, na které již poukazoval MOFFATT [19]. GELFGAT a PRIEDE identifikovali tyto nestability a zároveň je považovali za příčinu oscilací v proudění. Jejich uskutečněná studie identifikovala nestability podél obvodových stěn válcové nádoby, přičemž tato charakteristika odpovídá rovněž experimentálnímu pozorování těchto nestabilit.

Velmi podobným směrem se uchýlila práce MARTY a MARTIN WITKOWSKI [62], [49] a [48]. V publikaci [62] jsou prezentovány velmi podobné závěry jako u skupiny GELFGAT a PRIEDE. Opět je identifikována oblast lineárního laminárního režimu a tzv. nelineárního režimu s charakteristickými jevy v hlavním rotačním proudění a sekundárním proudu. Vizuálně je prezentována existence nestabilit Taylor-Götlerova typu v blízkosti obvodových stěn modelu. Význam této práce také spočívá ve faktu, že problém je řešen jako neizotermní proudění a tudíž je možné sledovat vztah mezi teplotní fluktuací a fluktuací proudění. Jak bylo detailně ukázáno v kapitole experimentů, existuje zřetelně teplotní fluktuace s negativními projevy. MARTY a MARTIN WITKOWSKI poukázali také na existenci oscilace proudění v radiálním směru pohybu tekutiny. Kromě toho také bylo poukázáno na spojitost mezi účinkem magnetického pole a oscilací teplotního pole resp. na tlumící efekt magnetického pole. Kromě těchto praktických závěrů také učinili srovnání numerických výsledků s výsledky DAVIDSONA. V oblasti laminárního režimu existuje lineární charakter proudění ve vazbě na magnetické Taylorovo číslo. V oblasti turbulentního proudění existuje známý $2/3$ zákon. Tyto závěry vycházejí z Davidsonovy teoretické studie [59]. MARTY a MARTIN WITKOWSKI definovali závislost rychlostního pole v závislosti na magnetickém Taylorovu čísle v oblasti tzv. nelineárního režimu

proudění. Chování rychlostního pole v závislosti na magnetickém Taylorově čísle reprezentuje oblast mezi lineárním laminárním režimem a $2/3$ zákonem v oblasti turbulentního proudění.

Na okraj je také nutné věnovat několik poznámek k práci BARZE [69]. V jeho studii je možné nalézt porovnání rychlostního pole s experimenty. Předpokládá se isothermní proudění a řešený problém je považován za typické 2D proudění. Numerická analýza zohledňuje dvě varianty: proudění v uzavřené nádobě definované pouze pevnými stěnami a případem, kdy je víko nádoby otevřeno a je definováno prostřednictvím 'free surface' podmínky. Také KAISER a BENZ [74] předpokládali osově symetrické proudění. V závislosti na geometrii numericky identifikovali kritické Reynoldsovo číslo (resp. Taylorovo číslo) a dále znázornili poměr sekundárního proudění ve vztahu k primárnímu proudění jako funkci Reynoldsova čísla. Tato závislost je ovlivněna výrazně velikostí rozměrů studované oblasti a Taylorova resp. Reynoldsova čísla. Také zde byla prezentována typická fluktuace teploty. Podobné vyjádření vztahu intenzity hlavního rotujícího proudění a sekundárního pohybu tekutiny je použito později k vyhodnocení výsledků z vlastní numerické analýzy.

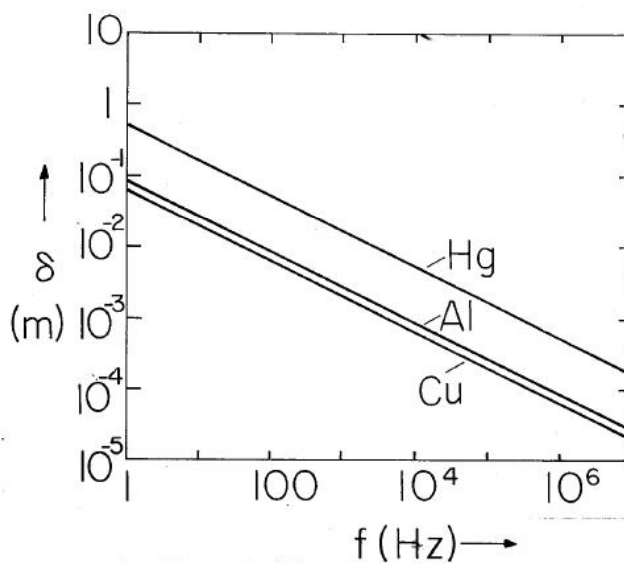
Charakter proudění je dán hodnotou magnetického Taylorova čísla. Překročí-li tato hodnota tzv. kritickou hodnotu, objeví se v proudění oscilace a na obvodových stěnách je možné pozorovat nestability Taylor-Görtlerova typu. Určení této hodnoty je možné učinit numericky na základě velkého počtu výpočtů a nebo přesněji pomocí teorie lineární stability. MÖSSNER a GERBETH [67] určili tuto kritickou hodnotu v závislosti na velikosti nádoby pro případ rotujícího magnetického pole. Autoři zde také diskutují o rozdílných hodnotách kritického Taylorova čísla v dosavadních publikacích. Tato studie byla uskutečněna opět za předpokladu osově symetrického proudění. V publikaci je uvedeno detailní znázornění rychlostního pole pro různé režimy proudění. Kromě identifikace kritické hodnoty magnetického Taylorova čísla je velká pozornost také věnována výpočetní síti. MÖSSNER a GERBETH [67] doporučují, aby hustota sítě byla minimálně odpovídající hodnotě $R/50$, kde R představuje poloměr modelu. Toto je praktické doporučení plynoucí z numerické studie. Není-li totiž výpočetní síť dostatečně jemná, není také možné nestability v oblasti nadkritického proudění identifikovat. Později GRANTS a GERBETH [21] formulovali mnohem přesnější hodnotu kritického Taylorova čísla na základě teorie lineární stability. I nadále se věnují výskytu oscilace v hlavním rotačním proudění a v sekundárním proudění. Velmi důležitý závěr byl učiněn z pohledu Taylor-Görtlerových nestabilit. V oblasti kritického přechodu proudění pravděpodobně oscilace nesouvisí s Taylor-Görtlerovými nestabilitami (jak bylo dříve publikováno), nýbrž s tím, že existuje několik dodatečných tzv. nestabilních stavů v lineárně stabilních režimech proudění. Publikace GRANTS a GERBETH [22] se věnuje otázce vzniku 3D nestabilit. Numerická stu-

die zahrnuje identifikaci kritické hodnoty Taylorova čísla pro určitou geometrii s ohledem na výskyt nestabilit v hlavním rotačním proudění.

Určení kritické hodnoty pro případ velikosti nádoby $H/D = 1.5$ je důležitý startovací bod pro zde předkládanou práci. Na základě privátní komunikace s Dr.Gerbethem odpovídá hodnota kritického magnetického Taylorova čísla v případě $H/D = 1.5$ hodnotě $4.25 \cdot 10^4$. Je-li proudění tudíž definováno větší hodnotou magnetického Taylorova čísla, pak se vždy může jednat o proudění nestacionární s výskytem nestabilit Taylor-Görtlerova typu. Teoretické pojednání ohledně vzniku nestabilit různých druhů lze nalézt v literatuře SARIC [79].

1.6 Materiálové vlastnosti ovlivňující magnetohydrodynamické procesy

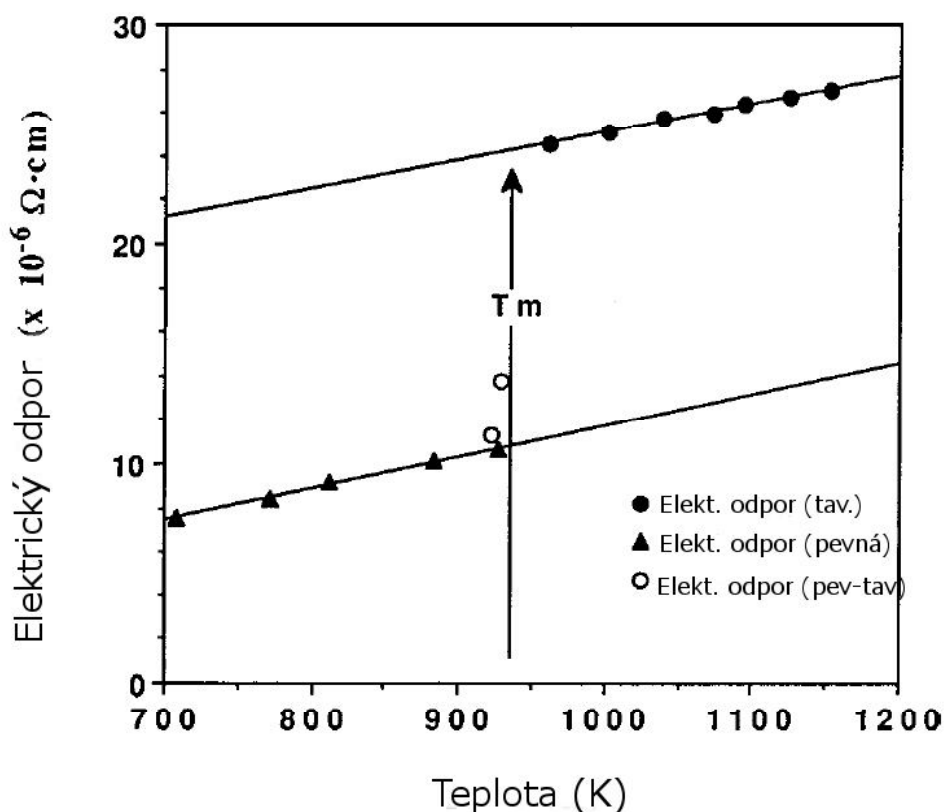
V praxi se často technická zařízení navrhují na materiály v čistém stavu tj. s čistotou 99,99 % a více. Takovéto materiály mají většinou velmi vhodné materiálové vlastnosti s ohledem na využití magnetického pole.



Obrázek 1.4: Skin efekt (schopnost penetrace) magnetického pole do materiálu.

Z hlediska výpočtu jsou pro stanovení účinku magnetických sil tzv. elektrická vodivost (nebo převrácená hodnota elektrický odpor) a skin efekt. Skin efekt je důležitý z hlediska zajištění dostatečného průchodu magnetického pole do materiálu. Elektrická vodivost pak

bude rozhodovat o velikosti generovaných Lorentzových sil tj. sil, které budou vyvolávat chtěný účinek pohybu tekutiny. Obecně platí, že čím lepší bude elektrická vodivost, tím intenzivnější budou generované síly a tím silnější bude účinek magnetického pole. Dále bude platit, že čím větší bude hodnota penetrace magnetického pole do materiálu, tím intenzivnější bude vliv magnetického pole na tekutinu resp. tím větší objem taveniny bude pod vlivem magnetického pole.



Obrázek 1.5: Elektrický odpor v závislosti na fázové změně a teplotě u čistého hliníku.

Obrázek (1.4) popisuje vliv frekvence magnetického pole a materiálu na schopnosti magnetického pole penetrovat do materiálu. Tato schopnost je vyjádřena pomocí délkového měřítka v metrech. Obecně platí jak pro hliník nebo měď, že čím větší bude frekvence magnetického pole, tím horší bude průchod magnetického pole materiálem. Obrázek (1.5) ukazuje hodnotu elektrického odporu v závislosti na teplotě a fázové změně. U taveniny je hodnota elektrického odporu vyšší, tj. o faktor 2 klesá velikost elektrické vodivosti. Kromě fázové změny hraje velkou roli na velikosti elektrického odporu resp. elektrické vodivosti rovněž složení slitiny materiálu. Na obrázku (1.6) je vidět, že s teplotou roste elektrický odpor resp.

klesá elektrická vodivost materiálu. Například pro teploty 700 K platí, že ze zvyšující se hodnotou obsahu hliníku a s poklesem koncentrace manganu se zvyšuje hodnota elektrického odporu z hodnoty cca $7 \cdot 10^{-8} \Omega m$ na hodnotu cca. $12,6 \cdot 10^{-8} \Omega m$.

Al : 100.00% (100.00 At.%) Mg : 0.00% (0.00 At.%)		Al : 99.50% (99.45 At.%) Mg : 0.50% (0.55 At.%)		Al : 99.00% (98.89 At.%) Mg : 1.00% (1.11 At.%)		Al : 97.00% (96.68 At.%) Mg : 3.00% (3.32 At.%)		Al : 95.00% (94.48 At.%) Mg : 5.00% (5.52 At.%)	
T	ρ	T	ρ	T	ρ	T	ρ	T	ρ
1	0.00100	1	0.209	1	0.512	1	1.50	1	2.54
4	0.00100	4	0.252	4	0.512	4	1.53	4	2.54
7	0.00100	7	0.254	7	0.512	7	1.53	7	2.54
10	0.00103	10	0.254	10	0.512	10	1.53	10	2.54
15	0.00117	15	0.254	15	0.512	15	1.53	15	2.54
20	0.00163	20	0.255	20	0.513	20	1.53	20	2.54
25	0.00295	25	0.256	25	0.514	25	1.53	25	2.54
30	0.00564	30	0.259	30	0.517	30	1.54	30	2.55
40	0.0188	40	0.273	40	0.531	40	1.55	40	2.56
50	0.0480	50	0.302	50	0.561	50	1.58	50	2.59
60	0.0960	60	0.351	60	0.609	60	1.63	60	2.64
70	0.163	70	0.418	70	0.673	70	1.70	70	2.71
80	0.246	80	0.500	80	0.754	80	1.78	80	2.80
90	0.340	90	0.595	90	0.851	90	1.89	90	3.00
100	0.443	100	0.697	100	0.958	100	1.98	100	3.01
150	1.010	150	1.27	150	1.53	150	2.56	150	3.59
200	1.503	200	1.65	200	2.11	200	3.15	200	4.19
250	2.167	250	2.43	250	2.69	250	3.74	250	4.78
273	2.429	273	2.69	273	2.96	273	4.01	273	5.05
293	2.653	293	2.82	293	3.18	293	4.23	293	5.28
300	2.731	300	2.89	300	3.26	300	4.31	300	5.36
350	3.292	350	3.50	350	3.82	350	4.88	350	5.93
400	3.854	400	4.12	400	4.39	400	5.45	400	6.51
500	4.992	500	5.26	500	5.53	500	6.59	500	7.67
600	6.155	600	6.42	600	6.69	600	7.75	600	8.86
700	7.353	700	7.62	700	7.90	700	8.97	700	10.1
800	8.622	800	8.90	800	9.18	800	10.3	800	11.4
900	10.019	900	10.3	900	10.6	880	11.4	849	12.1
999.92	10.510	999	10.6	919	10.8				

Obrázek 1.6: Tabulka změny elektrického odporu ($10^{-8} \Omega m$) v závislosti na složení směsi Al-Mg.

Další podrobnější informace ohledně skin efektu a elektrické vodivosti na výpočet velikosti Lorentzových sil budou vysvětleny v rámci kapitoly 'Matematický model'.

Kapitola 2

Příklady použití magnetického pole ve slévarenství

V současné době jsou ve světě úspěšně provozovány pece, které využívají účinku magnetického pole na taveniny kovů. Magnetické pole se používá nejčastěji k míchání taveniny, ale není ani výjimkou použití magnetického pole pro čerpání taveniny z pece. Společnost Stinchcombe Technology v ČR dodává technologii pro různé typy pecí, přičemž se využívá účinku magnetické pole. Na obrázku 2.1 je ukázka tzv. Twin Stream Induction Technology (TSIT), která byla použita pro již existující slévánu.

Tato technologie zajišťuje indukční míchání taveniny a zpravidla se využívá k modernizaci již provozovaných zařízení. Společnost Stinchcombe Furnaces instalovala tuto technologii na Slovensku obrázek 2.1. Výkon zařízení je dán průtočným množstvím taveniny, která je v tomto případě zhruba do 8 tun taveniny za hodinu. Hmotnost zařízení je 7400 kg a elektrický příkon je 60 - 80 kW. Tato realizace byla uskutečněna v roce 2014. Zařízení je určené pro míchání hliníku a hliníkových slitin.

Na obrázku 2.2 je možné vidět detail TSIT technologie. Velikost zařízení je 2030mmx2050mmx1900mm. Zařízení může být připojeno jak k napětí 220V tak i k 340V.

Kromě promíchávání taveniny pomocí magnetického pole a magnetické indukce je možné rovněž tentýž účinek magnetického pole použít na čerpání taveniny. Působením magnetického pole jsou vytvářeny vnitřní síly, které působí na tekutinu a uvádějí ji do pohybu. Budou-li tyto síly dostatečně intenzivní, bude možné překonat určitou výšku a začít čerpat taveninu z pece do žlabů. Výhodou této metody stejně tak jako u předešlé technologie je bezkontaktní způsob ovlivnění taveniny.



Obrázek 2.1: Twin Stream Induction Technology



Obrázek 2.2: Twin Stream Induction Technology



Obrázek 2.3: Metal Transfer Induction Technology

Na obrázku 2.3 je ukázka zařízení Metal Transfer Induction Technology (MTIT), která se používá právě na čerpání tekutého hliníku ze statických nístějových pecí do licích žlabů. MTIT je speciálně konstruovaná čerpací komora, která může být instalována na téměř jakýkoliv typ nístějové pece a tato technologie je vybavena induktorem GORS+. Jako konkrétní instalaci je možné uvést realizaci ve firmě Vtoraluminprodukt, LLC v Rusku, kde jsou dvě statické pece vybaveny MTIT. Tekutý kov je zde čerpán do výšky 1,3 m nad úroveň podlahy haly. Výkon čerpání dosahuje 1,2 tun za minutu a je opět určen na čerpání roztaveného hliníku anebo hliníkových slitin. Řídící systém založený na snímání hladiny v licím žlabu tak zcela automaticky řídí výkon induktoru GORS+ a tím odlévané množství tekutého kovu do žlabu.

Kapitola 3

Matematický model

Matematický model je soubor rovnic a vztahů popisující fyzikální děj prostřednictvím matematických rovnic. V nejjednodušší podobě se může jednat o jednoduché rovnice jako např. rovnice ideálního plynu. V případě přenosu tepla a hmoty se často uplatňují parciální diferenciální rovnice, jejichž řešení vyžaduje robustnější matematické nástroje. Při jejich diskretizaci tj. převodu z parciální podoby do podoby soustavy algebraických rovnic vyžaduje řešení využití iteračních technik. Některé iterační techniky jsou z hlediska implementace jednoduché, jako například Jacobiho metoda, jiné vyžadují hlubší znalosti pro jejich implementaci do výpočetního programu. Obecně ale platí, že čím přesnější bude popis fyzikálních jevů pomocí matematických vztahů, tím přesnější budou i výsledky numerické simulace. V mnoha případech je ale nutné soubor fyzikálních jevů zhodnotit a méně významné jevy v matematickém popisu zanedbat. Jako příklad lze uvést stlačitelnost kapalin v případě proudění o velmi malé rychlosti resp. o rychlosti výrazně menší než je rychlost šíření dějů v tekutině resp. rychlosti zvuku. I když tekutina bude z fyzikálního hlediska stlačitelná, vliv stlačitelnosti je zde zanedbatelný. Zanedbáme-li tedy stlačitelnost a bude se případ řešit jako nestlačitelné proudění, můžeme výrazně zjednodušit výpočet a tím ušetřit výpočetní čas. Tento postup se může uplatnit i v magnetohydrodynamice. Rovněž tak bude platit, že bude-li teplota taveniny dosahovat vysokých hodnot, můžeme přesto problém řešit jako izotermní, neboť k tomuto zjednodušení postačí, když se v kontrolovaném výpočetním objemu nebude vyskytovat výrazný teplotní gradient. Samotný vliv vysoké teploty v tavenině je možné zahrnout do fyzikálních vlastností tekutin.

3.1 Definice významných bezrozměrných parametrů

Jakékoliv výsledky získané numerickou studií by měly být porovnány s experimenty. Ovšem eventuální validace výsledků je možné učinit pouze tehdy, jsou-li výsledky vyjádřeny pomocí bezrozměrných parametrů. Kromě typických parametrů jako je Reynoldsovo číslo, které je často používáno pro případ proudění tekutiny, existuje také celá řada dalších parametrů, které mají význam právě v problematice magnetohydrodynamického proudění.

Jestliže je tvar výpočetní oblasti dán válcovou nádobou o poloměru R resp. o průměru D a výšce H , pak uvnitř nádoby bude generován hlavní rotační pohyb v důsledku účinku magnetického pole. Tento rotační pohyb je dán rozložením tzv. Lorentzových sil, které vznikají v tekutině právě účinkem magnetického pole. Poněvadž tento pohyb je rozhodující a typický pro danou problematiku, je ho možné považovat do jisté míry za určitou referenční hodnotu. Tuto tzv. referenční hodnotu hlavního rotujícího proudění můžeme vyjádřit jako maximální hodnotu azimutálního (rotujícího) rychlostního pole u_φ . Bezrozměrný parametr Reynoldsovo číslo určuje poměr mezi setrvačnými silami a viskózními silami a jeho definice je dána vztahem (3.1).

$$Re = \frac{u_\varphi R}{\nu} \quad (3.1)$$

Ve vztahu (3.1) označuje R poloměr válcové nádoby a ν kinematickou viskozitu tekutiny.

Zatím co Reynoldsovo číslo je poměrně známé v oblasti mechaniky tekutin, další zde definovaný parametr je už více spojen s magnetohydrodynamickým prouděním. Tak, jak existuje Reynoldsovo číslo v hydromechanice a aeromechanice, tak je i možné nalézt Reynoldsovo číslo Re_ω v magnetohydrodynamice, které je definováno na základě rychlostí rotace ω magnetického pole. Tento parametr se vztahuje na úhlovou rychlost magnetického pole a je definován ve vztahu (3.2).

$$Re_\omega = \frac{\omega R^2}{\nu} \quad (3.2)$$

ω reprezentuje tzv. úhlovou rychlost magnetického rotujícího pole, která je definována jako $2\pi f$, kde f označuje frekvenci v Hz. Bezrozměrné číslo označené jako S určuje, zdali magnetické pole pronikne do materiálu či nikoliv. V anglosaské literatuře je ho možné nalézt pod názvem 'Shielding parameter' (3.3).

$$S = \sigma \mu \omega R^2 \quad (3.3)$$

Ve vztahu (3.3) označuje σ elektrickou vodivost, μ magnetickou permeabilitu a ω úhlovou rychlost magnetického pole. Tento parametr je velmi důležitý, neboť určuje schopnost magnetického pole penetrovat do objemu tekutiny. Čím větší bude schopnost magnetického pole ovlivnit oblast v tekutině, tím intenzivnější budou síly, které v daném objemu budou působit na zbylou část výpočetní domény. Naopak bude-li tento parametr malý popřípadě nulový, magnetické pole nebude schopné generovat Lorentzovy síly, a přestože bude tekutina elektricky vodivá, nebude vznikat očekávaný pohyb tekutiny.

Z mechaniky tekutin je známo, že Reynoldsovo číslo definuje poměr mezi setrvačnými a viskózními silami. Jestliže je toto číslo vyšších hodnot, v proudění převládají setrvačné síly a tlumící efekt viskózních sil je v porovnání k účinku setrvačných sil zanedbatelný. Tento nepoměr sil má významný vliv na charakter proudění, které se postupně s růstem Reynoldsova čísla posouvá do oblasti turbulentního proudění. Všeobecně je také známý fakt, že pro jednotlivé případy lze definovat kritickou hodnotu, kdy proudění přestává být laminární a v proudění se objeví typické rysy nestabilit, které charakterizují přechodový stav a při vyšších hodnotách Re dokonce turbulentní stav proudění. Velmi podobně je tomu také v magnetohydrodynamice. Zde se používá podobné bezrozměrné číslo, které udává poměr mezi magnetickými silami a viskózními silami. Jsou-li magnetické síly malé vůči viskózním silám, pak vzniklé proudění je laminární. Jestliže však překročí velikost magnetických sil v poměru k viskózním silám určitý poměr, pak přejde proudění do nestabilní podoby a objevuje se přechodové proudění, které dále může přejít na turbulentní proudění. Tento bezrozměrný parametr se nazývá magnetické Taylorovo číslo a jeho definice je dána vztahem (3.4).

$$Ta_m = \frac{\sigma \omega B_0^2 R^4}{2\rho \nu} = \frac{1}{2}(Ha)^2 Re_\omega = \frac{1}{2}(Re_\omega)^2 N \quad (3.4)$$

V definici magnetického Taylorova čísla 3.4 reprezentuje B_0 velikost amplitudy magnetické indukce, ρ reprezentuje hustotu materiálu, Ha je Hartmannovo číslo a N je tzv. 'interaction parameter'. V literatuře je často používáno tzv. Hartmannovo číslo, jehož definice je ve vztahu (3.5).

$$Ha = \sqrt{\left(\frac{\sigma B_0^2 R^2}{\rho \nu}\right)} \quad (3.5)$$

Jak je patrné z definice pro magnetické Taylorovo číslo (3.4), je možné Taylorovo číslo vyjádřit pomocí Hartmannova čísla nebo prostřednictvím N parametru, jehož definice je ve vztahu (3.6).

$$N = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \nu} \quad (3.6)$$

Parametr N vyjadřuje velmi důležitý fakt ohledně účinku průměrné hodnoty Lorentzových sil (3.33) a její flukтуаční části na vodivé materiály. V případě, že parametr N dosahuje velmi malých hodnot v porovnání k hodnotě 1, pak vliv flukтуаční části silového pole je zanedbatelný. (MARTIN WITKOWSKI [49]).

Tímto způsobem byly definovány všechny důležité bezrozměrné parametry, které se vážou na případy proudění pod vlivem rotujícího magnetického pole. Později bude představen ještě jeden parametr označovaný jako F , který bude reprezentovat podobné využití jako magnetické Taylorovo číslo. Parametr F se bude vázat speciálně na použití v případě translačního magnetického pole. Na závěr této části je nutné ovšem zmínit ještě jeden oficiálně používaný parametr a tj. tzv. 'aspect ratio', který vyjadřuje poměr mezi výškou nádoby a průměrem nádoby H/D resp. poloměrem nádoby H/R . Tento parametr je často používán v souvislosti s magnetickým Taylorovým číslem.

3.2 Matematický model pro uvažování nestlačitelné tekutiny

Matematický model, který popisuje chování nestlačitelné tekutiny, je dán Navier- Stokesovými rovnicemi, které obecně popisují principy zachování hybnosti a popř. energie. V rámci zde zkoumaných problémů se předpokládá velmi malý rozdíl teplot v celém výpočetním objemu. Důsledkem těchto malých gradientů teploty je generování přirozené konvekce, ovšem intenzita takového proudění je zanedbatelná vůči vzniklému proudění od magnetického pole. Z tohoto důvodu se uvažuje často u podobných studií proudění jako izotermní a celý problém se tak omezí pouze na řešení rovnic zachování kontinuity hmoty a hybnosti. Vektor rychlostního pole magneticky generovaného proudění $\mathbf{u}$ je definován složkami (u, v, w) a vektor externích objemových sil $\mathbf{f}$ je popsán složkami (f_x, f_y, f_z) . Nejdůležitější rovnicí je rovnice popisující zachování hybnosti tekutiny, jejíž obecná definice je dána vztahem 3.7.

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}] \quad (3.7)$$

Tuto rovnici 3.7 je možné dále upravit do tvaru 3.8, jestliže tenzor smykového napětí je definován jako $[\tau] = 2\mu[\mathbf{S}] - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{u}$. Poslední výraz na pravé straně se dále neuvažuje za podmínek nestlačitelnosti tekutiny, tj. kdy $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + 2\mu \nabla \cdot [\mathbf{S}] \quad (3.8)$$

Deformační tenzor napětí označený jako $\mathbf{S}$ je dále definován vztahem 3.9.

$$\nabla \cdot [\mathbf{S}] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Násobením operátoru ∇ první řádkou napěťového tenzoru $\mathbf{S}$ vede na jeho x -složku za předpokladu nestlačitelného proudění 3.10.

$$(\nabla \cdot [\mathbf{S}])_x = \frac{1}{2} \nabla^2 u \quad (3.10)$$

Podobně lze rozepsat tento vektor do složek y a z , přičemž výsledný vektor bude ve formě 3.11, kde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru x , y a z .

$$\nabla \cdot [\mathbf{S}] = \frac{1}{2} (\mathbf{i} \nabla^2 u + \mathbf{j} \nabla^2 v + \mathbf{k} \nabla^2 w) = \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.11)$$

Pomocí vztahu 3.11 se dále výraz pro smyková napětí na pravé straně rovnice 3.8 zjednoduší na formu 3.12.

$$2\mu \nabla \cdot [\mathbf{S}] = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.12)$$

Tato forma zápisu smykových napětí 3.12 se použije pro výslednou rovnici pro zachování objemového toku hybnosti ve tvaru 3.13.

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.13)$$

Použitím předchozího vztahu 3.13 je systém určujících rovnic pro nestlačitelné izotermní proudění vazké tekutiny ve složkovém zápisu definován následujícími rovnicemi 3.14.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tyto definice rovnic platí pro kartézský souřadný systém, který je použit v řešiči pro samotnou simulaci proudění tekutiny bez vlivu magnetického pole. Vzhledem k tomu, že zde popsany problém je vždy omezen pouze na výpočetní oblast tvořenou válcovou nádobou, jsou Lorentzovy síly zpravidla definovány v cylindrickém souřadném systému. V takovémto případě je nestlačitelné vazké proudění dáno vektorem rychlosti $\mathbf{u} = (u_\varphi, u_r, u_z)$, přičemž souřadný systém je definován azimutálními, radiálními a axiálními směry φ, r, z .

Tento cylindrický souřadný systém je přímo použit např. v numerické studii realizované v komerčním výpočetním programu FLUENT, kde se využívá předpokládaná osová symetrie proudění.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \rho f_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) + \rho f_\varphi \end{aligned}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho f_z$$

V případě vlastního výpočetního programu NS-FEM3D se definované Lorentzovy síly v cylindrickém souřadném systému převedou do kartézského souřadného systému dle pomocných vztahů definovaných v 3.16.

$$f_x = f_r \cos(\varphi) - f_\varphi \sin(\varphi), \quad f_y = f_r \sin(\varphi) + f_\varphi \cos(\varphi), \quad , f_z = f_z \quad (3.16)$$

Goniometrické vztahy je možné nahradit délkovými rozměry dle závislosti $\cos(\varphi) = x/r$ a $\sin(\varphi) = y/r$. Pro případ rotujícího magnetického pole bude silový účinek v azimutálním směru rozložen do složek x a y . Naopak silový účinek translačního magnetického pole působí pouze ve směru z . Odvození a přesná definice jednotlivých Lorentzových sil pro oba typy magnetického pole lze nalézt v následujících sekcích této kapitoly.

3.3 Popis obecného matematického modelu pro účinky magnetického pole

V této sekci jsou shrnuty základní určující rovnice používané v magnetohydrodynamice. Mezi tyto základní rovnice patří Maxwell-Amperova rovnice, jejíž redukovaná forma je dána rovnicí 3.17.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_m \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.17)$$

V rovnici 3.17 označuje $\mathbf{B}$ magnetickou indukci, $\mathbf{J}$ je hustota indukovaného proudu a μ_m je magnetická permeabilita materiálu. Další důležitou rovnicí je tzv. Faradayova rovnice, která je definovaná vztahem 3.18.

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.18)$$

V této rovnici představuje A tzv. elektrický potenciál, který je určen časovou změnou magnetického pole. Na základě Faradayovy rovnice lze tak spočítat tento elektrický potenciál, který je pak zapotřebí pro řešení Ohmovy rovnice definované vztahem 3.19.

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{A} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.19)$$

Pomocí vztahu 3.19 (vlevo) se určí hustota indukovaného proudu $\mathbf{J}$, která je dána nejen magnetickým polem prostřednictvím elektrického potenciálu A , ale i samotným magneticky buzeným prouděním zastoupeným výrazem $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Vztah 3.19 (vpravo) pak definuje tzv. Lorentzovy síly, které vyjadřují silový účinek magnetického pole na vodivou tekutinu.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_m \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.20)$$

Problém definice matematického modelu v magnetohydrodynamice je dán skutečností, že magnetické pole vyvolává proudění tekutiny, které pak zpětně ovlivňuje původní magnetické pole. Tato závislost je dána rovnicí 3.20 odvozené na základě vztahů 3.18 a 3.19. Ve vztahu 3.20 označuje σ elektrickou vodivost materiálu. Jak ukáže další kapitola, ve většině numerických studií proudění v metalurgii lze provést výrazné zjednodušení takto komplikovaného spojení pohybu tekutiny a magnetického pole popsaným prostřednictvím Maxwellovy rovnice.

3.4 Základní rovnice a vztahy pro malé hodnoty magnetického Reynoldsova čísla

Základní rovnicí magnetohydrodynamiky je tzv. Maxwellova rovnice, prostřednictvím které se řeší vztah mezi magnetickým polem a pohybem vodivé tekutiny a obráceně. Řešení Maxwellovy rovnice je relativně složité, ovšem jak se dá dále prokázat, v běžných technických aplikacích lze nutnost řešení Maxwellovy rovnice obejít. Teorii, která to umožňuje, se říká

magnetohydrodynamická aproximace pro malé hodnoty magnetického Reynoldsova čísla 3.21.

$$R_m = \mu_m \sigma u l \ll 1 \quad (3.21)$$

Většina technických aplikací v průmyslu a v laboratorních podmínkách pracuje s maximálními rychlostmi magneticky buzeného proudění $u \approx 0.001 - 0.1 \frac{m}{s}$, magnetická permeabilita většiny uvažovaných materiálů dosahuje řádu $10^{-7} \frac{kg \cdot m}{s^2 A^2}$, elektrická vodivost je v řádu $10^6 \frac{s^3 A^2}{kg \cdot m^3}$ a délkové rozměry se pohybují v rozmezí $0.01 - 0.1 m$. Magnetické Reynoldsovo číslo se pak pohybuje v rozmezí $10^{-3} - 10^{-6}$. Jak je patrné, podmínka velmi malé hodnoty magnetického Reynoldsova čísla je vždy dodržena ve většině technických aplikací a lze proto pro tyto typické problémy odvodit zjednodušený matematický model.

Nejprve předpokládáme stacionární magnetické pole, které působí na vodivou tekutinu, která se ovšem nepohybuje $\mathbf{u} = 0$. Za těchto podmínek označíme indukci magnetického pole $\mathbf{B}_0$, elektrický potenciál $\mathbf{A}_0$ a hustotu indukovaného proudu $\mathbf{J}_0$. Jako druhý případ se předpokládá, že se tekutina pohybuje a důsledkem tohoto pohybu dochází k narušení magnetického pole. Nové magnetické pole indukované pohybem tekutiny je velmi slabé v porovnání k původnímu magnetickému poli a tato tzv. fluktuace magnetického pole se označí jako $\mathbf{b}$, elektrický potenciál $\mathbf{a}$ a hustota indukovaného proudu $\mathbf{j}$. Základní rovnice pro oba případy jsou dány vztahy 3.22 - 3.25.

$$\nabla \times \mathbf{A}_0 = 0 \quad (3.22)$$

$$\mathbf{J}_0 = \sigma \mathbf{A}_0 \quad (3.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{a} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (3.25)$$

V rovnici 3.25 se zanedbal výraz druhého řádu $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$. Faradayova rovnice udává, že fluktuace elektrického potenciálu je definovaná jako $\mathbf{a} \sim \mathbf{u} \mathbf{b}$ a tak oscilace elektrického pole

mohou být v rovnici 3.25 rovněž zanedbány. Známý Ohmův zákon pak bude s ohledem na zde uvedené zjednodušení definován vztahem 3.26.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{A}_0 + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (3.26)$$

Elektrický potenciál A_0 může být nahrazen gradientem elektrostatického potenciálu $-\nabla\phi$. Ohmův zákon ze vztahu 3.26 lze pak pomocí elektrostatického potenciálu přepsat na tvar 3.27.

$$\mathbf{J} = \sigma (-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (3.27)$$

Definice Lorentzových sil na jednotku objemu jsou dány vztahem 3.28.

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 \quad (3.28)$$

Jak je možné pozorovat ze vztahu 3.27 a 3.28, Lorentzovy síly jsou nezávislé na b a v případě malých hodnot magnetických Reynoldsových čísel platí, že vliv pohybu vodivé tekutiny nemá skoro žádný vliv na magnetické pole a tudíž pouze působení magnetického pole na vodivé tekutiny je jediný významný fakt magnetohydrodynamické aproximace. Tato skutečnost má nesmírný význam pro sestavení matematického modelu rozložení Lorentzových sil, pro kterou není zapotřebí počítat Maxwellovu rovnici. Tím se výpočet výrazně zjednodušuje a přibližuje se tak praktickému využití s ohledem na kapacity současných výpočetních stanic. Jak bude dále prezentováno, lze většinu Lorentzových sil definovat pomocí analytických vztahů, které vždy vycházejí z rovnic definovaných výše.

3.5 Zkrácený popis matematického modelu v případě rotujícího magnetické pole

Matematický model je zvolen na základě fyzikální podstaty problému. Jak již bylo v předchozích kapitolách zmíněno, zkoumaný problém zahrnuje proudění nestlačitelných tekutin (většinou kovy nebo polovodiče), přičemž hnacím zdrojem tohoto pohybu jsou magnetické

síly. Proudění je uvažováno jako isothermní resp. s nulovým teplotním gradientem uvnitř nádoby. Hnací silou proudění je tak pouze vliv magnetického pole. Eventuální vliv okrajových podmínek na řešení z hlediska tepelné vodivosti resp. elektrické vodivosti není uvažováno. Okrajové podmínky jsou tak zastoupeny jednoduchou podmínkou pevné stěny, tzv. Dirichletovu okrajovou podmínkou. Tato velmi stručná definice slouží jako startovací bod pro výběr vhodného matematického modelu.

Než je možné přejít k definici matematického modelu, je účelné na okraj zmínit několik poznámek k problému výběru vhodného souřadnicového systému. Níže popsany matematický model je definován v kartézských souřadnicích a i v takovéto podobě je dále implementován ve výpočetním softwaru NS-FEM3D. Vzhledem k tomu, že se řešený problém omezuje pouze na výpočetní oblast, která je vždy definována jako válcová nádoba konečných rozměrů s poloměrem válcové nádoby R (průměr D) a výškou nádoby H , pak některé následující matematické definice jsou popsány pomocí cylindrických souřadnic. Tím je možné dosáhnout jejich zjednodušení a také jejich interpretace je mnohem snadnější.

Numerické řešení konkrétního již popsaného fyzikálního problému je dáno řešením matematického modelu, který je definován Navier-Stokesovými rovnicemi (N-S rovnicemi) pro nestlačitelné, viskózní proudění. Momentová rovnice a rovnice kontinuity jsou dány ve vztahu (3.29) a (3.30).

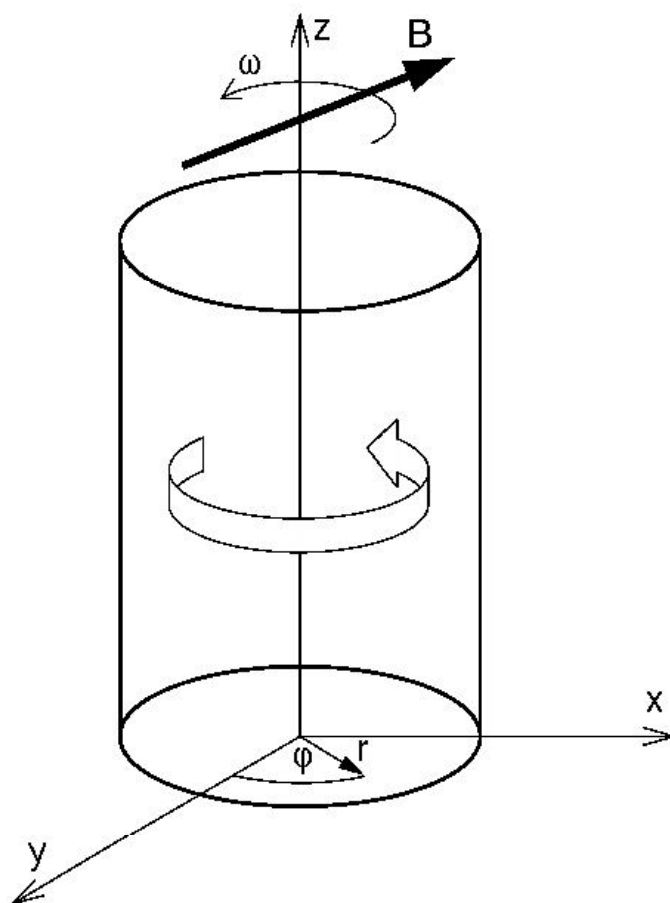
$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_L \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.30)$$

V rovnicích (3.29) a (3.30) $\mathbf{u}$ představuje vektorové pole okamžité rychlosti a p je skalární veličina, která zastupuje řešené tlakové pole, ρ a ν jsou materiálové konstanty resp. hustota a kinematická viskozita tekutiny. Poslední člen na pravé straně rovnice (3.29) reprezentuje vektorovou veličinu zahrnující dodatečné externí síly, které v tekutině působí.

Okrajové podmínky pro simulovaný problém jsou vždy stejné a jsou definovány elektricky a tepelně izolovanými pevnými stěnami typu Dirichletovy okrajové podmínky. Jinou možností je případ, kdy víko nádoby je definováno podmínkou tzv. "free surface", a v takovémto případě se jedná o otevřenou nádobu. Tak je možné rozlišit z hlediska typu okrajových podmínek dvě základní úlohy. V rámci této práce se uvažuje pouze případ úplně uzavřené válcové nádoby.

Dosavadní definice matematického modelu představuje ve skutečnosti prosté isothermní, viskózní a nestlačitelné proudění bez zohlednění dalších vlivů. Vliv účinku magnetického



Obrázek 3.1: Model válcové nádoby s vyznačeným působením rotujícího magnetického pole s úhlovou rychlostí ω a magnetickou indukcí B .

pole je tedy zahrnut do tzv. externích objemových sil. Těmto silám se říká Lorentzovy síly a mohou být vyjádřeny buď analyticky (je-li analytické řešení známo) nebo se počítají na základě indukovaného elektrického proudu j a magnetické indukce B . V dalších kapitolách nalezneme přesné definice Lorentzových sil včetně možné realizace.

3.6 Definice Lorentzových sil

Účinek magnetického pole na vodivé materiály je zahrnut v Navier-Stokesových rovnicích výrazem na pravé straně f_L . Uvažuje se pouze rotující magnetické pole, které rotuje úhlovou rychlostí ω a absolutní hodnota magnetické indukce je B_0 . Frekvence magnetického pole je dána jako $\omega = 2\pi f$, kde f je frekvence v [Hz]. Tato frekvence vlastně určuje rychlost, s

jakou rotuje magnetické pole podél vertikální osy. Schéma modelu válcové nádoby včetně vyznačení účinku magnetického pole je dáno na obrázku 3.1. Popis rotujícího magnetického pole v cylindrických souřadnicích (φ, r, z) je dán vztahem (3.31). e_r , e_φ a e_z představují jednotkové vektory cylindrického souřadného systému.

$$\mathbf{B} = B_0[\cos(\varphi - \omega t)e_r + \sin(\varphi - \omega t)e_\varphi] \quad (3.31)$$

Numerické řešení Lorentzových sil je poměrně velmi složité, neboť se musí uvažovat s mnoha fyzikálními jevy, které se mohou objevovat. Účinkem magnetického pole na vodivé materiály dochází k indukování elektrického proudu, který vyvolává pohyb tekutiny prostřednictvím silového účinku na tekutinu (viz. Lorentzovy síly). Ovšem samotný pohyb tekutiny opět působí na indukovaný proud. Tímto dochází ke zpětné vazbě, která komplikuje realizaci výpočtu. Za určitých podmínek, které jsou zmíněny níže je možné předpokládat, že zpětná vazba mezi rychlostí a magnetickým polem je zanedbatelná vůči samotnému účinku magnetického pole na rychlostní pole a tím je možné celý problém řešit odděleně. V podstatě se předpokládá pouze vliv magnetického pole na generované rychlostní pole. Podmínky, za kterých je možné toto zjednodušení učinit jsou shrnuty následně:

1. Magnetické pole se pohybuje rychleji než samotné rotační proudění uvnitř nádoby resp. je platné, že $u \ll \omega R$.
2. Existuje předpoklad, že proudění je dostatečně pomalé, než je definovaný 'skin' efekt, tj. že platí následující vztah: $R \ll \delta_s = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$, kde σ a μ jsou materiálové konstanty resp. elektrická vodivost a magnetické permeabilita

Jestliže jsou tyto obě podmínky splněny, je možné počítat jen vliv účinku magnetického pole na tekutinu. Tento postup se nazývá jako low- R_m aproximace. Lorentzovy síly jsou pak definovány pouze jako součin absolutní hodnoty magnetické indukce rotujícího magnetického pole a indukované proudu. Definice Lorentzových sil je pak možné vyjádřit ve vztahu (3.32).

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times [\sigma(-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B})] \quad (3.32)$$

Ve vztahu (3.32) reprezentuje ϕ tzv. elektrické potenciální pole. Z praktického hlediska je realizace výpočtu tohoto typu rovnic stejně tak náročná jako např. výpočet tlakového po-

tenciálu v případě řešení Navier-Stokesových rovnic. Z tohoto důvodu je mnohem účelnější využít tzv. analytický vztah pro definici Lorentzových sil, který byl poprvé prezentován autory GORBATCHEV, NIKITIN a USTINOV [16]. V analytickém vztahu se předpokládá pouze časově průměrovaná hodnota Lorentzových sil, zatím co flukтуаční část se zanedbává. (MARTIN WITKOWSKI a WALKER [48])

Jsou-li tedy splněny podmínky pro použití analytického řešení Lorentzových sil, pak rozložení silového účinku v geometrii válcového tvaru konečných rozměrů je dán vztahem (3.33).

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{2} \sigma \omega B_0^2 r f_k(r, z) \quad (3.33)$$

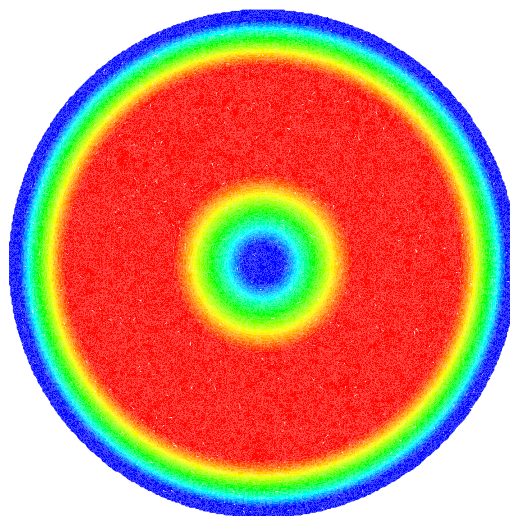
Ve vztahu (3.33) je znázorněné rozložení Lorentzových sil ve výpočetní geometrii a jak je patrné z definice, velikost těchto sil je dána nejen poloměrem nádoby, ale rovněž tak její výškou. Právě koeficient $f_k(r, z)$ zahrnuje vliv konečné výšky nádoby. Jeho definice je dána vztahem (3.34).

$$f_k(r, z) = 1 - \frac{R}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_1(\lambda_k r/R) \cosh(\lambda_k z/R)}{(\lambda_k^2 - 1) J_1(\lambda_k) \cosh(\lambda_k H/2R)} e_{\varphi} \quad (3.34)$$

J_1 představuje ve vztahu (3.34) Besselovu funkci prvního typu a 1. řádu a λ_k je kořen řešení $\lambda_k J_0(\lambda_k) - J_1(\lambda_k) = 0$. Vztah (3.33) vychází v podstatě z definice Lorentzových sil pro případ nekonečné výšky nádoby. V případě konečných rozměrů je nutné zahrnout do vztahu ještě opravný faktor, který zohledňuje konečnou geometrii. Výsledný analytický vztah Lorentzových sil zohledňuje velikost výpočetní oblasti a hodnota je závislá na odlehlosti od středu rotace a rovněž tak na vzdálenosti od dna nádoby. Tímto způsobem je možné se vyhnout řešení rovnice (3.32) a výrazným způsobem tak usnadnit realizaci výpočtu.

Obrázek (3.2) ukazuje rozložení azimutální rychlosti ve válci nekonečné délky, přičemž proudění je vyvoláno účinkem Lorentzovy síly.

Závěrem lze podotknout, že analytické řešení umožňuje velmi rychle definovat silový účinek magnetického pole na vodivé či slabě vodivé tekutiny (polovodiče), jestliže magnetickým polem je rotující magnetické pole. Jsou-li tedy definovány externí (Lorentzovy) síly, pak spolu s rovnicemi Navier-Stokese je kompletně definován celý matematický model bez vlivu

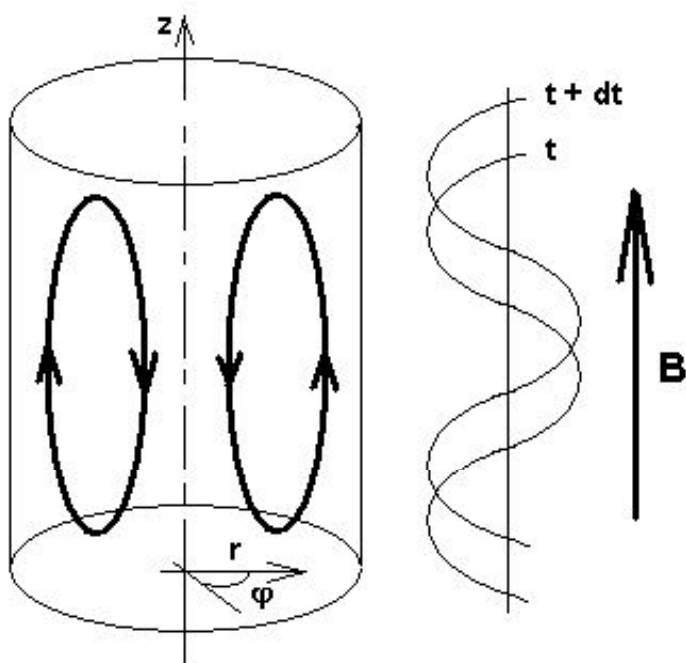


Obrázek 3.2: Rozložení azimutálního rychlostního pole pro případ laminárního proudění ve válcové nádobě nekonečné délky.

turbulence, který je dále řešen pomocí metody konečných prvků ve výpočetním programu NS-FEM3D.

Translační magnetické pole působí s absolutní hodnotou magnetické indukce B_0 , s vlnovým číslem a a s frekvencí pohybu magnetického pole ω na vodivou tekutinu uvnitř nádoby. Stěny nádoby se uvažují za elektricky dokonale izolované.

Na obrázku 3.3 je znázorněno působení translačního magnetického pole na tekutinu uvnitř válcové nádoby o poloměru R a konečné výšky H s určujícím parametrem $Z = R/2H$. V důsledku působení magnetického pole na elektricky vodivý materiál (σ) vzniká ve válcové nádobě proudění ve vertikálním směru tvořené anuloidem viz. 3.3. Výhodou translačního magnetického pole je možnost vyvolat proudění přímo ve směru působení gravitační síly. Oproti rotujícímu magnetickému poli, kdy proudění ve směru působení rotace představuje slabší sekundární proudění, je možné pomocí translačního magnetického pole vyvolat relativně intenzivní rychlostní pole v tomto směru. To předurčuje použití toto magnetické pole u mnoha technických aplikací spojených se stabilizací proudění např. v oblasti krystalizace materiálů či výroby monokrystalu.



Obrázek 3.3: Schéma působení translačního magnetického pole.

3.6.1 Matematický model translačního magnetického pole

Matematický model translačního magnetického pole je složitější, než je tomu u rotujícího magnetického pole. V současné době existuje několik variant, přičemž jak bude ukázáno později, za určitých okolností a zjednodušení vedou všechny tyto varianty k jedné společné formulaci rozložení externích sil, vznikajících v důsledku působení magnetického pole na vodivé materiály.

Pohybující se magnetické pole ve vertikálním směru je popsáno obecně vektorovým potenciálem $\mathbf{A}$ ve vztahu 3.35.

$$\mathbf{A} = A(r) \sin(\omega t - a_m z) \mathbf{e}_\varphi \quad (3.35)$$

Úhlová rychlost translačního magnetického pole je označena jako ω a a_m je v tomto případě vlnové číslo. Řešení vztahu 3.35 pro případ válcové nádoby konečných rozměrů je stejné jako analytické řešení (3.36) rozložení externích sil, vznikajících působením magnetického pole v elektricky vodivém materiálu.

$$\begin{aligned}
f_\varphi &= 0 \\
f_r &= F_t \frac{\operatorname{Im}[J_1(\beta r)J_0(\beta r)]}{|J_0(\beta)|^2} \\
f_z &= F_t a_m \frac{|J_1(\beta r)|^2}{|J_0(\beta)|^2}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Ve vztahu 3.36 představuje F_t amplitudu, která je dále definovaná ve vztahu 3.37 a parametr β je definován jako $\beta = \sqrt{a_m^2 + i\gamma}$. Parametr γ je popsán vztahem $\gamma = \sigma\omega\mu_m R^2$, kde σ je elektrická vodivost materiálu a μ_m magnetická permeabilita.

$$F_t = A_0^2 \left(\frac{\sigma\omega R^2}{2\rho\nu^2} \right) \tag{3.37}$$

Magnetické pole budí externí síly ve vodivé tekutině, jejichž složky jsou dány vztahem 3.36. Azimutální složka síly je nulové hodnoty, radiální složka představuje potenciál, který neovlivňuje rychlostní pole tekutiny a tudíž ji lze pro výpočet pohybu tekutiny zanedbat. Pro námi uvažovaný výpočet je tak rozhodující pouze axiální složka síly, kterou je možné dále zjednodušit. Vlnové číslo a_m lze definovat jako $a_m = 2\pi R/L$, kde L je vlnová délka. Z praktického hlediska je možné považovat hodnotu $a_m \approx 1$ a $\gamma \approx 1$. Tímto způsobem se zjednoduší vztah pro axiální složku z rovnice 3.36.

$$f_z = F_t a_m |\beta|^2 \frac{r^2}{4} \tag{3.38}$$

Vztah 3.38 lze ještě dále upravit zahrnutím vztahu 3.37, takže konečná forma pro externí síly buzené magnetickým translačním polem je definována vztahem 3.39.

$$\mathbf{f}_L = \frac{B_0^2 \sigma \omega a_m}{8} r^2 \mathbf{e}_z \tag{3.39}$$

Ve vztahu 3.39 označuje B_0 absolutní magnetickou indukci. Jak dále ukazuje vztah 3.39, je rozložení externích sil dáno kvadratickou změnou radiální vzdálenosti. Toto analytické řešení bylo použito v pracích GRANTSE a GERBETHA [24]. V práci GELFGATA [80]. RAMA-CHANDRAN [54] byla zveřejněna jiná forma analytického řešení externích sil ve tvaru 3.40.

$$\mathbf{f} = -\mathbf{e}_r \sigma u_r \langle B_z^2 \rangle - \mathbf{e}_z \sigma \left(u_z - \frac{\omega}{a_m} \right) \langle B_r^2 \rangle \quad (3.40)$$

Rovnici 3.40 je možné dále zjednodušit za předpokladu, že vliv indukovaného pohybu tekutiny na magnetické pole bude zanedbatelný vůči vlivu magnetického pole na tekutinu. Tomuto předpokladu odpovídá většina technických problémů, které se řeší. Za předpokladu uvážení tohoto zjednodušení je možné vztah 3.40 dále zjednodušit.

$$f_z = \sigma \frac{\omega}{a_m} \langle B_r^2 \rangle \quad (3.41)$$

Parametr $\langle B_r^2 \rangle$ je definován dle vztahu 3.42.

$$\langle B_r^2 \rangle = \frac{1}{2} B_0^2 I_1^2(a_m r) \quad (3.42)$$

Vztah 3.42 je nutné dále upravit za stejných podmínek jako v předchozím odvození. Velikost vlnového čísla je blízká k 1, takže $a_m \approx 1$. Za těchto podmínek je možné formu vztahu 3.42 upravit do nové podoby, takže výraz pro externí sílu 3.41 lze napsat ve tvaru 3.43.

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{8} B_0^2 \sigma \omega a_m r^2 \mathbf{e}_z \quad (3.43)$$

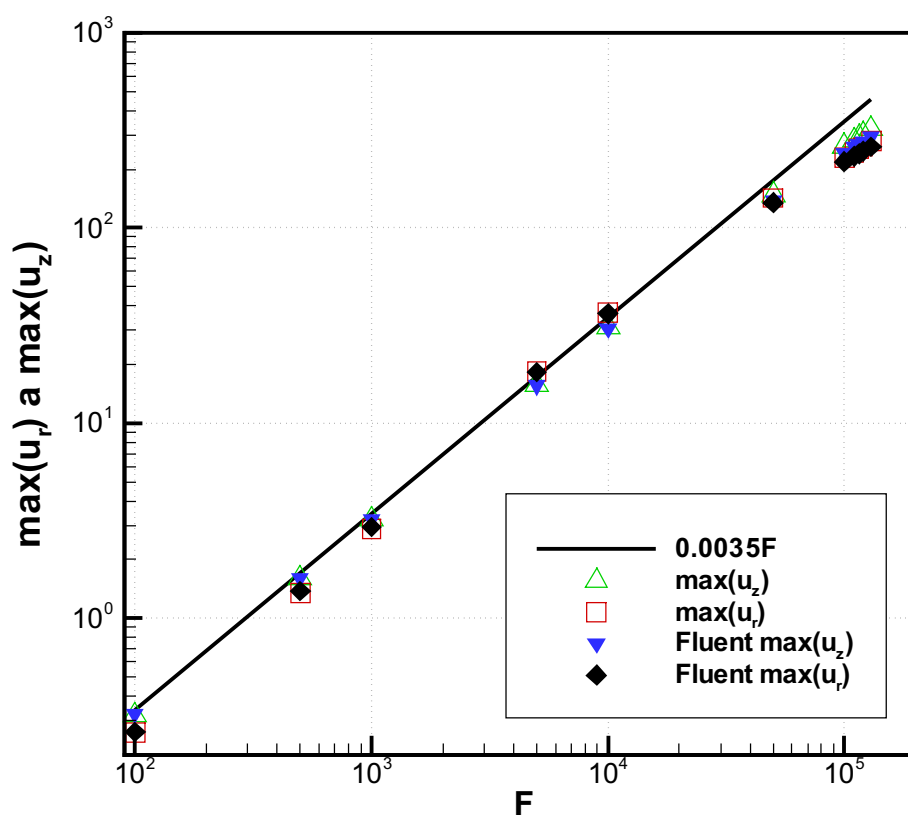
Jak dokazuje vztah 3.43 odvozený na základě vztahu 3.40 je možné považovat základní analytický vztah autorů GRANTSE a GERBETHA [24], GELFGATA [80] a RAMACHANDRANA [54] za totožný. Jak ale ukazuje práce GELFGATA [80], průběh rozložení Lorentzových sil se výrazně změní, jakmile se bude předpokládat, že vlnové číslo nebude $a \approx 1$. Pro hodnoty $a \gg 1$ je nutné pro výpočet externích sil uvažovat vztah 3.40.

V rámci numerické simulace proudění s účinkem působení translačního magnetického pole bude použit identický vztah pro definici rozložení externích sil 3.39 nebo 3.43. Tímto způsobem se nabízí také možnost porovnat současné publikované výsledky s vlastními výsledky a tak prokázat jejich správnost. K popisu stavu proudění generované translačním magnetickým polem se nejčastěji používá tzv. kritériální číslo označené jako F , které je definováno ve vztahu 7.1

$$F = \frac{\sigma \omega B_0^2 a_m R^5}{4\rho \nu^2} \quad (3.44)$$

Kriteriální číslo F má obdobné použití jako Taylorovo číslo (3.4), které se běžně používá v souvislosti s rotujícím magnetickým polem. Definice kriteriálního čísla F se formuluje na základě externích sil pro translační magnetické pole. Tato formulace kriteriálního čísla byla použita v literatuře GRANTSE a GERBETHA [24]

3.6.2 Verifikace matematického modelu TMP



Obrázek 3.4: Vývoj maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti TMP.

K verifikaci matematického modelu pro translační magnetické pole je možné využít dosavadní znalosti o vývoji maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti v oblasti axisymetrického proudění definovaného malými hodnotami kritériálního čísla F (7.1).

Dle práce GRANTSE a GERBETHA [24] je vývoj maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti definován $0.0035F$. Obrázek 3.4 zobrazuje vývoj maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti magneticky buzeného proudění, přičemž jednoznačně ukazuje velmi dobrou shodu výsledků vlastního výpočtu s teorií GRANTSE a GERBETHA [24]. Vzhledem k tomu, že je ale možné pozorovat i malé odchylky od teoretického průběhu zejména pro velmi malé či velké hodnoty kritériálního čísla, byly výsledky porovnány ještě s výpočtem usku-tečněným pomocí komerčního programu FLUENT. I v případě výsledků pomocí komerčního programu FLUENT existují patrné odchylky průběhu maximálních hodnot radiální a axiální složky rychlosti od teorie GRANTSE a GERBETHA [24] a naopak tytéž výsledky potvrzují velmi dobrou shodu s výpočtem realizovaným pomocí vlastního programu NS-FEM3D. Jak ukazují samotné výpočty GRANTSE a GERBETHA [24] teoretický průběh $u_{max} = 0.0035F$ odpovídá pouze přibližně a v případě jejich výpočtů existují rovněž patrné odchylky od tohoto teoretického průběhu.

3.7 Simulace turbulentního proudění

S nárůstem intenzity magnetického pole se zvyšuje také intenzita účinku externích sil na vodivé tekutiny, která posouvá charakter magneticky buzeného proudění do oblasti turbulentního režimu proudění. Uvažuje-li se například působení rotujícího magnetického pole, vzniká tzv. hlavní rotační pohyb tekutiny kolem vertikální osy rotace a slabší sekundární proudění v meridiálním směru. Z pohledu celkové kinetické energie je dominantní rotující pohyb tekutiny, který je až 1000x intenzivnější, než je sekundární proudění. Bohužel je známo, že takovéto rotační proudění je zpravidla anizotropní, což z hlediska numerické simulace představuje problém pro mnoho běžně užívaných turbulentních modelů v praxi. Z hlediska výpočtu turbulentního chování tekutiny lze rozdělit strategii výpočtu na metodu využívající přímý výpočet (Direct Numerical Simulation) anebo modelování. Při modelování se turbulentní modely označují nejčastěji jako RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) modely. Mezistupněm mezi oběma přístupy je Large Eddy Simulation (LES). Tento model umožňuje kombinovat přímý výpočet vlivu turbulence u velkých měřítek, jejichž definice je dána použitou výpočetní sítí. Malá měřítká turbulence jsou modelována pomocí RANS modelů tzv. SGS modelu. Velmi slibný přístup v oblasti modelování vlivu turbulence v proudění jsou tzv.

hybridní modely, které představují kombinaci LES a RANS modelu. Zatímco LES model jsou použit na oblasti mimo pevné stěny, regiony v blízkosti pevných stěn jsou řešeny výpočetně pomocí RANS modelu.

Klasické turbulentní modely RANS jako např. $k - \varepsilon$ Standard, $k - \omega$ apod. představují modely založené na lineární závislosti mezi turbulentními napěťovými tenzory a turbulentními měřítky (turbulentní kinetická energie, specifická turbulentní disipace apod.). Právě tato lineární závislost představuje problém v případě anizotropního charakteru turbulentního proudění. Na druhé straně jsou tyto jednoduché modely preferovány s ohledem na svoji jednoduchou definici, snadnou implementaci, širokou použitelnost a především pro svoji výpočetní nenáročnost. Cílem následující kapitoly je tak komentovat tyto zásadní otázky. Některé tyto modely byly úspěšně použity pro simulaci proudění s vlivem magnetického pole. Výsledky numerické simulace získané prostřednictvím turbulentních modelů $k - \varepsilon$ Standard, $k - \omega$ SST bylo možné úspěšně porovnat s výsledky 3d DNS studie, u kterých došlo již předtím k výrazné shodě s experimenty STILLER, FRAŇA a CRAMER [30] a FRAŇA [46]. Tímto způsobem se tak mohly otestovat tyto dva nejčastěji užívané turbulentní modely. Tento test prokázal, že s určitou chybou je možné použít turbulentní modely RANS pro výpočet magnetohydrodynamických jevů v tekutině. Obecně ale stále platí, že tyto modely jsou upřednostňovány pro případy vyšších hodnot Reynoldsových čísel, kde nejsou dostupné jiné účinnější postupy. Souhrnné výsledky studie použitelnosti vybraných modelů RANS byly již publikovány ve FRAŇA, STILLER a GRUNDMANN [41].

3.8 RANS modely

Dvourovnicové turbulentní modely jsou založeny na dvou transportních rovnicích, ze kterých se počítají přímo měřítko turbulentní rychlosti a měřítko délek v proudění. Doposud existuje velká řada různých variací, přičemž nejčastější kombinace představuje transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii pro měřítko turbulentní rychlosti. Délkové měřítko je dáno transportní rovnicí pro turbulentní disipaci energie ε (model $k - \varepsilon$) nebo pro disipaci na jednotku turbulentní kinetické energie ω ($k - \omega$).

Transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii pro modely $k - \varepsilon$ a $k - \omega$ je dána rovnicí 3.45.

$$\frac{Dk}{Dt} = \mathcal{P} - \varepsilon + \mathcal{D} \quad (3.45)$$

Na pravé straně rovnice 3.45 představuje první výraz transport turbulentní kinetické energie k prostřednictvím turbulentní produkce $\mathcal{P}$, ε je množství izotropní turbulentní disipace a $\mathcal{D}$ představuje kombinovaný efekt turbulentního transportu a viskózní difuzivity.

$$\mathcal{P} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (3.46)$$

Turbulentní produkce je dána vztahem 3.46, kde $\overline{u_i u_j}$ vyjadřuje tenzor Reynoldsova napětí. Rovnice 3.47 rozepisuje výraz pro příspěvek viskózní difuzivity a turbulentního transportu.

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.47)$$

V rovnici 3.47 představuje koeficient σ_k efektivní Prandtlovo číslo pro difuzi, který je v případě nestlačitelné tekutiny konstantou. V případě modelu $k - \varepsilon$ je $\sigma_k = 1$ a pro model $k - \omega$ je $\sigma_k = 2$.

Dodnes existuje široká řada variací modelů $k - \varepsilon$, které se liší především v transportní rovnici pro isotropní rychlost disipace ε . Rychlost disipace je definována jako poměr mezi kinetickou energií turbulence a charakteristickým časem fluktuací. Nejznámější a také nejužívanější je původní verze transportní rovnice odvozena JONESEM (1972) [78] a LAUNDEREM (1974) [6]. Na základě této rovnice pak vesměs byly odvozeny další variace modelu.

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} \mathcal{P} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \quad (3.48)$$

Rovněž pro transportní rovnici 3.48 existují doplňující vztahy a konstanty, kde konstanta $C_{\varepsilon 1} \approx 1.45$ vyjadřuje hodnotu pocházející z kalibrace pro homogenní smykové proudění a $C_{\varepsilon 2} \approx 1.90$ je odvozena od rozboru homogenní izotropní turbulence. Koeficient σ_ε je dán vztahem 3.49.

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{\sqrt{C_\mu} (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})} \quad (3.49)$$

Turbulentní viskozita se stanoví dle vztahu 3.50 na základě turbulentní kinetické energie k a izotropní disipace ε , které byly vypočteny na základě transportních rovnic.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.50)$$

Ve vztahu 3.50 je konstanta $C_\mu \approx 0.09$. Na základě vztahu 3.50 se spočítá turbulentní vírová viskozita, která obsahuje informace o vlivu turbulence na proudění. Vliv se projeví prostřednictvím turbulentní viskozity, která se spolu s molekulární viskozitou přičítá k výrazu třecích sil v Navierov-Stokesově rovnici.

Numerická simulace turbulentních toků, kde se objevuje např. separace proudění se zpětným proudem je mnohdy kritickým bodem modelů $k - \varepsilon$. Ze snahy nalézt nové modely, které by umožňovaly přesněji řešit tyto problémy, vznikl model $k - \omega$ SST MENTER [66]. Výrazným znakem tohoto modelu je použití dvou různých dvourovnicových turbulentních modelů. Pro oblasti v blízkosti pevných stěn se použije originální varianta modelu $k - \omega$ WILCOX [10] a v oblasti mimo pevné stěny či ve volném proudu se použije model $k - \varepsilon$ Standard. Tento nový model má stejnou formulaci transportní rovnice pro popis transportu turbulentní kinetické energie a liší se pouze novou formou rovnice pro transport specifické disipace $k - \omega$, která je definovaná ve vztahu 3.51.

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\nu_t} \mathcal{P} - \beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + 2 \frac{1 - F_1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \quad (3.51)$$

V transportní rovnici 3.51 se objevuje velmi důležitý parametr F_1 , který rozhoduje o tom, jaký typ modelu se bude pro danou oblast uplatňovat. Tento parametr je definován vztahem 3.52,

$$F_1 = \tanh(\Gamma^2) \quad (3.52)$$

kde

$$\Gamma = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{C_{\mu\omega d}}, \frac{500\nu}{\omega d^2} \right); \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2} \right] \quad (3.53)$$

Ve vztahu 3.53 je $CD_{k\omega}$ difuzní člen. Parametr F_1 může dosáhnout buď hodnoty 1 a pak se uplatní při výpočtu model $k - \omega$ nebo hodnoty 0 a pak se pro danou oblast použije model $k - \varepsilon$.

Transportní rovnice 3.51 musí být rovněž doplněna dalšími vztahy a konstantami, které uzavírají tuto transportní rovnici. Některé konstanty jako např. $\sigma_k, \sigma_\omega, \beta$ a γ jsou odvozeny dle vztahu 3.54.

$$(\sigma_k, \sigma_\omega, \beta, \gamma) = F_1(\sigma_{k1}, \sigma_{\omega1}, \beta_1, \gamma_1) + (1 - F_1)(\sigma_{k2}, \sigma_{\omega2}, \beta_2, \gamma_2) \quad (3.54)$$

Velmi důležitou vlastností SST modelu je modifikace turbulentní vírové viskozity takovým způsobem, aby odrážela schopnost zahrnout do výpočtu rovněž přechodové jevy proudění. Na základě těchto vlastností je definice turbulentní vírové viskozity mnohem složitější v porovnání k modelům $k - \varepsilon$, její definice je dána vztahem 3.55,

$$\nu_t = \frac{2b_{12}k}{\max\left(2b_{12}\omega; \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right)F_2}\right)} \quad (3.55)$$

kde $b_{12} = 0.155$ je koeficient anizotropie smykového napětí. Parametr F_2 je dán dle vztahu 3.56.

$$F_2 = \tanh(\Gamma_2^2) \quad (3.56)$$

a funkce Γ_2 je definována dle vztahu 3.57.

$$\Gamma_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{C_\mu\omega d}; \frac{500\nu}{\omega d^2}\right) \quad (3.57)$$

Další nutné doplňující koeficienty a vztahy potřebné pro řešení transportní rovnice 3.51 jsou definovány: $\sigma_{k1} = 1.17647$, $\sigma_{\omega1} = 2$, $\beta_1 = 0.075$, $\sigma_{k2} = 1$, $\sigma_{\omega2} = 1.16822$ a $\beta_2 = 0.0828$. Parameter γ_1 je dále dán vztahem 3.58.

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{C_\mu} - \frac{\kappa^2}{(\sigma_{\omega1}\sqrt{C_{mu}})} \quad (3.58)$$

Parameter γ_2 je dán velmi podobným vztahem jako 3.58.

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{C_\mu} - \frac{\kappa^2}{(\sigma_{\omega 2} \sqrt{C_{\mu}})} \quad (3.59)$$

Konstanty $\sigma_{\omega 1}$, β_1 a γ_1 jsou stejně definované jako v originálním modelu $k - \omega$ (WILCOX [10]). Konstanty σ_{k2} , $\sigma_{\omega 2}$, β_2 a γ_2 jsou stejné jako u modelu $k - \varepsilon$.

$$\sigma_{k2} = \sigma_k \quad (3.60)$$

$$\sigma_{\omega 2} = \sigma_\varepsilon \quad (3.61)$$

$$\beta_2 = C_\mu (C_{\varepsilon 2} - 1) \quad (3.62)$$

$$\gamma_2 = C_{\varepsilon 1} - 1 \quad (3.63)$$

V modelu $k - \omega$ SST jsou použity koeficienty od autorů LAUNDER-SHARMA (1974), jejichž hodnoty jsou: $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\kappa = 0.41$, a $\sigma_k = 1$.

Pro případy proudění o nižších Reynoldsových číslech nabízí model $k - \omega$ SST mnohem lepší výsledky než samotný model $k - \varepsilon$, neboť SST model využívá faktu, že v oblasti v blízkosti pevné stěny způsobuje model $k - \varepsilon$ velké problémy, a proto je v modelu SST nahrazen modelem $k - \omega$. V technické praxi se stal model $k - \omega$ SST velmi oblíbený z důvodu svého širokého použití na různé problémy proudění včetně separace proudů a možnosti zohlednit i vznik slabšího zpětného proudění. Rovněž možnost podchycení jevů spojených s přechodem proudění do turbulentní oblasti zvýšilo popularitu tohoto turbulentního modelu.

3.9 Hybridní modely typu DES

Obzvláště v oblastech s nižší hodnotou Reynoldsova čísla je použití modelů RANS nevhodné. Mnohem slibnější metoda implementace turbulence do charakteru modelu proudění je využití modelu Large Eddy Simulation nebo hybridních turbulentních modelů. Large Eddy Simulation je obecně turbulentní model, který využívá přímého výpočtu a modelování. Pro

oblast nedostatečně jemné sítě k modelování všech délkových měřítek je zvolen model SGS nebo-li sub grid scale model. Ten v sobě zahrnuje de facto modely RANS, tudíž jedná se už jen o odhad založený na modelování. Protože metoda LES má spoustu slabých stránek a jednou z nich je problematika pevných stěn, nabízí se možnost využít k modelování turbulence v blízkosti stěn právě RANS model. LES model zůstává zachován pro výpočty mimo mezní vrstvy tedy v oblasti volných proudů. Tomuto přístupu se říká hybridní model turbulence a v rámci této publikace jsou zmíněny především modely založené na transportních rovnicích Spalart-Allmaras t.j. jednorovnicového turbulentního modelu. Právě tyto modely byly úspěšně implementovány do výpočetního programu NS-FEM3D.

V případě izotermního proudění je matematický model dán následujícími rovnicemi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot uu = -\nabla p + \nabla [(\nu + \nu_t)(\nabla u)] \quad (3.64)$$

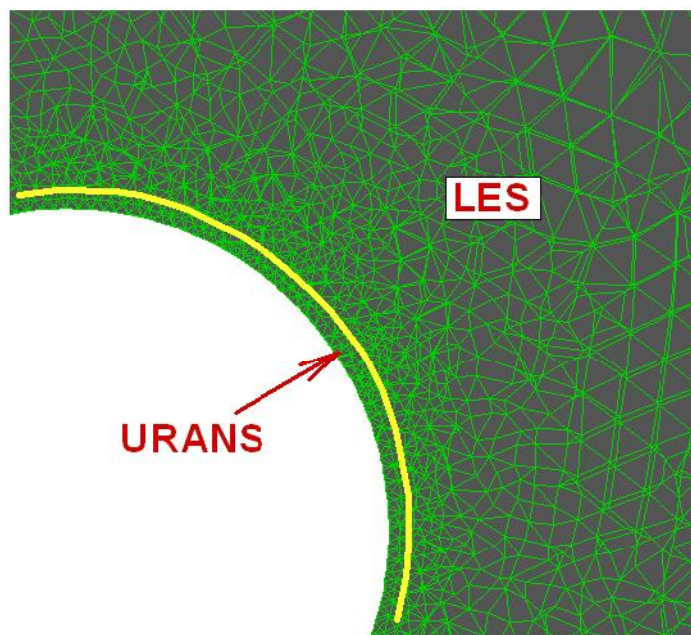
$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.65)$$

Efekt turbulence je zahrnut do turbulentní vírové viskozity ν_t . V případě modelu Detached Eddy Simulation (DES) nebo pozdější verze (DDES popřípadě EDDDES) je výpočet turbulentní vírové viskozity založen na výpočtu modifikované vírové viskozity, která je počítána přímo z transportní rovnice v RANS turbulentním modelu Spalart-Allmaras ([65])

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} [\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu}) + c_{b2}(\nabla\tilde{\nu})^2] - c_{w1}f_w \left[\frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2 \quad (3.66)$$

kde na pravé straně rovnice 3.66 je člen zahrnující produkci turbulentní vírové viskozity. Druhý člen reprezentuje výraz pro disipaci a poslední člen představuje destrukční člen, který upravuje napětí v blízkosti pevných stěn. Tento člen je velmi dobře rozpoznatelný, neboť ve jmenovateli vystupuje parametr d označující vzdálenost od stěny. Člen popisující produkci turbulentní vírové viskozity dále zahrnuje skalární veličinu $\tilde{S}$, která je vyjádřena hodnotou vířivosti S a členu zahrnující opět korekci v blízkosti stěn. Člen tvorby turbulentní vírové viskozity může být modelován obdobně jako je tomu u původního modelu Spalart-Allmaras ([65]). Rovnice pak nabude tvaru, který je uveden v rovnici 3.67.

$$\tilde{S} \equiv S + \left(\frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} \right) f_{v2} \quad (3.67)$$



Obrázek 3.5: Vyznačení oblasti pro řešení pomocí LES a (U)RANS u DES modelu

Rovnice 3.66 musí být uzavřena užitím pomocných vztahů a konstant, které byly definovány v původním modelu Spalart-Allmaras [65]. Hledaná turbulentní vírová viskozita ν_t je počítána na základě modifikované turbulentní vírové viskozity a vztah je dán rovnicí 3.68.

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (3.68)$$

Ve verzi hybridního modelu DES [63] se používá modifikovaná vzdálenost od stěny označená jako $\tilde{d}$, která je úměrná pouze velikosti výpočetní sítě daná Δ . To de facto určuje i největší slabinu tohoto modelu a to je velká závislost modelu na kvalitě výpočetní sítě.

$$\tilde{d} \equiv \min(d, C_{DES}\Delta), \quad \Delta \equiv \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (3.69)$$

Doporučená hodnota parametru C_{DES} je 0.65. Slabou stránkou klasického modelu DES [63] je tzv. šedá zóna. Jedná se o oblast přímo spojenou s mezní vrstvou v blízkosti stěny. Aby se tato slabost modelu odstranila, používají se zdokonalené modely označené jako

DDES [64] (Delayed Detached Eddy Simulation). V případě těchto variací je zaveden nový parametr f_d , takže nové disipační délkové měřítko je dáno vztahem 3.70.

$$\tilde{d} = d - f_d \max(0; d - C_{DES} \Delta) \quad (3.70)$$

kde

$$f_d = 1 - \tanh \left[(8r_d)^3 \right] \quad (3.71)$$

a

$$r_d = \frac{\nu + \nu_t}{\sqrt{\partial x_j u_i \partial x_j u_j} \kappa^2 d^2} = \frac{\tilde{\nu}}{S \kappa^2 d^2} \quad (3.72)$$

Základním důvodem této modifikace disipačního délkového měřítka v modelu DDES je zabránění předčasnému převrácení modelu z LES do URANS, které se právě objevuje tzv. šedé zóně, nebo-li v místě přechodu mezi LES a RANS popřípadě URANS. Jak je dále patrné, kritérium pro použití RANS a LES nezávisí jen na velikosti sítě, ale i na charakteru proudění. Obecně vyjádřeno, v kritériu se objevuje i fyzikální vlastnost proudění. Detaily použití DDES modelu je možné najít v literatuře [64]. Implementovaný model byl testován a výsledky byly publikovány v publikaci [43].

Kapitola 4

Výpočetní software

Řešení matematického modelu pomocí softwaru NS-FEM3D je založeno na metodě konečných prvků. Výpočetní program NS-FEM3D vznikl na Technické univerzitě v Drážďanech a byl speciálně vyvinut pro účely nestlačitelného vazkého proudění v tekutinách ovlivněných magnetickým polem. Současná verze programu umožňuje výpočet nestlačitelného a nestacionárního turbulentního proudění. Do programu byly implementovány nástroje na výpočet Lorentzových sil jak pomocí již odvozených analytických vztahů tak i pro kompletní případ výpočtu na základě rovnic magnetohydrodynamiky (více v kapitole matematický model). Úspěšně byly počítány případy působení rotujícího a translačního magnetického pole. Samotný program disponuje rovněž turbulentním modelem DES a variantami DDES a EDDES. Všechny modely turbulence byly validovány pomocí jednoduchých testovacích úloh. Výhodou programu je rovněž možnost měnit výpočetní síť dle vývoje v průběhu řešení proudění. Nabízí se možnost adaptovat síť dle konstantního parametru nebo pomocí gradientů určujících veličin například rychlosti, tlaku apod. Výpočetní program disponuje rovněž robustními metodami výpočtu jako je Multigrid metoda pro rychlou a efektivní iteraci řešení nebo silnými stabilizačními technikami, které umožňují řešit komplexní problémy proudění.

4.1 Historie vývoje výpočetního programu

Počátek vývoje výpočetního programu určeného k modelování v mechanice tekutin se datuje na začátek roku 2002. Ovšem ještě předtím byly naprogramovány první jednodušší moduly umožňující práci s daty popisujícími výpočetní síť (publikováno FRAŇA [37]). Před rokem 2002 vznikla tzv. knihovna základních modulů "MG library", která umožnila práci s daty resp.

třídění dat dle elementů, výpočetních uzlů, okrajových podmínek atd. Tato knihovna vznikla na základě práce JÖRGA STILLERA (částečně publikovaná v [32]). Tím byl vytvořen základ pro budoucí výpočetní program pracující s touto základních platformou, umožňující přípravu dat pro paralelní výpočet.

V roce 2002 začal vývoj výpočetního programu. V první fázi vznikl pouze obyčejný jednoduchý program pro výpočet Poissonovy rovnice v rámci výpočtu tlakového potenciálu včetně zohlednění okrajových podmínek. Tato část zahrnuje také tzv. tlakovou stabilizaci. V druhé polovině roku 2002 byl realizován první výpočet a zároveň kompletně dohotoven výpočetní kód pro případ řešení N-S rovnic. Tím bylo možné řešit jak rychlostní, tak i tlakové pole. Na začátku roku 2003 byla dohotovena verze umožňující řešit daný problém paralelně. V tutéž dobu se uskutečnily první testy v rámci verifikace softwaru. Zhruba v polovině roku 2003 pak byly dodatečně implementovány další moduly, umožňující zahrnout vliv účinku magnetického pole na tekutiny. Vznikly tak moduly definující rozložení tzv. Lorentzových sil ve výpočetním objemu. V druhé polovině téhož roku vznikly první výsledky v rámci laminárního proudění v uzavřené nádobě jako důsledek vlivu magnetického rotujícího pole na vodivé tekutiny. Současně s tímto druhem výpočtu následovala i verifikace softwaru.

Většina výpočtů v oblasti turbulentního proudění započala zhruba ve druhé polovině roku 2003 a pokračuje dodnes. V roce 2004 byly uskutečněny rozsáhlé výpočty podkritického a nadkritického proudění tekutin s vlivem rotujícího magnetického pole. Rovněž byly doprogramovány procedury pro vyhodnocování spekter a analýzu 3D vírových struktur.

V roce 2005 a 2006 pokračuje vývoj softwaru a to především v oblasti implementace různých typů okrajových podmínek. V této době je úspěšně testována verze programu umožňující zahrnout otevřené okrajové podmínky "outflow". Rovněž je dokončena část programu, umožňující výpočet proudění pod vlivem translačního magnetického pole. V této části programu je možné rozložení magnetických sil získat jednak z analytického vztahu pro translační magnetické pole anebo výpočtem Ohmovy rovnice a následného stanovení časově středované hodnoty průběhu Lorentzových sil v jakékoliv geometrii. Výsledky programu byly publikovány v literatuře [36].

Další výsledky pomocí výpočetního programu NS-FEM3D byly publikovány na mezinárodních konferencích [44], v odborných článcích [42] nebo v odborných knihách [43], [45] a [35].

4.2 Motivace k programování NS-FEM3D

Vývoj výpočetního programu je z hlediska znalostí, zkušeností a z časového pohledu velmi náročný proces. Nejde jen o samotné vytvoření výpočetního programu, ale rovněž o jeho další testování a zkoušení. Během ladění programu může vzniknout celá řada problémů od chyb v programování až po nevhodné nebo dokonce chybné použití matematických rovnic. Některé chyby lze odhalit už při ladění programu, jiné se projeví krátce během chodu programu. Nejhorší možné chyby se ale projevují pomalu během výpočtů. Existují případy, kde nemusejí chyby přímo vést k chybě nebo nepřesnosti ve výsledcích, ale mohou se projevit tím, že sníží účinnost numerických postupů například iterace a následné zhoršení konvergence řešení. Přes všechna uvedená rizika je příprava vlastního výpočetního programu jedinečný krok k pochopení běhu výpočetních procesů a k získání kompletních znalostí o výpočetních postupech. Navíc je k dispozici vždy zdrojový kód výpočetního programu, který dovoluje další doplnění nových funkcí dle potřeby i později.

1. Numerické řešení přechodové resp. turbulentního režimu proudění vyvolané účinkem magnetického pole představuje typickou úlohu 3D proudění, které vyžaduje buď použití RANS modelů (postačí 2D řešení) a nebo DNS resp. LES. "Direct numerical simulation" DNS, nebo-li přímý výpočet proudění představuje nejpřesnější metodu řešení, která je však z pohledu realizace poměrně velmi časové i kapacitně náročná. To je dáno faktem, že proudění obsahuje velký rozsah časových a prostorových měřítek, která je nutné přímo počítat (DNS). Tato měřítkla kladou velké nároky na výpočetní síť, která tak musí být dostatečně jemná. Limitujícím faktorem je velikost Reynoldsova čísla, které mimo jiné říká, že čím vyšší je hodnota Reynoldsova čísla, tím dominantnější podíl na proudění hrají malé struktury. Tyto relativně malé struktury pak vyžadují velmi jemnou síť k jejich přímému výpočtu. Tím je dán vztah mezi velikostí Reynoldsova čísla a praktickým ještě smysluplným použitím DNS. Z tohoto závěru vyplývá praktický požadavek na výpočetní software. Jestliže bude turbulentní proudění vyšších hodnot Reynoldsových čísel, bude řešit pomocí DNS a pak je zapotřebí disponovat velmi jemnou sítí a to z praktického hlediska znamená velké množství elementů resp. výpočetních uzlů.
2. Výpočetní program musí být navržen tak, aby i do budoucna umožňoval řešit libovolný problém z hlediska tvaru výpočetní oblasti resp. složitost tvaru výpočetního prostoru by neměla být limitujícím faktorem. Tento fakt má významný vliv na způsob generování sítě resp. druhu sítě, která je použita k diskretizaci výpočetního prostoru.
3. Program by měl dále umožňovat snadnou změnu resp. možnost dodatečně přidávat

libovolné moduly, které by umožňovaly rozšířit možnost aplikace softwaru. Tímto je možné např. v budoucnu zohlednit i další typy magnetických polí nebo eventuálně doplnit výpočetní kód o energetickou rovnici, která by následně umožnila řešit vzniklý problém jako neizotermní proudění (odvod tepla před krystalizací materiálu).

Tyto popsané požadavky výrazně ovlivňují rozhodnutí v tom smyslu, že vývoj vlastního softwaru je upřednostněn. Ke splnění bodu 1 musí být kód navržen pro 3D proudění, který efektivně bude umožňovat výpočet na velmi jemné síti. To v konečném důsledku ovlivní volbu iterační metody pro řešení Navier-Stokesových rovnice a také eventuální možnost paralelního výpočtu. Právě paralelní běh umožňuje efektivně využít velké výpočetní stanice, které nabízejí velký počet procesorů a jim adekvátní množství výpočetní paměti. Paralelní běh programu také zásadně komplikuje vývoj softwaru a to i z hlediska eventuální pozdější verifikace programu. V případě bodu 2. je řešením nestrukturovaná síť daná tetrahedrálními elementy. Právě tetrahedrální elementy umožňují generovat snadněji výpočetní síť i pro velmi složité tvary výpočetní oblasti. Třetí podmínka je snadno splnitelná v případě, že je k dispozici tzv. zdrojový kód programu, který umožňuje libovolný zásah do programu. Tyto zde zmíněné charakteristické body jsou zároveň motivací pro vlastnoručně navržený program, který by všechny uvedené požadavky splnil.

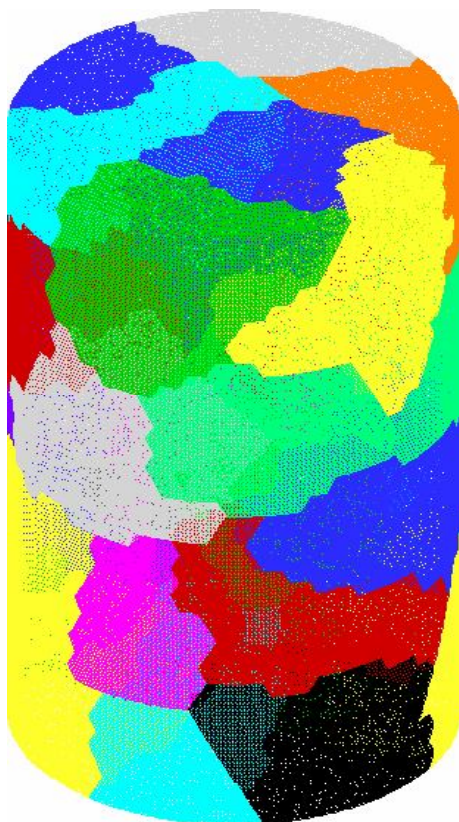
4.3 Paralelní výpočet

Numerický model byl implementován na tzv. knihovnu modulů "Multigrid library". MG knihovna obsahuje funkce a moduly, které umožňují práci se sítí. Tato knihovna vznikla pro překladač Fortran 90/95 a využívá MPI (Message Passing Interface) rozhraní pro komunikaci. Na tomto základě stojí vytvořený výpočetní kód využitelný pro aplikaci v oblasti nestlačitelného vazkého proudění. Než je vůbec možné paralelní výpočetní kód prakticky použít pro simulaci proudění, je nutné provést verifikaci programu.

K paralelnímu běhu programu se použil volně dostupný program MPI nebo MPICH, který je možné zdarma stáhnout a použít pro komunikaci mezi procesory nebo jádry procesoru výpočetní stanice. K dispozici jsou buď volné licence (program zdarma) anebo je možné použít komerční verze, které bývají zpravidla i odladěny pro kompilátory. Program MPI bude zajišťovat komunikaci mezi procesory (jádry) v případě paralelního běhu, bude tedy zajišťovat výměnu dat a ovládat běh jednotlivých částí výpočtu. Při startu výpočtu úlohy nejprve "0" procesor (jádro) provede redistribuci výpočetní sítě pomocí dalšího programu METIS. Tato redistribuce musí zajistit rovnoměrné rozložení výpočetní sítě (musí tvořit spojitou oblast) pro

jednotlivé procesory. V případě, že by rozdělení sítě a následné přidělení částí výpočetní sítě jednotlivým procesorům nebylo rovnoměrné, dostaví se nerovnováha, kdy některé procesory mají přiděleno více elementů (uzlů) než jiné. Tím by došlo ke zpomalení výpočtu a snížení účinnosti paralelního běhu. Tato skutečnost se vždy testuje. Později budou ukázány konkrétní případy testování účinnosti paralelního běhu.

Verifikace výpočetního programu se sestává ze dvou základních částí. V první části je testován výpočetní kód z hlediska paralelního běhu. Ve stručnosti je zde vyjádřeno, zda-li výpočetní kód řeší daný problém nejen správně z hlediska výsledků, ale také dostatečně efektivně. Na tuto otázku odpoví tato kapitola. Druhá část verifikace se skládá z numerické simulace jednoduchých úloh a právě na základě konkrétních výsledků je možné usuzovat na schopnosti výpočetního programu. Této problematice se věnuje též následující kapitola.



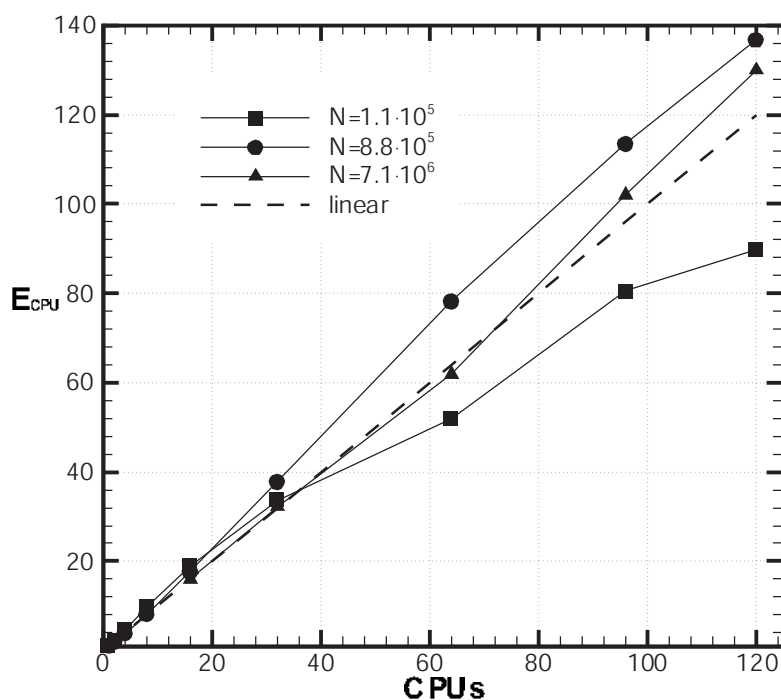
Obrázek 4.1: Barevné označení výpočetní oblasti jednotlivých procesorů. Celkový počet použitých procesorů je 32.

Na obrázku 4.1 je znázorněno rozdělení výpočetní sítě v rámci paralelního výpočtu. Každá barva tak znázorňuje výpočetní oblast pro jednotlivé procesory, které daný problém

zpracovávají. Celkem je výpočetní oblast rozdělena do 32 procesorů.

$$\text{Efektivnost}(E_{\text{CPU}}) = \frac{\text{vypocetni cas jednoho procesoru}}{\text{celkovy vypocetni cas} * \text{pocet procesoru}} * \text{pocet procesoru} \quad (4.1)$$

Víceprocesorový výpočet nemusí být vždy efektivnější, než je výpočet realizovaný jedním procesorem. K tomuto účelu je možné uskutečnit jednoduchý test, kdy identický problém je řešen různým počtem procesorů. Pak je možné tento testovací výpočet vyhodnotit a získat tak informace ohledně paralelní efektivnosti (4.1) resp. účinnosti výpočtu viz graf 4.2.



Obrázek 4.2: Efektivnost paralelního výpočtu vyhodnocena pro různou hustotu výpočetní sítě.

Podobný test byl také uskutečněn pro jednoduchý výpočet magneticky indukovaného proudění v nekonečné geometrii (nekonečnou geometrii se samozřejmě myslí konečný výpočetní prostor). Test byl uskutečněn pro 1, 4, 8, 16, 32, 64, 96, 120 procesorů. Graf 4.2 znázorňuje efektivnost výpočtu pro případy různě husté sítě definované počtem výpočetních

uzlů ($N=1 \times 10^5, 8.8 \times 10^5$ a 7.1×10^6). Na horizontální ose je zaznamenán skutečný počet použitých procesorů a na vertikální ose je příslušná efektivnost paralelního výpočtu v závislosti na počtu procesorů. Na grafu 4.2 je možné pozorovat tzv. "super speed up efekt". Tento efekt je do jisté míry výsledkem využití „cache“ paměti. Teoreticky lze totiž identifikovat oblast, kde vytvořený výpočetní software obsahuje určitou oblast počtu použitých procesorů, které poskytují maximální výkon. Tento fakt není ve skutečnosti nikterak neobvyklý. Podobným problémem se zabývali např. BAGGAG, ATKINS a KEYES [2]. V této publikované práci je možné nalézt detailní pohledy na problematiku paralelního výpočtu ve vztahu k „cache“ efektu u paralelních výpočtů. Jinou, ale velmi obdobnou prací je publikace PARIKH [58]. Jeho práce zahrnuje testování výpočetního kódu pro nestrukturovanou síť. I tento autor zmiňuje výsledky tzv. „super critical speed up efektu“ jako vedlejší produkt „cache“ účinku. Test, který byl uskutečněn v rámci testování vlastního výpočetního programu i s eventuálním vysvětlením byl publikován v [31]. V této literatuře je možné nalézt i více informací k dotyčné problematice.

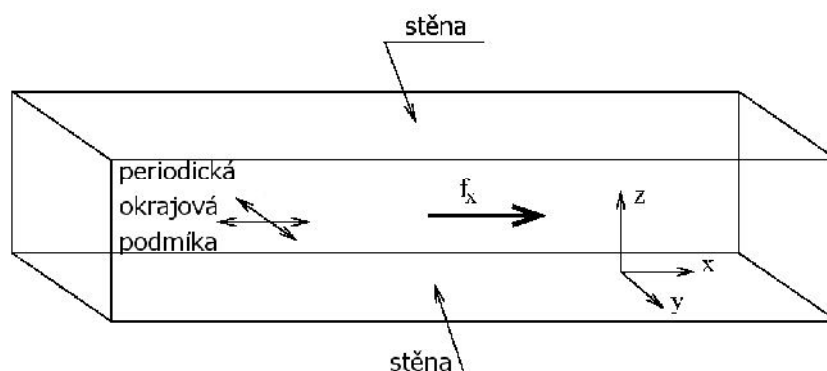
4.4 Verifikace programu NS-FEM3D

Poté, co je matematický model implementován do výpočetního programu, je možné přistoupit k verifikaci výpočetního softwaru. Předpokládá se, že tzv. hrubé chyby byly již odstraněny a následná verifikace si klade za cíl numericky identifikovat schopnosti vzniklého programu obzvláště z hlediska možné dosahované přesnosti. K testům je nutné ještě poznamenat, že výpočetní kód může dosahovat různé přesnosti v závislosti na použití výpočetní sítě, resp. druhu sítě. Proto je účelné provést jednoduchý test nejen pro strukturovanou, ale také pro nestrukturovanou síť.

Základem testu je porovnání numerického výsledku s tzv. známým přesným řešením. Právě otázka znalosti přesného řešení omezuje možnosti testu pouze na určité geometricky jednoduché úlohy. Prokáže-li verifikace programu očekávané vlastnosti výpočetního kódu, je možné, výpočetní software použít na skutečný a většinou mnohem komplikovanější problém.

4.4.1 Poiseuillovo proudění

Jedním z uskutečněných testů je viskózní nestlačitelné proudění v kanálu. Kanál představuje jednoduchou geometrii danou dvěma stěnami (Dirichletova okrajová podmínka) a periodickou podmínkou. Hnací síla reprezentuje externí účinek síly f_x působící ve směru x . Geometrický tvar včetně vyznačeného účinku sil je znázorněna na obrázku 4.3.



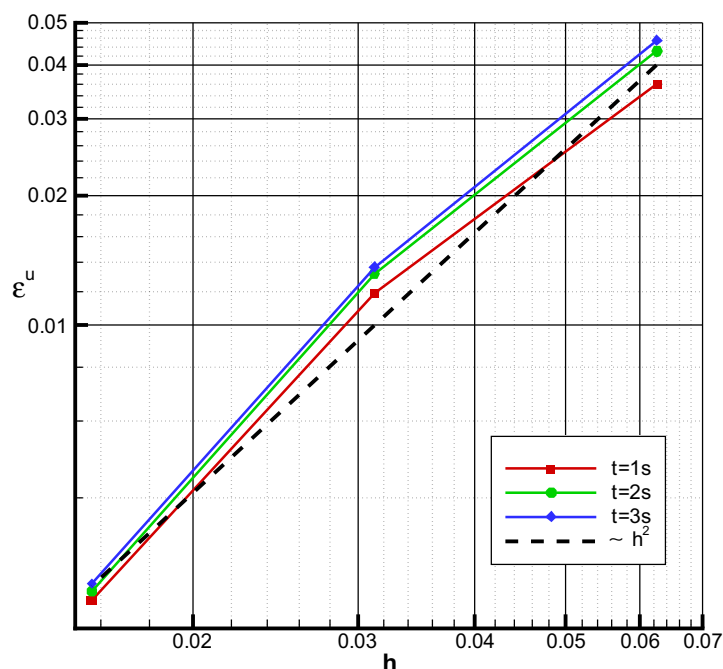
Obrázek 4.3: Znáznornění podoby kanálu s vyznačeným účinkem externích sil vyvolávajících proudění tekutiny.

Výhodou tohoto testu je znalost přesných výsledků pro případ stacionárního, tak i nestacionárního proudění. Během výpočtu je stanovena tzv. relativní chyba, jejíž přesná definice je dána vztahem (4.2).

$$\varepsilon^{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\infty, \Omega}^h}{\|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}^h} \quad (4.2)$$

Proměnná $\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}_h$ představuje přesné resp. numericky řešené rychlostní pole. Výpočet probíhá tak dlouho, dokud se nedosáhne ustáleného stacionárního stavu. Tento stav lze velmi jednoduše identifikovat, neboť nedochází již ke změně relativní chyby, která se tak stává konstantní. Na grafu 4.5 je zobrazen časový vývoj relativní chyby, řešení pro síť S1, S2 až S3. Označení S zastupuje strukturovanou síť a číselné označení pak naznačuje, že čím větší hodnota, tím jemnější síť je použita k výpočtu. Jak je patrné z grafu 4.5, hodnota relativní chyby se snižuje až do určité hodnoty, kdy je dosaženo stacionárního výsledku a kdy již není možné relativní chybu dále redukovat. Tato hodnota relativní chyby je dána jemností výpočetní sítě. Čím jemnější síť je použita k výpočtu, tím menší je relativní chyba.

Na grafu 4.4 je znázorněna relativní chyba v závislosti na jemnosti použité výpočetní sítě. Jak je patrné z grafu 4.4, výpočet dosáhl přesnosti konvergence druhého řádu, což by odpovídalo použité metodě diskretizace. Jak je dále možné pozorovat, přesnost konvergence je vždy zhruba stejná pro oba typy uvažovaných sítí, avšak mírně kolísání je možné zaznamenat pro případ nestrukturované sítě, které může být vysvětleno zhoršenou kvalitou sítě. Tento jednoduchý test prokázal, že výpočetní program umožňuje dosáhnout druhého



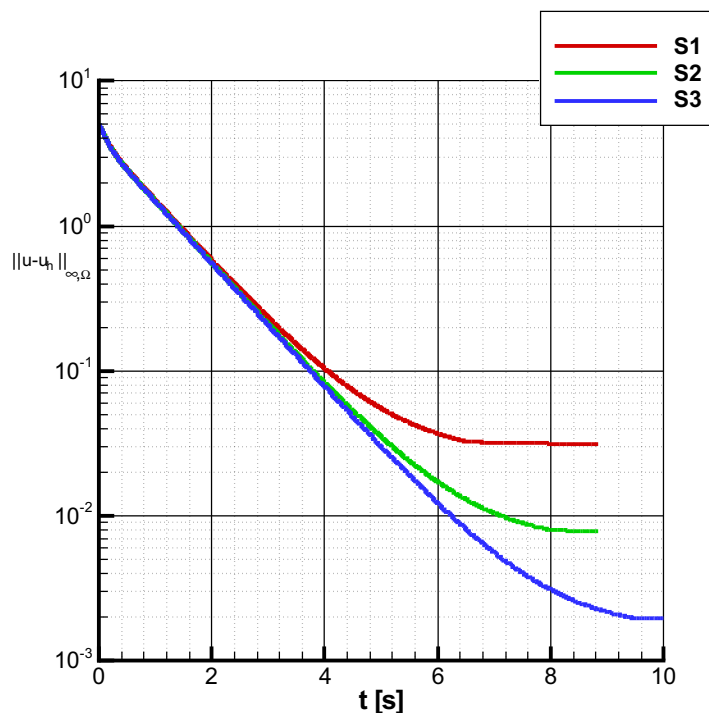
Obrázek 4.4: Vývoj relativní chyby v závislosti na jemnosti sítě pro případ stacionárního proudění v kanále.

řádu konvergence a to i pro nestrukturovanou síť. Více informací k dané problematice včetně popisu výpočetních sítí je možné nalézt v literatuře FRAŇA, STILLER a GRUNDMANN [40].

4.4.2 Proudění v dutině

Další testovacím příkladem, který byl použit pro verifikaci výpočetního programu, je proudění v dutině. Toto proudění může být považováno buď jako jednoduché 2D proudění anebo složitější 3D proudění. Z hlediska testování je výhodnější použít 2D úlohu, která je z hlediska výpočtu méně náročná a lépe tak vyhovuje testování. Geometrie je dána pravidelným čtyřhranem s konstantní délkou hrany $\underline{a}$. Okrajové podmínky jsou dány Dirichletovou podmínkou na všech obvodových stěnách. Obrázek řešeného problému včetně znázornění okrajových podmínek je možné nalézt na obrázku 4.6 Charakter proudění je dán Reynoldsovým číslem vztaženým na velikost charakteristického rozměru $\underline{a}$.

V případě tohoto testu není sice známé přesné řešení, ale naopak existují velmi přesné numerické výsledky, které jsou většinou získány pomocí numerických metod vyššího řádu.

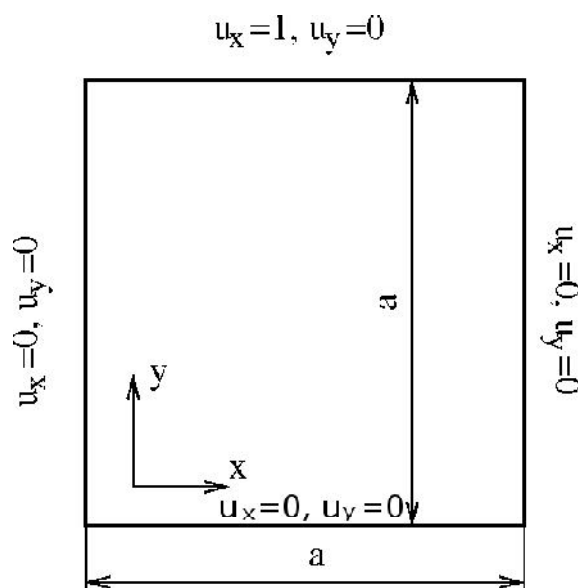


Obrázek 4.5: Časový průběh relativní chyby vyjádřené na strukturované síti různé hustoty. Případ představuje jednoduché laminární proudění v kanálu.

Jako příklad lze uvést práci autorů T.GHIA, U.GHIA a C.T.SHI [75], kteří prezentovali výsledky pro případ proudění v dutině definované $Re=1000$. V rámci testování programu bylo uskutečněno několik výpočtů pro různé hodnoty Reynoldsova čísla ($Re=10, 100$ a 1000). Na obrázku 4.8 je možné vidět tlakové a rychlostní pole pro případ Reynoldsova čísla 1000 . Obecně se dá posoudit, že izočáry tlakového pole jsou relativně hladké a totéž lze říci také o rychlostním poli. Dále je možné konstatovat, že v blízkosti okrajových stěn se neobjevuje žádná oscilace, která by jinak napovídala eventuálnímu nestabilnímu průběhu výpočtu. Více informací ohledně uskutečněných testů včetně kvalitativního zhodnocení je možné nalézt v publikaci FRAŇA, STILLER a GRUNDMANN [40].

4.4.3 Rotující magnetické pole v nádobě nekonečné výšky

Poslední test, který zde bude uveden, je verifikace programu na základě známých výsledků v případě magneticky vyvolaného proudění v nádobě s nekonečnou výškou. Tento test je založen na studii, kterou uskutečnil MOFFATT [19]. MOFFATT jako první autor odvodil analytický



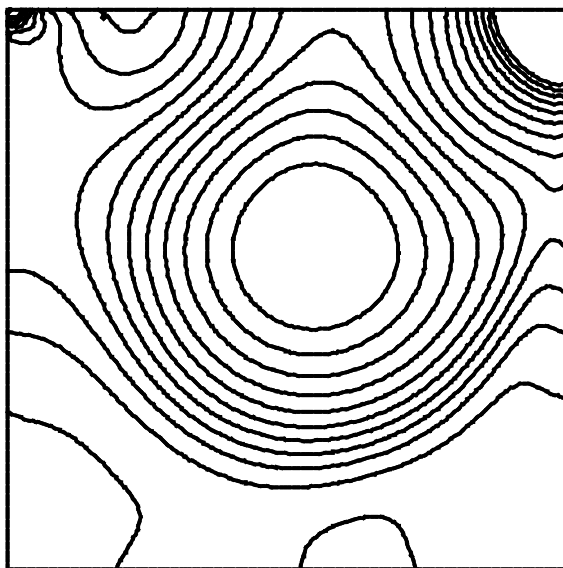
Obrázek 4.6: Schéma výpočetní oblasti pro proudění v dutině, popis okrajových podmínek testovací úlohy (jednoduchá 2D úloha).

vztah pro rychlostní pole v případě nekonečné výšky válcové nádoby s vodivou tekutinou uvnitř, na kterou působí účinky rotujícího magnetického pole, které je definováno magnetickou indukcí B a úhlovou rychlostí magnetické pole ω . Na obvodových stěnách se předpokládá Dirichletova okrajová podmínka, na koncových stěnách pak periodická okrajová podmínka. Popis geometrického tvaru včetně uspořádání okrajových podmínek a účinku magnetické pole je dána na obrázku 4.9.

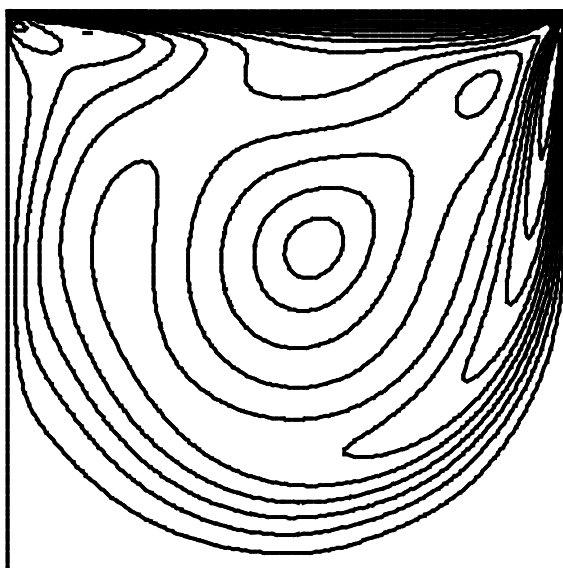
Tyto analytické výsledky jsou platné pouze pro případ Stokesovo proudění (malé hodnoty Reynoldsových čísel). Jestliže je tudíž možné stanovit rychlostní profil pro libovolnou hodnotu Taylorova čísla, pak je možné porovnat výsledky numerického řešení s výsledky analytickými. Numerický test zahrnuje válcovou nádobu malé výšky s definovaným poloměrem R (resp. průměrem D).

Test je uskutečněn na stejné geometrii, ale na různě jemné rovnoměrně nestrukturované síti. Síť je dána průměrnou hodnotou velikosti hrany elementu h . Maximální chyba je vyjádřena jako maximální relativní chyba, jejíž definice je dána vztahem (4.2).

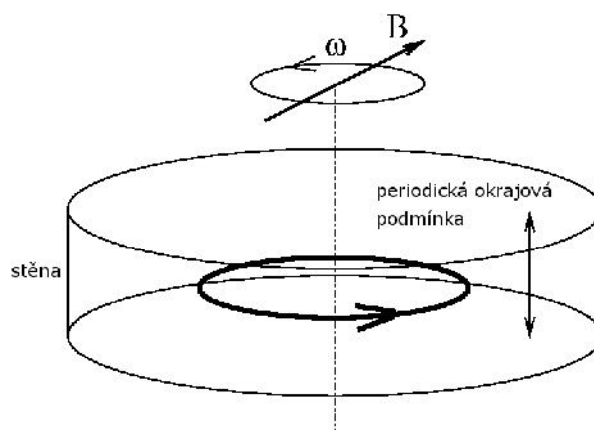
Na grafu 4.10 je znázorněn vývoj relativní chyby v závislosti na velikosti sítě. Plná čára znázorňuje přesnost druhého řádu, zatímco jednotlivé body pak příslušnou hodnotu relativní chyby. Velikosti sítě jsou dány hodnotou h ($R/5, R/10, R/20, R/30, R/40, R/60$ a $R/80$). Jak



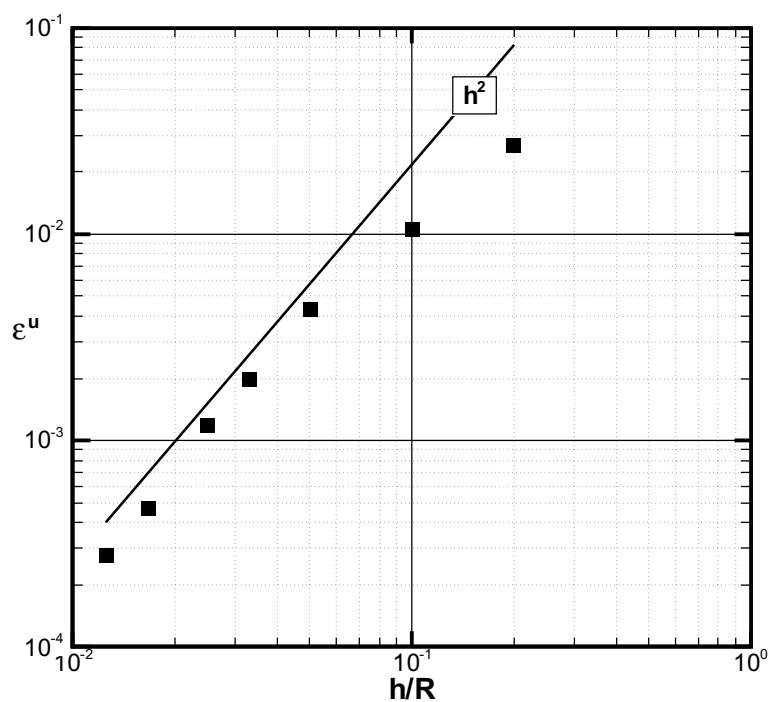
Obrázek 4.7: Tlakové pole proudění v dutině pro případ $Re=1000$.



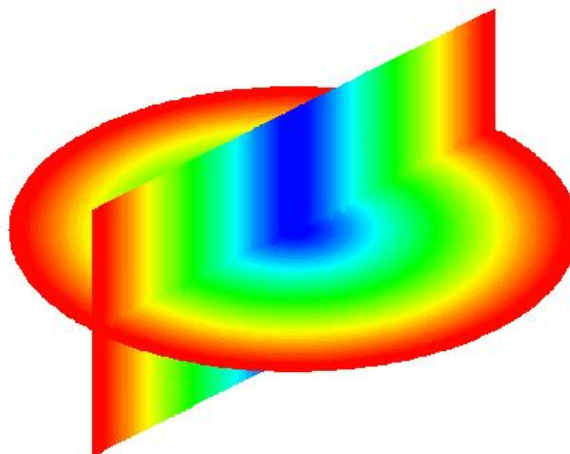
Obrázek 4.8: Rychlostní pole proudění v dutině pro případ $Re=1000$.



Obrázek 4.9: Znázornění tvaru válcové nádoby nekonečné výšky spolu s vyznačeným působením rotujícího magnetického pole.



Obrázek 4.10: Vývoje relativní chyby v závislosti na velikosti sítě pro případ laminárního proudění ve válcové nádobě nekonečné výšky.



Obrázek 4.11: Rozložení Lorentzových sil u válcové nádoby nekonečné výšky.

je patrné z obrázku 4.10, vývoj přesnosti koresponduje s přesností druhého řádu. Pouze v případě velmi hrubé sítě h ($R/5$ a $R/10$) je patrná odchylka od přesnosti druhého řádu. Tato odchylka je dána již příliš hrubou sítí, která nedokáže dobře vyplnit válcový tvar, resp. namísto kruhového tvaru je tak možné již pozorovat zřetelné hrany, které mění kruhový tvar na mnohostěn.

4.5 Struktura výpočetního programu NS-FEM3D

Samotný výpočetní program zajišťuje výpočet veličin jako rychlost, tlak, turbulentní vlastnosti proudu apod. Výpočetní program se skládá z modulů, které obsahují výpočetní kódy pro konkrétní úlohu. Například výpočet rozložení externích sil v důsledku působení magnetického pole je obsažen v samostatném modulu.

```
module Compute_Controlle

  use MG_Kinds, only: RNP
  use MG_GridPartition
  use MG_Grid_Geometry, only: CellGeometry
  use MG_Shared_Node_Operations
  use Vector_Algebra_3d
  use MPI
```

```

    use Matrix_Divergence_Correction
    use MG_Matrix
    use Matrix_Parameters

    implicit none
    private

    public :: Residual_continuity_equation
    public :: Residual_correction_velocity
    public :: impuls

contains
!-----
subroutine Residual_continuity_equation(grid)
    type(GridPartition), intent(inout)      :: grid
!.....
!   type(GridCell), pointer :: cell(:)
!   type(GridNode), pointer :: node(:)

    real(RNP), dimension(size(grid%node)) :: ra, ram
!   real(RNP) :: grad_phi1(3), grad_phi2(3), grad_phi3(3), grad_phi4(3)
!   real(RNP) :: vol
    real(RNP), dimension(size(grid%node)) :: m
    real(RNP) :: r_max_r, max_r=1E-15
    real(RNP), dimension(3,2,size(grid%edge)) :: Ae
    real(RNP), dimension(3,size(grid%node)) :: An
!.....
    real(RNP),dimension(size(grid%node)) :: R
    real(RNP),dimension(size(grid%cell)) :: Re

    type(GridCell),    pointer :: cell(:)
    type(GridNode),    pointer :: node(:)
    type(GridEdge),    pointer :: edge(:)
    type(BoundaryGrid), pointer :: boundary(:)

```

```

real(RNP), dimension(:,:), pointer :: u

type(BoundaryFace) :: bface
type(BoundaryNode) :: bnode(3)

integer, pointer    :: n3D(:)

!.....
real(RNP),dimension(3)  :: grad_phi1, grad_phi2, grad_phi3, grad_phi4
real(RNP),dimension(3)  :: en, um
real(RNP)               :: vol, area
real(RNP)               :: half = 0.50_RNP, zero = 0.00_RNP
real(RNP)               :: value, max_norm
real(RNP)               :: norm1, norm1v, norm2, norm2v,
real(RNP)               :: norminfinity, norminfinityv
real(RNP)               :: gnorm1v, gnorm2v

integer :: n1, n2, n3, n4, ns4
integer :: nb1, nb2, nb3
integer :: i, j, l
!.....
cell    => grid%cell
node    => grid%node
edge    => grid%edge
boundary => grid%boundary

u    => grid%var(1:3,:)
!.....
R = 0

ra = 0
m = 0
Ae = 0
An = 0
!.....
call MA(grid,Ae,An)

```

```

!.....
  cell => grid%cell
  node => grid%node
!.....

do l=1, size(cell)
  n1 = cell(l)%n(1)
  n2 = cell(l)%n(2)
  n3 = cell(l)%n(3)
  n4 = cell(l)%n(4)

  call CellGeometry(node(n1)%x, node(n2)%x, node(n3)%x, node(n4)%x, &
                    grad_phi1, grad_phi2, grad_phi3, grad_phi4, vol)

  m(n1) = m(n1) + 0.25_RNP * vol
  m(n2) = m(n2) + 0.25_RNP * vol
  m(n3) = m(n3) + 0.25_RNP * vol
  m(n4) = m(n4) + 0.25_RNP * vol

end do
!.....

call SharedNodeValues(m, grid%shared, operation=summation)
!.....

do i = 1, size(node)
  ra(i) = (An(:,i).o.u(:,i))
end do

do l=1, size(grid%edge)
  n1 = grid%edge(l)%n(1)
  n2 = grid%edge(l)%n(2)
  ra(n1) = ra(n1) + (Ae(:,1,l).o.u(:,n2))
  ra(n2) = ra(n2) + (Ae(:,2,l).o.u(:,n1))

```

```

end do

call SharedNodeValues(ra, grid%shared, operation=summation )

norm1  = 0
norm1v = 0
norm2v = 0
norm2  = 0
do i=1, size(node)
    ram(i)=ra(i)/m(i)
    norm1v = norm1v + abs(ra(i))
!    norm1  = norm1  + abs(ra(i))/m(i)
    norm2v = norm2v + ra(i)**2
!    norm2  = norm2  + (ra(i)/m(i))**2
end do

norm2v = sqrt(norm2v)
! norm2  = sqrt(norm2)

call MPI_AllREDUCE( sendbuf=norm2v, recvbuf=gnorm2v, op=MPI_SUM)
call MPI_AllREDUCE( sendbuf=norm1v, recvbuf=gnorm1v, op=MPI_SUM)

max_r = 0
if (size(ra) > 0) r_max_r = maxval(ra)
call MPI_ALLREDUCE(sendbuf=r_max_r, recvbuf=norminfinityv, op=MPI_MAX)

if (mypid == 0) then
print*, ' 1-norm of nabla*u    [hg1]:', gnorm1v
print*, ' 2-norm of nabla*u    [hg3]:', gnorm2v
print*, ' inf-norm of nabla*u   [hg5]:', norminfinityv
print*, '-----'
endif

call flush()

end subroutine Residual_continuity_equation

```

```

!-----
!-----
subroutine Residual_correction_velocity(grid, u, v, p )
  type(GridPartition), intent(inout)    :: grid
  real(RNP), dimension(:,:), intent(in) :: u, v
  real(RNP), dimension(:),   intent(in) :: p

!.....
  type(GridCell), pointer :: cell(:)
  type(GridNode), pointer :: node(:)
  real(RNP) :: grad_phi1(3), grad_phi2(3), grad_phi3(3), grad_phi4(3)
  real(RNP) :: vol
  integer   :: n1, n2, n3, n4, l, j, i
  real(RNP) :: r_max_r, max_r

  real(RNP), dimension(3,size(grid%node)) :: r
  real(RNP), dimension(size(grid%node))   :: m
  real(RNP), dimension(3,2,size(grid%edge)) :: Ae
  real(RNP), dimension(3,size(grid%node))   :: An

!.....
  r = 0
  m = 0

!.....
  call MA(grid,Ae, An)

!.....
  cell => grid%cell
  node => grid%node

!.....
  do l=1, size(cell)
    n1 = cell(l)%n(1)
    n2 = cell(l)%n(2)
    n3 = cell(l)%n(3)
    n4 = cell(l)%n(4)

    call CellGeometry(node(n1)%x, node(n2)%x, node(n3)%x, node(n4)%x, &

```

```

                                grad_phi1, grad_phi2, grad_phi3, grad_phi4, vol)

    m(n1) = m(n1) + 0.25_RNP * vol
    m(n2) = m(n2) + 0.25_RNP * vol
    m(n3) = m(n3) + 0.25_RNP * vol
    m(n4) = m(n4) + 0.25_RNP * vol

end do

!.....

call SharedNodeValues(m, grid%shared, operation=summation)

do i=1, size(node)
    r(:,i)= An(:,i) * p(i)
end do

do l=1, size(grid%edge)
    n1 = grid%edge(l)%n(1)
    n2 = grid%edge(l)%n(2)
    r(:,n1) = r(:,n1) + (Ae(:,1,l) * p(n2))
    r(:,n2) = r(:,n2) + (Ae(:,2,l) * p(n1))
end do

call SharedNodeValues(r, grid%shared, operation=summation )

do j=1, size(node)
    r(:,j) = m(j) * u(:,j) - m(j) * v(:,j) + r(:,j)
end do

max_r = 0
if (size(r) > 0) r_max_r = maxval(r)
call MPI_ALLREDUCE(sendbuf=r_max_r, recvbuf=max_r, op=MPI_MAX)

```

```

        print*, '    Residual [ u - v + grad_psi ]          r =:',max_r

end subroutine Residual_correction_velocity

!-----
function impuls(grid,u,rho,R0,H0) result(ri_all)
    type(GridPartition), intent(inout)    :: grid
    real(RNP), dimension(:,:), intent(in) :: u
    real(RNP), intent(in)                 :: rho, R0, H0
!.....
    type(GridCell),      pointer :: cell(:)
    type(GridNode),      pointer :: node(:)

    real(RNP), dimension(size(grid%cell)) :: J
!.....
    integer    :: i
    integer    :: n1, n2, n3, n4
    real(RNP)  :: vol, value, ri, V, ru, ri_all
    real(RNP)  :: r1, r2, r3, r4
    real(RNP)  :: uth1, uth2, uth3, uth4
!.....
    cell      => grid%cell
    node      => grid%node
!.....
    ri = 0
!.....

    do i=1, size(cell)
        n1 = cell(i)%n(1)
        n2 = cell(i)%n(2)
        n3 = cell(i)%n(3)
        n4 = cell(i)%n(4)

        call CellGeometry(node(n1)%x, node(n2)%x, node(n3)%x, node(n4)%x, &
                           vol=vol )
    end do
end function impuls

```



```

r1 = sqrt(node(n1)%x(1)**2+node(n1)%x(2)**2)
r2 = sqrt(node(n2)%x(1)**2+node(n2)%x(2)**2)
r3 = sqrt(node(n3)%x(1)**2+node(n3)%x(2)**2)
r4 = sqrt(node(n4)%x(1)**2+node(n4)%x(2)**2)

uth1 = (node(n1)%x(1) * u(2,n1) - node(n1)%x(2) * u(1,n1))/r1
uth2 = (node(n2)%x(1) * u(2,n2) - node(n2)%x(2) * u(1,n2))/r2
uth3 = (node(n3)%x(1) * u(2,n3) - node(n3)%x(2) * u(1,n3))/r3
uth4 = (node(n4)%x(1) * u(2,n4) - node(n4)%x(2) * u(1,n4))/r4

ru = (r1 * uth1 + r2 * uth2 + r3 * uth3 + r4 * uth4) / 4

J(i) = vol * ru

end do

! Make sum:

do i=1, size(cell)
    ri = ri + J(i)
end do

call MPI_ALLREDUCE(sendbuf=ri, recvbuf=ri_all, op=MPI_SUM)

end function impuls
!-----
end module Compute_Controle

```

Během kompilace výpočetního kódu je tak možné dodatečně rozhodnout o použití jednotlivých modulů. Důležitým místem je rozhraní hlavního programu, které umožňuje v určitém formátu získávání hodnot veličin, popřípadě jejich další předávání do hlavního programu. Toto je krok, který zajišťuje možnost dalšího rozšiřování výpočetního programu.

V některých případech je nutné některé výsledky dopočítat až po ukončení výpočtů. Tímto způsobem byly řešeny například spektra, které vyžadují ustálené časově zprůměrované

hodnoty již na počátku výpočtu. Ve skutečnosti jsou časově zprůměrované hodnoty počítány postupně a na začátku výpočtu rozhodně k dispozici nejsou. Proto se v tomto případě ukládají již od počátku například složky rychlosti pro určitý bod a po ukončení výpočtu se provede dodatečný výpočet vlnových a frekvenčních spekter.

Zdrojový kód v programu FORTRAN 90/95 popisuje část modulu implementovaného přímo do výpočetního programu NS-FEM3D. Tento modul zajišťuje načtení souřadnic bodu, pro který dále ukládá výpočetní program během výpočtu hodnoty veličin jako okamžitá rychlost, tlak apod. Uložená data do souboru jsou seříděna dle časové posloupnosti. Tím jsou při známém časovém kroku k dispozici pro časovou analýzu. Stejně tak je možné postupovat v případě výpočetní sítě, kdy jednotlivé body jsou uloženy s pravidelným délkovým krokem. Následně je ukázka výstupu jednoho časového kroku respektive tisk důležitých informací během výpočtu.

maximal and minimal value for PSPG stabilization: 5.000E-01 4.991E-01

Pressure potential: CG

Press. pot. is converged at step: 5

Rot. Impuls: 3.92386207536616946E-11

max|u(n+1)-u(n)|/max|u(n+)| 1.85690635222519451E-3

Step: 2 t= 3.9196434E+02s dt= 4.453E-02s

	psi	p	u	el. phi	j	fL	vis.
Res.:	4.82E-16	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0	0
Res.:	3.19E-16	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0	0
Max.Val.:	2.25E-09	0.00E+00	3.03E-04	0.00E+00	0.00E+00	1.36E-02	3.40E-07
Min.Val.:	-2.96E-09	0.00E+00	-3.03E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.40E-07

Time per step: 9.8860013E-01 Total time: 2.1479001E+00

Jedním z důležitých výsledků jsou průběhy hodnot residua během výpočtu rychlostního pole nebo tlakového potenciálu. Hodnoty se tisknout během každého časového kroku výpočtu. V programu se objevují funkce jako 'MPI ALLREDUCE', což je funkce používaná v rámci pomocného programu MPIRUN a používá se na sdílení informací o hodnotě mezi jednotlivými běžícími procesory. Proměnné jako „edge“, „cell“, „node“ a „boundary“ se vztahují

na hodnoty bodů sítě, elementy, okrajové podmínky a hrany. Všechny tyto údaje jsou téměř v každém modulu programu použity. Samotný výpočet probíhá pro každý jednotlivý bod.

Výsledky tištěné během výpočtu programu obsahují maximální a minimální hodnoty stabilizačního parametru Streamline-Upwind Petrov Galerkin stabilizace pro rychlostní pole a Pressure Stabilized Petrov Galerkin parametr pro tlakové pole resp. tlakový potenciál. Jedná se o výpočet lokálního charakteru a dle stavu proudění a kvality sítě se tyto parametry mění. Pro tlakový potenciál byla použita Jacobiho metoda iterace. Výpočet je realizován pomocí turbulentního jednorovnicového modelu Spalart-Allmaras. Během výpočtu jsou udávány hodnoty rozmezí modifikované turbulentní vírové viskozity. Dále ve výstupu se tiskne velikost nestacionárního proudění resp. změny rychlostního pole v čase. Další informace jsou o dosažených reziduích u tlakového potenciálu, rychlostního pole, elektrického pole. Kromě residuí se k daným veličinám ještě tisknou maximální a minimální hodnoty. V případě aktivního výpočtu magnetického pole je možné vidět hodnoty indukovaného proudu nebo velikosti externích Lorentzových sil. Poslední informace tištěné za každý časový krok je velikost časového kroku a pak celkový výpočetní čas počítaný od začátku výpočtu. Tyto udávané informace z každého časového kroku umožňují sledovat výpočet, konvergenci řešení a vývoj určujících veličin během výpočtu.

4.6 Post-processing - identifikace struktur

Pomocí dodatečných programů byly počítány první derivace rychlostních polí z okamžitých a časově zprůměrovaných hodnot. Na obrázku 4.12 je ukázka vizualizace vírů Taylor-Görtlerova typu, které vznikají v proudění generovaném rotujícím magnetickým polem. Dvě různé barvy označují opačnou orientaci jejich rotačního pohybu.

```
#####
!#
!# Post-processing for program Projection, release 1.0
!#
#####

program PostProjection

    use MG_Kinds, only: RNP
    use MG_GridPartition
```

```
use MG_Load_GridPartition
use MG_Save_GridPartition
use MG_Export_Tecplot
use MG_Adaption_Control
use MG_First_Derivatives
use MPI
use Vector_Algebra_3d
use MG_Rotational_Average

implicit none

! variables declaration .....

type(GridPartition), pointer :: grid(:) => null()
integer :: dim_b, dim_v, l_max
integer :: nvar, old_var

integer :: max_rp=1, max_nw=1

integer :: nr, nz, m, l, i

integer :: sample, samples

integer :: np, mypid
character(len = 10) :: char_mypid
character(len=1500) :: varnames
character(len=3) :: cnt

real(RNP) :: x0(3), x1(3), xr(3), r, zz, phi
integer :: trace=2

real(RNP), dimension(3,3) :: T, tauk, tauc

! input arguments
character(len=60) :: gridfile
```

```

! top level fields
real(RNP), dimension(:), pointer :: x, y, z
real(RNP), dimension(:), pointer :: p      ! approximate pressure
real(RNP), dimension(:), pointer :: psi    ! pressure potential
real(RNP), dimension(:,:), pointer :: f    ! force density
real(RNP), dimension(:,:), pointer :: u    ! computed fluid velocity
real(RNP), dimension(:), pointer :: nu_SA  ! SA viscosity
real(RNP), dimension(:), pointer :: nyc    ! total viscosity
real(RNP), dimension(:), pointer :: ep     ! electrical potential

real(RNP), dimension(:,:), pointer :: u_mean ! mean velocities
real(RNP), dimension(:,:), pointer :: uu_mean ! mean velocities
real(RNP), dimension(:,:), pointer :: uv_mean ! mean velocities

real(RNP), dimension(:,:), pointer :: du      ! first derivate
real(RNP), dimension(:,:), pointer :: du_mean ! first derivate

real(RNP), dimension(:), pointer :: dis      ! turbulent dissipation
real(RNP), dimension(:), pointer :: tp       ! turbulent production

real(RNP), dimension(:,:), pointer :: u_avg   ! averaged values
real(RNP), dimension(:,:), pointer :: uuc_avg ! averaged mean velocities
real(RNP), dimension(:,:), pointer :: uvc_avg ! averaged mean velocities

real(RNP), dimension(:,:), pointer :: new_var

! New variable for averaged-value
real(RNP), allocatable :: uu(:,:)
real(RNP), allocatable :: va(:,:,:), vauuc(:,:,:), vauvc(:,:,::)
real(RNP), allocatable :: va_avg(:,:,:), vauuc_avg(:,:,:), vauvc_avg(:,:,::)

call MPI_INIT()
call MPI_COMM_SIZE(size = np)
call MPI_COMM_RANK(rank = mypid)
write(char_mypid, '(I10)') mypid

```

```

char_mypid = adjustl(char_mypid)

! Read variables and control parameters.....

if (mypid == 0) then

  write(*,'(/,A)') '#####'
  write(*,'(A)') '# Post-processing #'
  write(*,'(A)') '# Release: 2.0 #'
  write(*,'(A)') '#####'

  write(*,'(/,A)') '1. file name '
  write(*,*) ' enter name of the grid file '; read *,gridfile

  write(*,'(/,A)') '2. additional informations about grid levels'
  write(*,*) ' enter limit for top level '; read *, l_max

  write(*,'(/,A)') '3. how many samples should I use?'
  write(*,*) ' number of samples '; read *, samples

end if

call MPI_BCAST(gridfile, root = 0)
call MPI_BCAST(l_max, root = 0)
call MPI_BCAST(samples, root = 0)

call AdaptionControl_Set(rp=max_rp, nw=max_nw, zonal=0)

!### Read grid with variables .....

do sample=1 , samples

  write(cnt,*) sample
  cnt=adjustl(cnt)
  if ((mypid==0).and.(trace>1)) print*, 'Reading ...',
    trim(gridfile)//trim(cnt)

```

```

call LoadMLGridPartition(grid, file=trim(gridfile)//trim(cnt))
dim_b = size(grid(1)%boundary)
old_var = size(grid(1)%var,1)
!   nvar= old_var + 20
    if (trace>1) print*, 'old_var:', old_var
nvar = old_var + 9
    if (mypid==0) print*, ' The number of varaibles must be changed!'
    do i=1, l_max
        allocate(new_var(nvar,size(grid(i)%node)))
        new_var(:, :) = 0
        new_var(1:size(grid(i)%var,1), :) = grid(i)%var
        deallocate(grid(i)%var)
        grid(i)%var => new_var
    end do

x      =>  grid(l_max)%node%x(1)
y      =>  grid(l_max)%node%x(2)
z      =>  grid(l_max)%node%x(3)
u      =>  grid(l_max)%var(1:3,:)
f      =>  grid(l_max)%var(4:6,:)
p      =>  grid(l_max)%var(7,:)
psi    =>  grid(l_max)%var(8,:)
nyc    =>  grid(l_max)%var(9,:)
ep     =>  grid(l_max)%var(10,:)

u_mean =>  grid(l_max)%var(11:13,:)

uu_mean =>  grid(l_max)%var(14:16,:)
uv_mean =>  grid(l_max)%var(17:19,:)

!   du      =>  grid(l_max)%var(20:28,:)      ! + 9 Var.
!   du_mean =>  grid(l_max)%var(29:37,:)      ! + 9 Var.

!   dis     =>  grid(l_max)%var(38,:)         ! + 1 Var.
!   tp      =>  grid(l_max)%var(39,:)         ! + 1 Var.

```

```

u_avg    =>  grid(l_max)%var(20:22,:)

uuc_avg  =>  grid(l_max)%var(23:25,:)
uvc_avg  =>  grid(l_max)%var(26:28,:)

du        =>  grid(l_max)%var(29:37,:)      ! + 9 Var.
du_mean  =>  grid(l_max)%var(28:46,:)      ! + 9 Var.

!-----
! + 38 new variables

! Allocation of the variables .....

!  varnames='u_x" "u_y" "u_z" "fl_x" "fl_y" "fl_z" "p" "psi" "vis" "ep"'

!  varnames='u_x" "u_y" "u_z" "fl_x" "fl_y" "fl_z" "p" "psi" "vis"
           "ep" "uavg_phi" "uavg_r" "uavg_z"'

varnames='u_x" "u_y" "u_z" "fl_x" "fl_y" "fl_z" "p" "psi" "vis"
           "ep" "<u>" "<v>" "<w>"'

varnames=trim(varnames)//trim(' "<uu>" "<vv>" "<ww>" "<uv>"
           "<vw>" "<wu>" "uavg_phi" "uavg_r" "uavg_z"'')

varnames=trim(varnames)//trim(' "<rr>-avg" "<phiphi>-avg"
           "<zz>-avg" "<rphi>-avg" "<phiz>-avg" "<rz>-avg"'')

varnames=trim(varnames)//trim(' "d2u2" "d3u2" "d1u3" "d2u3"
           "d3u3" "d1u1m" ')

varnames=trim(varnames)//trim(' "d2u1m" "d3u1m" "d1u2m" "d2u2m"
           "d3u2m" "d1u3m" "d2u3m" "d3u3m"'')

! Post-processing .....

! Determine the mean-averaged values of the velocities

```



```

if (sample==1) then
  if (mypid == 0) then
    write(*,'(A)') 'bottom axis point:      x0(1:3) = '; read *, x0
    write(*,'(A)') 'top axis point:         x1(1:3) = '; read *, x1
    write(*,'(A)') 'maximum radius point:   xr(1:3) = '; read *, xr
    write(*,'(A)') 'radial mesh intervals:   nr = '; read *, nr
    write(*,'(A)') 'axial mesh intervals:    nz = '; read *, nz
    write(*,'(A)') 'number of phi-planes:    m = '; read *, m
  end if
  call MPI_BCAST(x0, root=0)
  call MPI_BCAST(x1, root=0)
  call MPI_BCAST(xr, root=0)
  call MPI_BCAST(nr, root=0)
  call MPI_BCAST(nz, root=0)
  call MPI_BCAST(m , root=0)

  if ((mypid==0).and.(trace>1)) print*, 'Initialize of the new grid'
  call InitRotationalAverage(grid, x0, x1, xr, nr, nz, m)

  allocate(      va(3,0:nr,0:nz))
  allocate(    va_avg(3,0:nr,0:nz))
  allocate(      uu(3,size(grid(l_max)%node)))
  allocate(  vauuc_avg(3,0:nr,0:nz))
  allocate(  vauvc_avg(3,0:nr,0:nz))
  va_avg = 0
  vauuc_avg = 0
  vauvc_avg = 0
endif

! Transform K --> Cylindric: u_phi, u_r, u_z
do i=1, size(grid(l_max)%node)
  r = sqrt(x(i)**2+y(i)**2)
  uu(1,i)=(x(i)*u(2,i)-y(i)*u(1,i))/r
  uu(2,i)=(x(i)*u(1,i)+y(i)*u(2,i))/r

```

```

        uu(3,i)=u(3,i)
    enddo

! Transform K --> Cylindric: uu, vv, ww, uv, vw, wu
! Initialize transform matrix
do i=1, size(grid(l_max)%node)
    ! Initialize transform matrix
    r = sqrt(x(i)**2+y(i)**2)
    T(1,1) = x(i)/r; T(1,2) = y(i)/r; T(1,3) = 0
    T(2,1) = -y(i)/r; T(2,2) = x(i)/r; T(2,3) = 0
    T(3,1) = 0      ; T(3,2) = 0      ; T(3,3) = 1
    ! Initialize uu .. wu
    tauk(1,1) = uu_mean(1,i);tau(1,2) = uv_mean(1,i);tau(1,3) = uv_mean(3,i)
    tauk(2,1) = uv_mean(1,i);tau(2,2) = uu_mean(2,i);tau(2,3) = uv_mean(2,i)
    tauk(3,1) = uv_mean(3,i);tau(3,2) = uv_mean(2,i);tau(3,3) = uu_mean(3,i)
    ! Transform
    tauc(:, :) = Matmul(Matmul(T,tau(:, :)),Transpose(T))
    ! To back ...
    uuc_avg(1,i) = tauc(1,1);uuc_avg(2,i) = tauc(2,2);uuc_avg(3,i) = tauc(3,3)
    uvc_avg(1,i) = tauc(1,2);uvc_avg(2,i) = tauc(2,3);uvc_avg(3,i) = tauc(1,3)
enddo

if ((mypid==0).and.(trace>1)) then
    print*, 'max val <uphi>: ', maxval(uu(1,:))
    print*, 'max val <uuphi>:', maxval(uuc_avg(2,:)), ' should be:',
        maxval(uu(1,:))**2
endif

if ((mypid==0).and.(trace>0)) print*, 'compute averaged value ',sample,'x'
call ComputeRotationalAverage(grid(l_max), uu, va)
va_avg = va_avg+va
va = 0
call MPI_BARRIER()
call ComputeRotationalAverage(grid(l_max), uuc_avg, va)
vauuc_avg = vauuc_avg + va

```

```
va = 0
call MPI_BARRIER()
call ComputeRotationalAverage(grid(l_max), uvc_avg, va)
vauvc_avg = vauvc_avg + va

if (sample < samples) then
  do i=1, l_max
    call delete(grid(i))
  enddo
  deallocate(grid)
  grid => null()
endif

call MPI_BARRIER()

if (sample==samples) then
  va_avg = va_avg / samples
  vauuc_avg = vauuc_avg / samples
  vauvc_avg = vauvc_avg / samples
  call FinalizeRotationalAverage()
!   if (mypid == 0) then
!     call ExportAxisVarToTecplot(va_avg, file='averages0.plt')
!     call ExportAxisVarToTecplot(vauuc_avg, file='averagesuu.plt')
!     call ExportAxisVarToTecplot(vauvc_avg, file='averagesuv.plt')
!   end if
  call InterpolateAxisVarToGrid(grid(l_max), va_avg, u_avg )
  call InterpolateAxisVarToGrid(grid(l_max), vauuc_avg, uuc_avg )
  call InterpolateAxisVarToGrid(grid(l_max), vauvc_avg, uvc_avg )
  deallocate(va)
  deallocate(va_avg)
  deallocate(uu)
  deallocate(vauuc_avg)
  deallocate(vauvc_avg)
endif
```

```

enddo

! Cyndric --> K.
do i=1, size(grid(l_max)%node)
  r = sqrt(x(i)**2+y(i)**2)
  u_mean(1,i) = r * ( (u_avg(2,i)*x(i)/y(i)) - u_avg(1,i))/((x(i)**2/y(i))+y(i))
  u_mean(2,i) = ( r * u_avg(2,i) - x(i) * u_mean(1,i) ) / y(i)
  u_mean(3,i) = u_avg(3,i)
enddo

! Compute fluctuation part of the velocities

! Computation of the gradients .....

call ComputeFirstDerivatives(grid(l_max), u , du, ni=0)

call ComputeFirstDerivatives(grid(l_max), u_mean , du_mean, ni=0)

! Save results .....

call MPI_BARRIER()

call ExportTecplot(grid, file=trim(gridfile)//trim('-post'), &
                  varnames=varnames)

! shut down .....

call MPI_FINALIZE()

!-----
end program PostProjection

```

V rámci výpočetního programu NS-FEM3D se programovala i celá řada dalších dodatečných programů na hodnocení proudění. Jedním z programů je program POST, který se používal na výpočet časově zprůměrovaných hodnot proudění a dále na výpočet kompletního tenzoru napětí. Složky napětí se pak používaly dále na výpočet Q parametru, který se používá na vizualizaci vírových struktur. K jejich identifikaci se může použít jednoduchý způsob, kdy střed víru je rozpoznatelný pomocí poklesu tlaku. Je ale obecně známo, že v některých případech je tento postup nedostatečný. Q-kritérium nabízí mnohem sofistikovanější způsob identifikace existence a tvaru vírových struktur.



Obrázek 4.12: Ukázka vírových struktur identifikovaných pomocí kritéria Q v proudu tekutiny

Program "POST" vznikl na základě databáze výpočetního programu NS-FEM3D a slouží pro dodatečný výpočet složek tenzoru napětí a dále k výpočtu první derivace rychlostního pole v kartézských a cylindrických souřadnicích. Ke stanovení časově zprůměrovaných hodnot se průměrování provádí jednak v čase a dále v prostoru. S ohledem na geometrii lze předpokládat osovou symetrii i ve výpočtu. Eventuální nesymetrie proudění může být

vyvolána nesymetrickou tetrahedrální výpočetní sítí . Program POST je opět uzpůsoben paralelnímu běhu tj. umí zpracovávat všechny "partitions" ke stanovení všech n složek tenzoru napětí tj. okamžitých hodnot i časově zprůměrovaných hodnot.

Výstupem programu POST je n počet souboru odpovídající počtu použitých procesorů "partitions", přičemž data jsou uložena ve formátu umožňujícím okamžité načtení dat do vizualizačního programu TECPLOT . Tento program se používal na zpracování obrázků a k vizualizaci struktur.

4.7 Start výpočetního programu

Výpočetní program používá startovací textový soubor, ve kterém jsou v určitém očekávaném sledu postupně zadány určující řídicí parametry. Následně je prezentována ukázka typického startovacího textového souboru .

Jednotlivé parametry startovacího souboru jsou členěny do jednotlivých sekcí a označeny dále pomocí písmen abecedy. V každé sekci se zadává určitý počet parametrů. Konkrétní počet těchto parametrů se liší dle sekce a dle předchozího nastavení. Vyžadovaný počet zadávaných parametrů je uveden v závorce u každé sekce zadávaných parametrů.

a) výběr typu řešiče (1 parametr)

(0) základní řešič rovnic Navier-Stokes

(1) model Magnetohydrodynamiky

b) výběr turbulentního modelu (1 parametr)

(0) žádný turbulentní model

(1) turbulentní model Spalart-Allmaras

c) otevření souboru sítě (1 parametr)

Pozn.: Při prvním spuštění výsledku se zadává hodnota „0“, výpočetní program vytvoří důležité soubory a bude inicializovat počátek výpočtů. Při dalším opakovaném startu už je nutné volit hodnotu „1“. Výpočetní program tak bude načítat hodnoty z již z vytvořených souborů z předchozího výpočtu.

(0) první start výpočtů

(1) opakovaný start programu

d) kontrola výpočetní sítě (1 parametr)

(0) žádná kontrola výpočetní sítě

(1) kontrola výpočetní sítě

e) jméno souboru obsahující výpočetní síť popř. data mezivýsledků (1 parametr) vložení názvu souboru /*.mg/

f) výběr řešiče tlaku (1 parametr)

(0) odhadovaný tlak není počítán

(1) odhadovaný tlak je nulový

(2) odhadovaný tlak je počítán

g) parametry výpočtu tlaku – výběr metody, (4 parametry)

Pozn.: Tyto parametry je nutné zadat, ovšem v případě bodu (f) nastaven jako (0) jsou další parametry této skupiny ignorovány, musejí být ovšem součástí startovacího souboru .

(0) Jacobiho metoda

(1) CG

(2) MGM + Jacobi-Jacobi

zadat počet iterací na hrubé síti

zadat počet iterací na jemné síti

počet MGM cyklů

h) parametry výpočtu tlakového potenciálu (6 parametrů)

Pozn.: Doporučuje se volit hodnota „1“. V tomto případě je důležitý relax faktor (hodnota mezi 0.4 – 0.8) a počet iterací na hrubé síti. Počet iterací je možné volit dle tendence iterace úlohy. Při výběru počtu iterací je nutné brát v úvahu rovněž délku výpočtu. Konečný počet iterací nebude dosažen v případě, že požadovaná přesnost zbytku residuí bude dosažena dříve. V případě, že dosažená přesnost zbytku residua nebude dosažena v rámci maximálního počtu iterací, bude výpočet automaticky pokračovat pouze s maximálním počtem iterací.

(0) Jacobiho metoda

(1) CG

(2) MGM + Jacobi-Jacobi

(3) MGM + Jacobi-CG

- relax faktor

- zadat počet iterací na hrubé síti

- přesnost zbytku residua při iteraci

- *zadat počet iterací na jemné síti*
- *počet MGM cyklů*

i) *dodatečné informace o výpočetní síti (5 parametrů)*

Pozn.: Není-li specifikováno jinak, lze všechny parametry této skupiny nastavit jako „1“. Pozor: Bude-li poslední parametr udávající počet „partitions“ zvolen jako „1“, je nutné při startu programu rovněž napsat: `mpirun -np 1 . . . . .`

- *limit pro maximální úroveň výpočetní sítě*
- *dolní limit úrovně výpočetní sítě*
- *počet následníků*
- *počet váhových faktorů*
- *počet „partition“ v základní výpočetní síti*

j) *zjemňování výpočetní sítě (1 parametr)*

Pozn.: Vždy se zadává, ovšem význam má pouze tehdy, bude-li v kategorii (i) zvolen parametr „limit pro maximální úroveň výpočetní sítě“ s počtem vyšším než „1“.

(0) *žádné*

(1) *celkové zjemnění*

(2) *lokální zjemnění v blízkosti pevné stěny*

(3) *lokální zjemnění pomocí delta parametru*

k) *typ předpokládaného řešeného případu (1 parametr)*

Pozn.: Nejčastější varianta bude „3“.

(1) *RMP v konečně veliké válcové nádobě*

(2) *RMP v nekonečně veliké válcové nádobě*

(3) *případ bez magnetického pole*

(4) *případ proudění v kanále bez vlivu magnetického pole*

l) *materiálové vlastnosti (2 parametry)*

- *hustota*

- *kinematická viskozita*

m) *výběr stabilizace (1 parametr)*

Pozn.: Doporučuje se hodnota „0“!

(0) jen PSPG

(1) PSPG + SUPG

n) metody využití výpočetního času (3 parametry)

Pozn.: Mezi následujícími parametry existuje velmi silná závislost. V případě, že se jedná o výpočet v oblasti ještě neustáleného nestacionárního proudění, je výhodnější volit konkrétní hodnotu CFL parametru v rozmezí (0 - max. 0.3). V takovémto případě dosazujeme za $\Delta t = 0$. Později, když je výpočet již ustálený, časový krok se již výrazně nemění, tak lze nastavit libovolnou hodnotu časového kroku Δt jako konstantní hodnotu a $CFL = 0$. Při volbě hodnoty CFL je nutné brát v úvahu vždy podmínku stability řešení. Teoreticky lze volit hodnotu až 0.3, prakticky je lepší ale volit hodnotu do 0.2. V případě nestabilního výpočtu je pak nutné dále snížit tuto hodnotu.

- velikost časového kroku

- CFL parametr

- počet časových kroků

o) tisk výsledků (1 parametr)

Pozn.: Určuje, kolik výsledků se bude tisknuto v rámci periody výpočtů.

Příklad: Bude-li počet výpočetních kroků 100 a za tisk výsledků bude zadáno číslo 5, budou zálohovány výsledky každých 20 kroků. Bude-li číslo 1, pak se ukládají pouze poslední výsledky výpočetní periody.

p) statistické metody (1 parametr)

Pozn.: Na začátku výpočtů vždy volit hodnotu „0“. Bude-li proudění již vyvinuté a $\Delta t = \text{konst.}$, je možné provádět časové průměrování.

(0) žádné

(1) aktivní

q) typ magnetického pole (4-6 parametrů)

Pozn.: Tyto parametry se udávají pouze tehdy, byla-li v části (a) zvolena hodnota „1“, jinak parametry ignorovat.

(1) analytické rozložení MS pro RMP

(2) RMP pro nekonečnou geometrii – výpočet

(3) RMP pro konečnou geometrii – výpočet

(4) RMP pro konečnou geometrii + DC – výpočet

(5) TMP

- *amplituda magnetického pole*
- *elektrická vodivost materiálu*
- *frekvence magnetického pole*
- *magnetická indukce statického magnetického pole (pouze když bod $q=4$)*
- *vlnové číslo (pouze když $q=5$)*

r) metody výpočtu elektrického potenciálu (4 parametry)

Pozn.: Tyto parametry se udávají pouze tehdy, byla-li v části (a) zvolena hodnota „1“, jinak parametry ignorovat.

(0) *Jacobi metoda*

(1) *CG metoda*

(2) *MGM + Jacobi – Jacobi*

- *počet iterací na hrubé síti*
- *počet iterací na jemné síti*
- *počet cyklů MGM*

s) okrajové podmínky

- *stěna /Dirichlet/ (1)*
- u_x
- u_y
- u_z
- *nulový tok v normálovém směru (3)*
- *okrajová podmínka typu outflow (4)*

t) dodatečné informace pro řešení konkrétních úloh (0 – 2 parametry)

(1)

- *rádius válcové nádoby*
- *velikost nádoby*

(2)

- *rádius válcové nádoby*

(3)

neobsazeno (4)

(1) *stacionárně ustálený výpočet na strukturované síti*

(2) *stacionárně ustálený výpočet na nestrukturované síti*

(3) *nestacionární na nestrukturované síti*

(4) DNS Moser-Kim, turbulentní proudění

u) výpis výsledků (3 parametry)

Pozn.: Neexistuje-li k výpisu dat zvláštní důvod, je doporučeno vložit všechny tři parametry jako nulové hodnoty „0“.

- *plot výsledků*: (0) ne, (1) ano

- *ukládání vybraných dat do souboru*: (0) ne nebo (1) ano

- *ukládání série*: (0) ne nebo (1) ano

v) vyhrazeno pro testy lineární stability proudění (1 parametr)

Pozn.: V případě, že se neuvažuje test lineárních nestabilit (drtivá většina uvažovaných případů), bude parametr mít hodnotu „0“.

(0) *žádné umělé vzruchy v proudění*

(1) *vzruchy pouze u začátku proudění*

(2) *vzruchy i během výpočtu*

Startovací soubor je programem automaticky načítán na počátku běhu výpočtu programu. V případě, že není tento soubor v adresáři, odkud se program spouští, nahlásí výpočetní program NS-FEM3D chybu. Výhodou tohoto řešení pomocí startovacího textového souboru je dostupnost nastavení výpočtu i pro zpětnou kontrolu. Navíc je možné spustit výpočet programu jednoduše pomocí příkazového řádku, což dále usnadňuje původně zamýšlený plán spouštět úlohy na výkonných výpočetních stanicích s omezeným přístupem ke grafice.

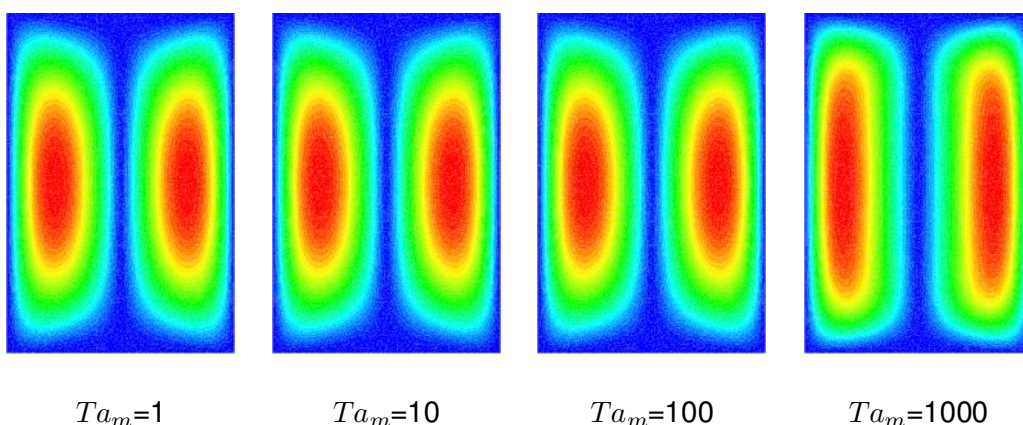
Kapitola 5

Rotující magnetické pole - laminární režim

5.1 Podkritická oblast magnetického Taylorova čísla - osově symetrická nádoba

Laminární proudění reprezentuje podkritický režim proudění definovaný hodnotou magnetického Taylorova čísla, které je menší než jeho kritická hodnota. Již delší dobu jsou známy teoretické výsledky pro tento režim proudění, které byly většinou potvrzeny také experimentálně. V laminárním režimu proudění je možné velmi dobře popsat účinky magnetického pole na stabilizaci proudění a homogenizaci teplotních polí. Na rozdíl od turbulentního režimu, kdy se již objevují fluktuace, které přinášejí další nestability do proudění.

Jeden z prvních nejdůležitějších výsledků laminárního proudění ve válcové nádobě je ustálené rychlostní pole resp. hlavní rotační azimutální proudění. Jak je znázorněno na obrázku 5.1 pro velmi malé hodnoty Taylorových čísel je rozložení azimutální rychlosti pro všechny případy velmi podobné, avšak již kolem hodnoty $Ta_m=1000$ je možné si všimnout výrazného posunu hodnot azimutální rychlosti směrem k obvodovým stranám válcové nádoby. Maximální hodnoty azimutální rychlosti rostou lineárně s hodnotou magnetického Taylorova čísla, ovšem pouze v případě, jestliže magnetické Taylorovo číslo je menší než hodnota 1000 (mluví se o tzv. lineárním laminárním režimu proudění). Již kolem $Ta_m=1000$ je možné vidět určitou odchylku od lineárního vývoje. Laminární proudění ve válcové nádobě, vybuze­né účinkem rotujícího magnetického pole, je možné použít rovněž pro verifikaci implementace magnetohydrodynamického matematického modelu do softwaru a k další validaci výsledků.



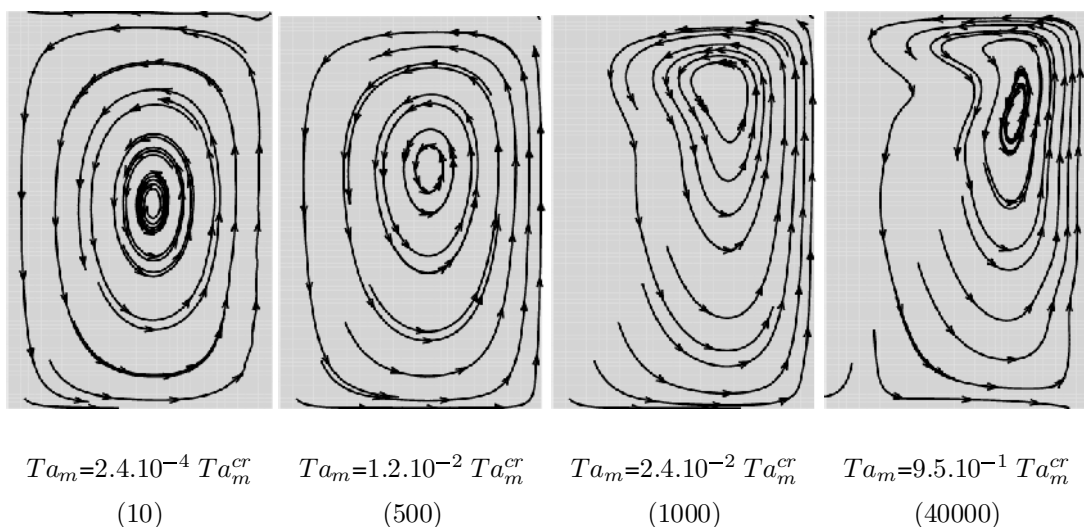
Obrázek 5.1: Vývoj azimutálního proudění ve vertikálním řezu v podkritické oblasti magnetického Taylorova čísla. Hodnoty normovány k maximální hodnotě v každém případě.

5.1.1 Vliv Taylorova čísla na sekundární proudění

Sekundární proudění je z pohledu praktického využití např. v oblasti krystalizace materiálu jeden z nejsledovanějších výsledků numerické analýzy. Pouze na okraj je možné uvést, že v oblasti krystalizace materiálu resp. metalurgických procesů, je účinek sekundárního proudění na krystalizační procesy ve větší části laminárního proudění příznivý. Výjimku snad představuje stav, kdy hodnota Taylorova čísla, která jinak také vyjadřuje intenzitu magnetické indukce, se přiblíží ke kritickému magnetickému Taylorovu číslu. Pak se objevuje v proudění oscilace. Její negativní vlivy již byly zmíněny v úvodu této práce a v teoretickém pojednání, a proto není nutné o nich dále zde zmiňovat.

Přehled vývoje sekundárního proudění, znázorněného pomocí proudové funkce a vektorového znázornění, je možné vidět na obr. 5.2. Pro orientaci je nutné uvést, že hodnota příslušného magnetického Taylorova čísla je vztažena ke kritické hodnotě magnetického Taylorova čísla. Hodnoty uvedené v závorce pak označují absolutní hodnotu magnetického Taylorova čísla dle definice v (3.4).

Z obrázků 5.2 je patrné především posun středu sekundárního proudění směrem k rohu válcové nádoby. V případě, že střed sekundárního proudění je umístěn v rohu nádoby, pak tento jev vykazuje zpravidla již nadkritické proudění. Jak se postupně přiblíží těsně ke kritické hranici magnetického Taylorova čísla, dochází ke vzniku nestabilit, o kterých bude pojednáno později v rámci prezentace výsledků v režimu proudění nadkritického magnetického Taylorova čísla. Jak je možné dále pozorovat, účinek sekundárního pole není tak



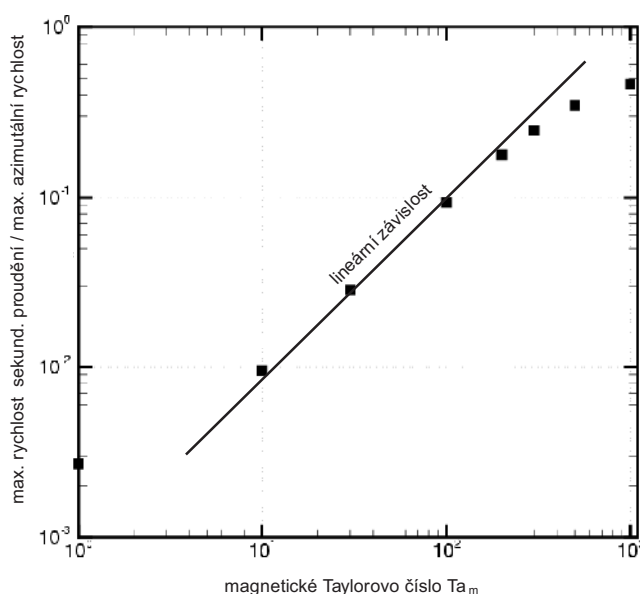
Obrázek 5.2: Vývoj sekundárního proudění v závislosti na velikosti magnetického Taylorova čísla pro oblast laminárního proudění.

intenzivní uprostřed nádoby v porovnání k nižšímu Taylorovu číslu a navíc je možné pozorovat začínající nestacionární jevy v proudění. Tento a další režimy proudění byly již detailně studovány za předpokladu osově symetrického proudění autory GELFGAT a PRIDE [26]. Poslední obrázek z 5.2 reprezentuje případ magnetického Taylorova čísla $Ta_m = 40000$ neboli $9.5 \times 10^{-1} Ta_m^{cr}$, tedy zhruba 5 procent pod kritickou hodnotou. V tomto případě je možné dosáhnout ještě stacionárního výsledku a vizualizace pak následně prokazuje symetrické rozložení sekundárního proudění bez vlivu nestabilit typických pro nadkritické proudění. O vlivu nadkritického proudění na vytvoření sekundárního proudění je pojednáno později.

5.1.2 Charakteristické vlastnosti proudění

Aby bylo možné snadněji porovnat a zhodnotit proudění, je účelné vyjádřit výsledky pomocí čísel než grafického znázornění. Jednou ze zajímavých hodnot je poměr mezi maximální azimutální rychlostí primárního proudu a sekundárního proudění. Přehled těchto hodnot ve vztahu k magnetickému Taylorovu číslu je znázorněn v grafu na obrázku 5.3. Horizontální osa označuje magnetické Taylorovo číslo a vertikální osa představuje poměr mezi maximální hodnotou sekundárního proudění a hlavního rotujícího proudění resp. azimutální rychlosti.

V grafu 5.3 si je možné povšimnout, že poměr mezi rychlostmi roste lineárně téměř až do hodnoty Taylorova čísla $Ta_m = 1000$. Z předchozích publikací je známo, že obecně předpokládaná linearita mezi maximální hodnotou rychlosti a magnetického Taylorova čísla



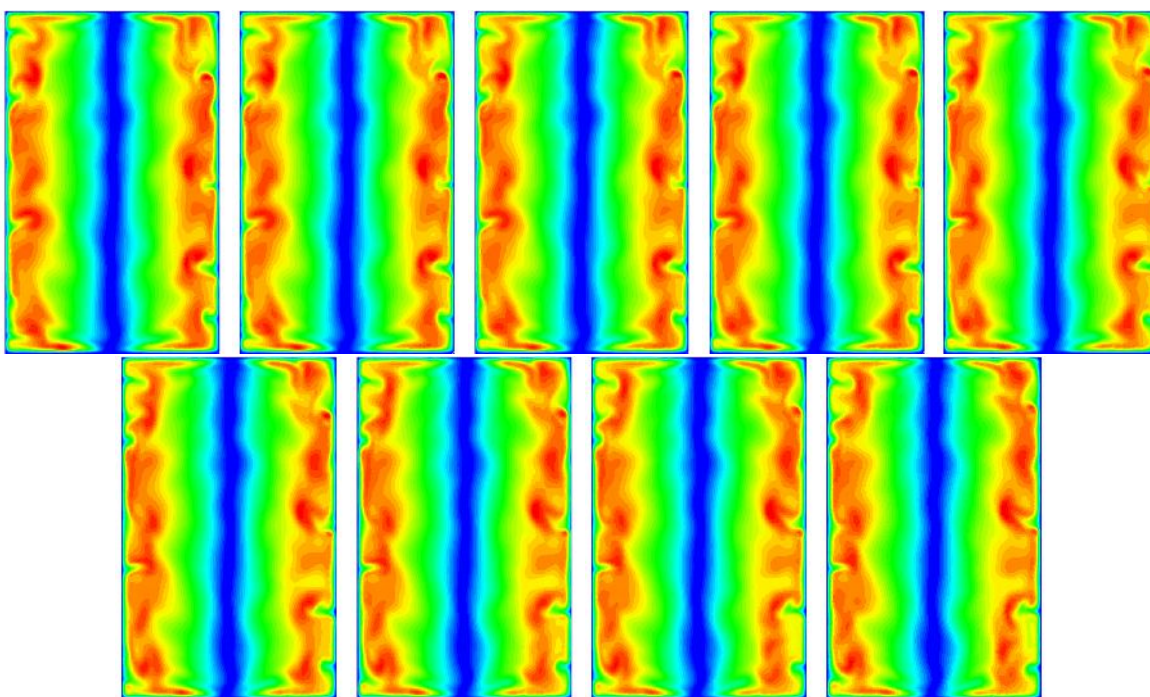
Obrázek 5.3: Změna poměru maximálních hodnot rychlosti sekundárního proudění a azimutální rychlosti v závislosti na magnetickém Taylorovu čísle pro případ laminárního (Stokesova) proudění.

je platná v oblasti magnetických čísel menších jak $Ta_m=1000$. Z toho důvodu je možné pozorovat, že v oblasti magnetického Taylorova čísla $Ta_m=1000$ již lineární nárůst není dodržen. Jak dále bude ukázáno, v oblasti vyšších hodnot magnetických Taylorových čísel je možné dosáhnout poměru mezi maximální axiální a azimutální rychlostí kolem hodnot 0.44. Tento poměr už se dále nezvyšuje a zůstává konstantní. Tedy lineární nárůst intenzity sekundárního proudění s intenzitou azimutální rychlosti je typický pro laminární proudění v oblastech hodnot Taylorových čísel nižších než hodnota $Ta_m=1000$.

5.2 Nadkritická oblast magnetického Taylorova čísla - osově symetrická nádoba

Z doposud známých poznatků ohledně účinku rotujícího magnetického pole je potvrzeno, že překročí-li magnetické Taylorovo číslo určitou hranici, tzv. kritickou hodnotu (pro náš případ $H/D = 1.5$ je kritická hodnota $Ta_m^{cr} = 4.25 \times 10^4$) objeví se v proudění nestability Taylor-Görtlerova typu v oblasti mezní vrstvy obvodové stěny válce. Vznikající proudění definované za těchto podmínek je pak buď přechodové nebo turbulentní. V obou případech dochází k nestacionárnímu proudění a v případě turbulentního proudění ještě navíc k chaotickému chování vznikajících struktur, definovaných velkým rozsahem časových a prostorových měřítek.

Navíc proudění, které je indukováno ve válcové nádobě konečných rozměrů, se vyznačuje silným zakřivením proudnic a existencí sekundárního proudění. Tyto závěry ohledně charakteru proudění je možné učinit na základě dosavadních znalostí ještě před samotnou numerickou analýzou a je nutné je uvážit při řešení v rámci konstrukce sítě, způsobu výpočtu resp. modelování turbulence atd. Bude-li zájem soustředěn hlavně na menší Reynoldsova čísla, bude proudění v přechodovém nebo už v turbulentním režimu, který ale nebude ještě plně vyvinutým.



Obrázek 5.4: Časový vývoj okamžité azimutální rychlosti pro případ $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$. Obrázky jsou seřazeny zleva doprava a zaznamenávají vývoj azimutální rychlosti s časovým krokem 0.08s.

Studie turbulentního proudění je možné realizovat několika metodami. Každá z nich nabízí výhody a nevýhody. V turbulentním proudění se vyskytuje velký rozsah délkových a časových měřítek, které se mohou přímo počítat DNS (Direct Numerical Simulation). Výhodou je obecná platnost, možnost počítat i vliv zakřiveného proudění atd. Nevýhodou je požadavek na relativně jemnou síť. Další možností je výpočet pouze některých větších měřítek a ty ostatní modelovat LES (Large Eddy Simulation). Tímto způsobem se sníží nároky na výpočetní síť ve smyslu její hustoty, ale v případě existence skutečně velkého počtu malých měřítek je tato metoda do jisté míry nepřesná vzhledem ke slabosti tzv. subgrid (SGS) modelu. Třetí možností je modelovat tedy všechna měřítka turbulence (RANS - Reynolds

averaged Navier-Stokes), což znamená z praktického hlediska použití relativně hrubé sítě, avšak nevýhodou je většinou omezení platností těchto modelů.

K výběru konkrétního modelu je třeba uvést mnohem více informací. Nejprve je nutné poznamenat, že některé analyzované případy se vyznačují tím, že z hlediska magnetického Taylorova čísla leží v blízkosti kritické hodnoty. To by znamenalo, že takovéto proudění bude s největší pravděpodobností v přechodové režimu proudění. Poněvadž většina RANS modelů je postavena na teorii již plně vyvinutého turbulentního modelu, znamená to, že použití RANS modelů pro právě tuto specifickou oblast proudění není dost dobře možné bez další úpravy. Některé turbulentní modely mají v sobě zahrnuty výrazy, upravující modelování turbulentních vlastností v přechodovém režimu proudění. Jako příklad low-Re $k-\varepsilon$ model. Jestliže je tudíž přechodové proudění součástí numerické studie, pak není možné využít RANS modely. Tím se celý problém redukuje na výběr buď DNS a nebo LES model. Obě metody ovšem reprezentují většinou již poměrně náročné výpočty. Vzhledem k tomu, že z praktického hlediska je LES náročnější z pohledu přípravy ve výpočetním programu NS-FEM3D, je výhodné nejprve celý problém řešit pomocí DNS. Tímto způsobem se získají přesné výsledky ohledně proudění, přičemž charakter proudění rozhodne o dalším postupu.

Tak se numerická studie v oblasti nadkritického Taylorova čísla redukuje na DNS studii přechodového a eventuálně turbulentního režimu proudění. Velkou neznámou v tomto případě je otázka velikosti sítě potřebné pro úspěšné řešení všech eventuálně vznikajících struktur.

Jestliže bude proudění považováno za již vznikající turbulentní proudění, budou mít vznikající struktury neperiodický charakter a v proudu budou vznikat různě velká časová a délková měřítka. Zatímco velká délková měřítka nepředstavují žádný problém z hlediska sítě, bude existence malých měřítek určitou komplikací ve smyslu požadavku na jemnost výpočetní sítě. Matematický model totiž nezná chování těchto malých měřítek a tudíž je nemůže modelovat, nýbrž je musí přímo vypočítat. Použitá výpočetní síť tak musí být dostatečně jemná. Z praktického hlediska bývá problém spíše v řešení délkových měřítek, než v oblasti časových měřítek, neboť výběr časového kroku při výpočtu je limitován samotným použitým softwarem NS-FEM3D z hlediska jeho stabilního běhu (explicitní schéma). Avšak při generování sítě se musí zohlednit eventuální délková měřítka, která se mohou objevit v turbulentním režimu proudění. Odhad požadované minimální velikosti sítě resp. vzdálenosti mezi dvěma výpočetními uzly může být stanoven na základě vztahu (5.1), který je možné nalézt v literatuře LAUNDER [50].

$$\frac{\eta}{L} \sim Re^{\frac{3}{4}} \quad (5.1)$$

Jak je vidět ve vztahu (5.1), jestliže Re je dáno (3.1) a L označuje charakteristické délkové měřítko, pak Kolgomorovské mikroměřítko η lze odhadnout a použít jako parametr definující minimální vzdálenost mezi dvěma sousedícími uzlovými body. Ve skutečnosti by měla být tato vzdálenost mezi výpočetními uzly ještě menší než je samotné Kolgomorovské měřítko. Tento výše uvedený vztah se použije pro velmi hrubý odhad velikosti výpočetní sítě, neboť jeho platnost je do značné míry omezena na tzv. izotropní turbulenci.

Jinou možností, jak stanovit, zdali síť je dostatečně jemná pro výpočet, je stanovení energetických spekter. Tato metoda je považována za skutečnou odpověď na otázku dostatečné jemnosti výpočetní sítě, avšak její nevýhodou je, že energetické spektrum se získá na základě již uskutečněného výpočtu.

Na obrázku 5.13 je spektrální hustota energie fluktuace v azimutálním směru proudění. Jestliže hodnota spektrální hustoty u největšího vlnového čísla se bude považovat za tzv. šum, pak je možné nalézt v energetickém spektru takové vlnové číslo, u kterého začne narůstat hodnota energie. Tím se zároveň prokáže, že energetické spektrum je definováno pro všechny existující velikosti hodnot vlnového čísla a tudíž, že použitá výpočetní síť je dostatečně jemná na uskutečněnou numerickou analýzu. Na okraj je nutné poznamenat, že v literatuře je možné nalézt také informace ohledně volby jemnosti sítě s ohledem na vznik nestabilit. MÖSSNER a GERBETH [67] popsali ve své publikaci, že výpočetní síť musí mít alespoň 50 uzlových bodů na poloměru válcové nádoby, aby bylo možné vůbec numericky detekovat nestability proudu. Na tyto praktické závěry je brán zřetel a tudíž použitá výpočetní síť splňuje všechny zde uvedené limitující faktory dané DNS metodou a charakterem proudění.

Následující studované modely mohou být identifikovány určitou hodnotou magnetického Taylorova čísla. Poněvadž přechodový a turbulentní režim proudění je vždy již v oblasti nadkritického Taylorova čísla, je výhodnější udávat hodnotu Taylorova čísla jako násobek kritické hodnoty resp., je-li magnetické Taylorovo číslo např. $Ta_m = 1 \times 10^5$, pak připadá v úvahu také označení $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$. Kritická hodnota je považována za referenční hodnotu, která je pro všechny zde publikované výsledky stále stejná a její přesná hodnota byla již už uvedena dříve.

5.2.1 Okamžité rychlostní pole

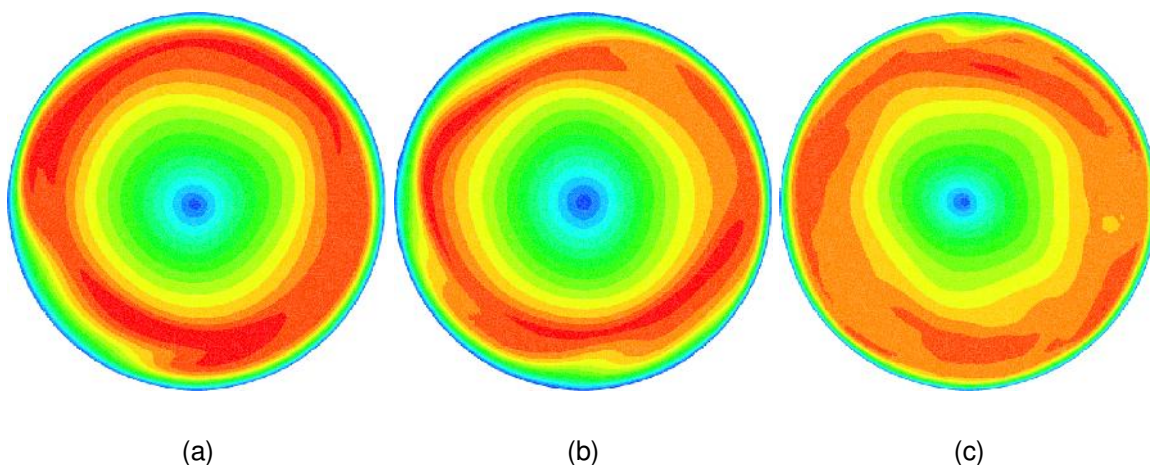
Prvním významným výsledkem, získaným z numerické analýzy, je okamžité rychlostní pole, které je možné vidět na obrázku 5.2 pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla, konkrétně $1.9Ta_m^{cr}$, $2.4Ta_m^{cr}$ a $7.1Ta_m^{cr}$. Jak je patrné, rychlostní pole je do jisté míry ovlivněno

magnetickým Taylorovým číslem.

$$u^* = \frac{u}{u_{ref}} = \frac{uR}{\nu} \quad (5.2)$$

Aby bylo možné kvalitativně porovnat výsledky navzájem, je skutečná hodnota rychlosti vztažena k referenční hodnotě dle vztahu 5.2, kde ν je kinematická viskozita, R je poloměr nádoby a u je rychlost magneticky generovaného proudu. Tento způsob výběru referenční hodnoty je pro problematiku rotujícího magnetického pole ve válcové nádobě zcela obvyklý a poprvé byl definován DAVIDSONEM [61].

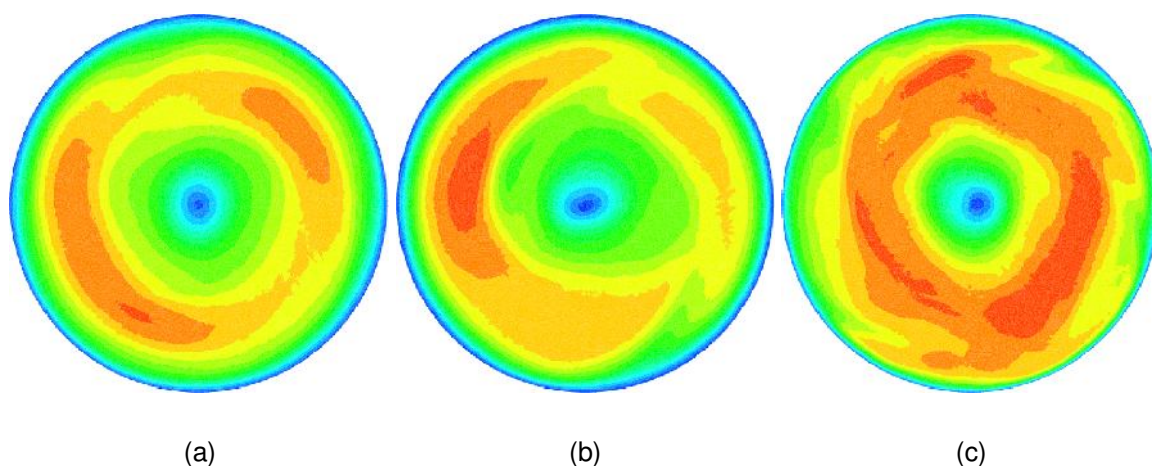
$$u_{ref}^* = \frac{u^*}{|u^*|_{max}} \quad (5.3)$$



Obrázek 5.5: Okamžité azimutální rychlostní pole znázorněné v horizontálním řezu umístěném v polovině výšky nádoby pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

Rozložení okamžitého rychlostního pole v horizontálním řezu uprostřed nádoby je znázorněno na obrázku (5.5). Jak je patrné, azimutální rychlostní pole je osově nesymetricky rozloženo.

Tato osová nesymetrie se může předpokládat, neboť se jedná o již začínající turbulentní proudění. (GELFGAT a PRIEDE [26] nebo MÖSSNER and G. GERBETH [67]) uskutečnili numerickou studii za předpokladu symetrického proudění. Jak ukazují zde uvedené výsledky, nesymetrické rozložení azimutálního rychlostního pole je typické pro případy magneticky indukovaného proudění v oblasti nadkritického magnetického Taylorova čísla. Zatímco v řezu v polovině válcové nádoby je maximální azimutální rychlost soustředěna převážně ve $3/4$

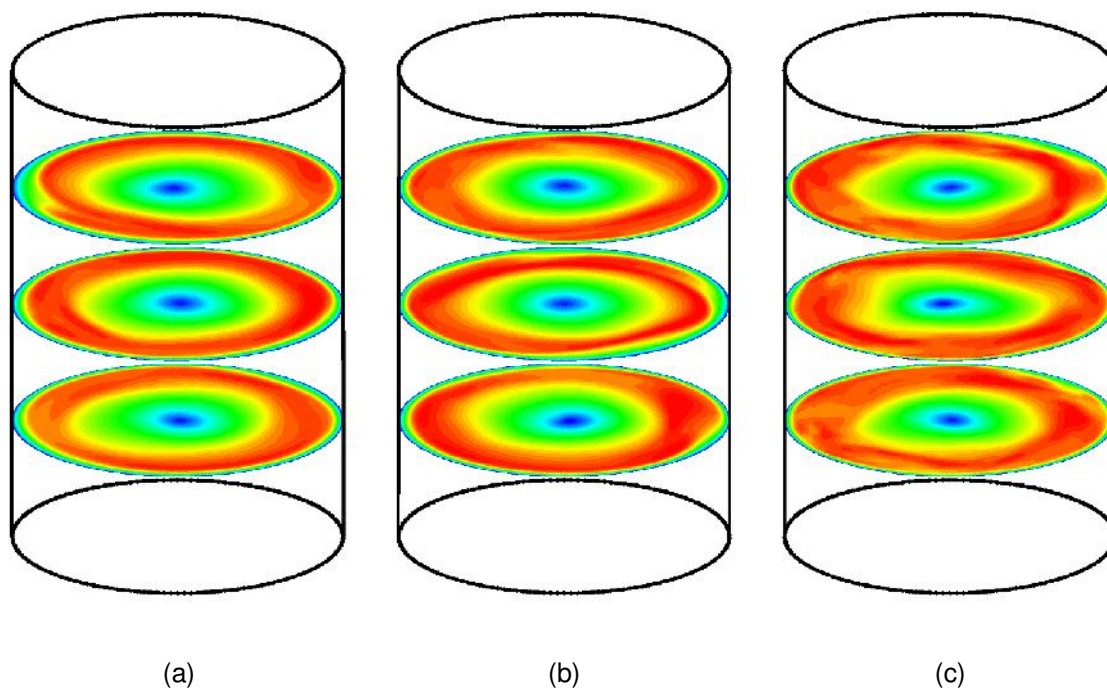


Obrázek 5.6: Okamžité azimutální rychlostní pole proudění znázorněné v horizontálním řezu umístěném v těsné blízkosti koncových stěn nádoby pro případy různých hodnot magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

poloměru válcové nádoby viz obrázek 5.5, u koncových stěn válcové nádoby je maximální hodnota azimutální rychlosti soustředěna přibližně do $1/2$ poloměru nádoby (5.6). Toto posunutí maximální rychlosti směrem do středu nádoby je způsobeno existencí Ekmanovy mezní vrstvy a tento jev se projevuje u všech studovaných modelů, jejichž hodnota magnetického Taylorova čísla přesahuje kritickou hodnotu.

Na obrázku 5.7 jsou znázorněny okamžité azimutální rychlosti pro různě umístěné horizontální řezy válcovou nádobou. Způsob znázornění azimutální rychlosti je identický se způsobem použitým již v předešlých grafických vyjádřeních. Jak je patrné z obrázku, nesynergie azimutálního proudění se liší s ohledem na pozici řezu a není stejnoměrná v celém objemu válcové nádoby. Ve všech zde znázorněných obrázcích je možné definovat oblast neviskózního proudění v blízkosti potenciálního jádra a rovněž tak oblast v blízkosti stěn, kde dochází ke vzniku nestabilit a kde je azimutální rychlostní pole deformováno.

Studie okamžitého rychlostního pole ukazuje ve všech případech nadkritického Taylorova čísla, že proudění je nestacionární. Azimutální rychlostní pole vykazuje nesynergie a oscilace azimutální rychlosti v hlavním rotačním pohybu kolem vertikální osy. Poloha maximální okamžité azimutální rychlosti se mění tak, že její hodnota se pohybuje kolem $3/4$ poloměru válcové nádoby. Výjimku tvoří oblast v blízkosti Ekmanovy mezní vrstvy, kde dochází k posunu polohy maximální rychlosti směrem do středu nádoby. Tyto závěry se dají zobecnit na všechny případy zde studovaných modelů. Poloha maximálních hodnot rychlostního pole je studována a popsána později pomocí tzv. „mean“ hodnot. V následující kapitole bude uká-



Obrázek 5.7: Znáznornění azimutální okamžité rychlosti v horizontálních řezech definované výškou $\frac{H}{3}$, $\frac{H}{2}$ a $\frac{2H}{3}$ a různými hodnotami magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ an (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

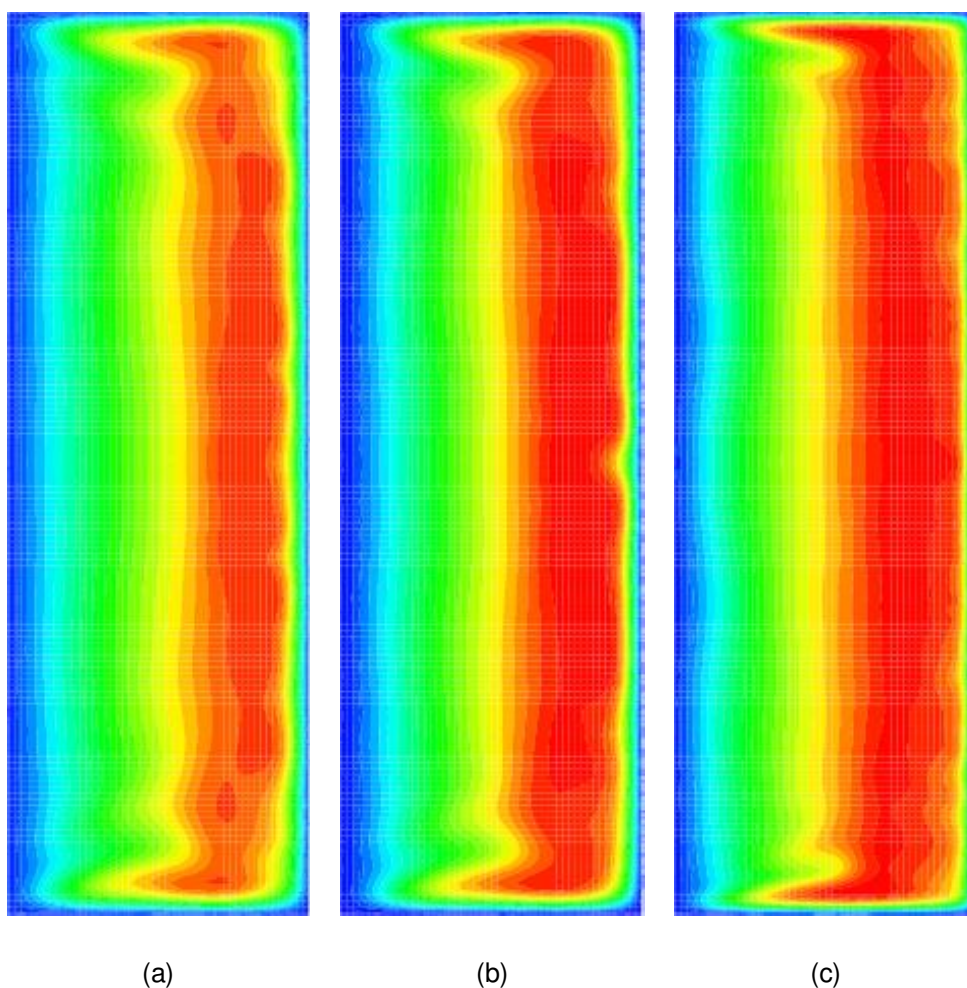
záno časově zprůměrované azimutální rychlosti a rovněž tak rychlostní pole sekundárního proudění.

5.2.2 Časově zprůměrované rychlostní pole

Kromě okamžitého rychlostního pole je možné také stanovit časově zprůměrované rychlostní pole, které umožňuje porovnání s experimentálními výsledky nebo s výsledky jiné numerické analýzy. Nejprve ale několik poznámek k samotnému procesu časového průměrování, které je dáno vztahem (5.4).

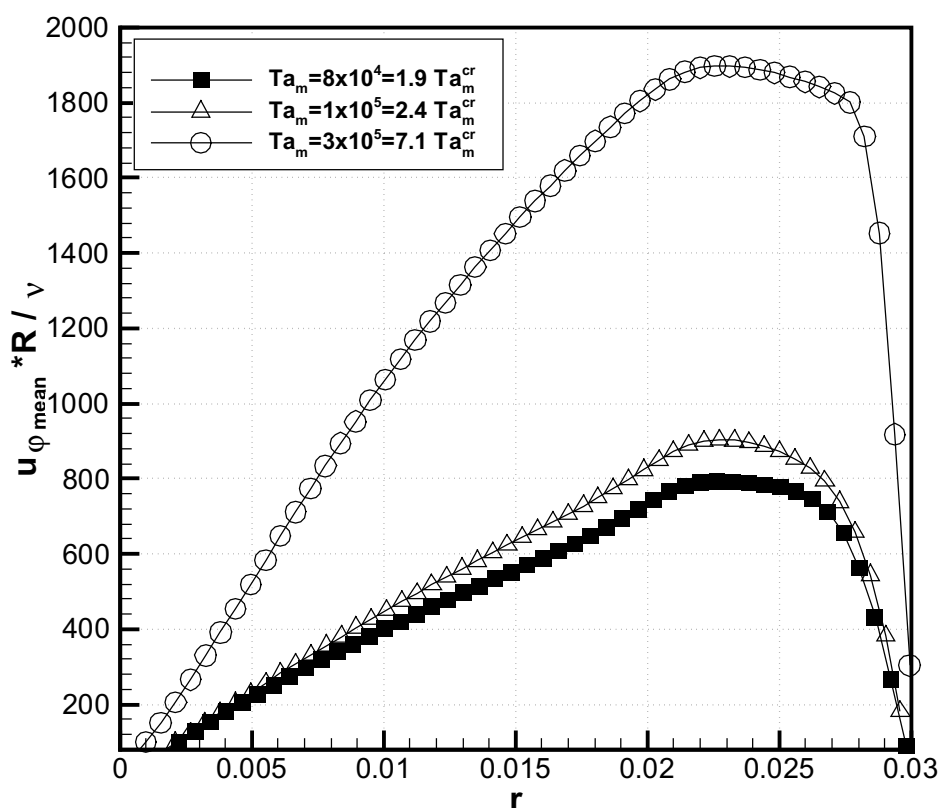
$$\langle u_\varphi \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt \quad (5.4)$$

Ve vztahu (5.4) označuje t_0 tzv. počáteční hodnotu průměrování. Ta odpovídá v našem případě času, kdy se dosáhlo vyvinutého nestacionárního proudění. Proměnná označená jako T představuje konečnou hodnotu průměrování, tj. vyjadřuje dobu, po kterou bylo časové průměrování uskutečněno a dt pak příslušný časový krok. Na obrázku 5.8 jsou znázorněna



Obrázek 5.8: Časově zprůměrované azimutální rychlostní pole znázorněné ve vertikálním řezu pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

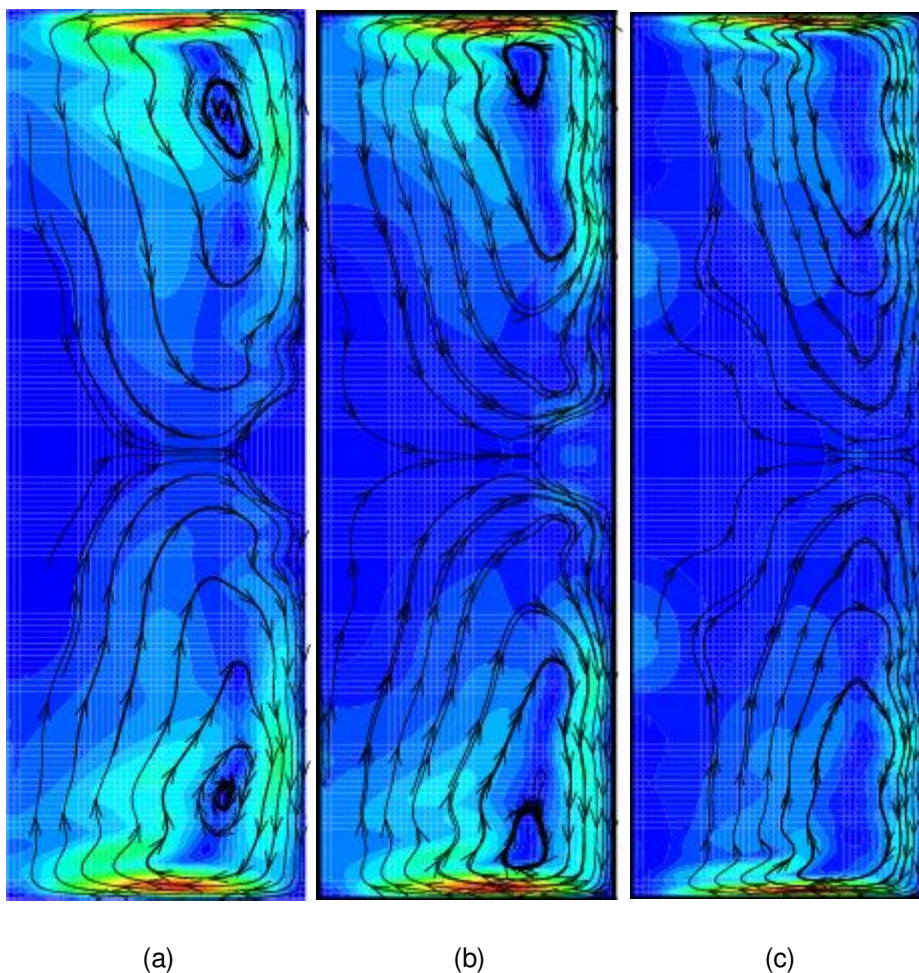
časově zprůměrovaná rychlostní pole opět pro 3 již známé hodnoty Taylorova čísla. Metoda průměrování odpovídá vztahu (5.4), avšak s ohledem na osovou symetrii bylo použito dodatečných kroků k zlepšení znázornění symetrie proudění. Tyto dodatečné kroky lze vysvětlit následně. Z hlediska fyzikálního pohledu musí být symetrie proudění ve vertikální orientaci zachována, neboť tvar a rovněž tak okrajové podmínky jsou symetrické a zohledněný materiál je homogenní. Ovšem z reálného pohledu nemusí být tato symetrie přesně dodržena, neboť použitá výpočetní síť je nestrukturovanou sítí a je sama o sobě nesymetrická. Je-li tedy eventuální nesymetrie proudu způsobena nesymetrií sítě, pak je možné tento nežádoucí projev sítě eliminovat dodatečným osovým prostorovým průměrováním. Na obrázku 5.8 je tak možné vidět časově zprůměrovanou azimutální rychlost pouze v polovině vertikál-



Obrázek 5.9: Rychlostní profil zprůměrovaného rychlostního pole vyhodnocený v polovině výšky nádoby. Maximální hodnotu azimutální rychlosti je možné identifikovat přibližně ve $3/4 R$.

ního řezu pro tři různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. Barevné označení respektuje velikost časově zprůměrované hodnoty azimutální rychlosti, přičemž červená barva zastupuje maximální hodnoty a modrá pak minimální nebo nulovou hodnotu azimutální rychlosti. Obrázek 5.9 ukazuje rychlostní profil časově zprůměrované hodnoty azimutální rychlosti ve středu válcové nádoby pro různé hodnoty magnetického Taylorova čísla. Jak je patrné z obrázku, je rychlostní profil mírně deformován v okolí maximálních hodnot pro případ $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$. Tato mírná deformace může být zapříčiněna nedostatečnou časovou délkou procesu průměrování rychlostního pole, neboť teoreticky je časový interval potřebný pro dokonale průměrovanou hodnotu nekonečně velký.

V azimutálním proudění existují koherentní struktury s velmi dlouhou životností. Násled-



Obrázek 5.10: Znázornění sekundárního proudění doplněného proudnicemi ve vertikálním řezu nádoby s různou hodnotou magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$

kem toho, ideálně časově průměrované rychlostní pole musí být uskutečněno na dostatečně dlouhém časovém intervalu, který umožňuje zprůměrovat i nestacionární jevy s nízkou četností výskytu. Čistě z praktických důvodů není tudíž možné u DNS takto dlouhý časový interval průměrování realizovat.

Z grafu 5.9 je možné odečíst polohu maximální hodnoty, která je pro všechny zde studované případy magnetického Taylorova čísla zhruba konstantní a její hodnota je zhruba $3/4$ poloměru válcové nádoby. Časově zprůměrovaná hodnota rychlostního pole sekundárního proudění včetně znázorněných proudnic je ukázána na obrázku 5.10. Černě označené proudnice určují směr sekundárního proudění a červená barva pak znázorňuje maximální

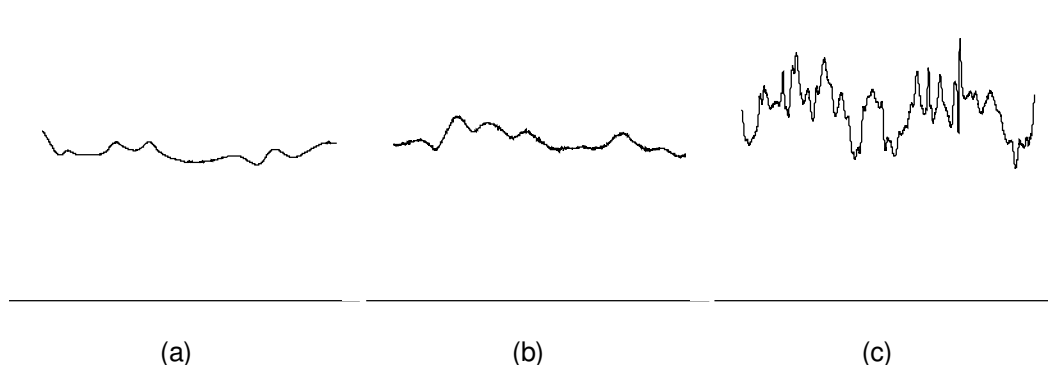
hodnotu rychlosti proudu. V porovnání s laminárním prouděním je zřetelný posun středu sekundárního proudění směrem ke koncovým stěnám válcové nádoby resp. k jejím rohům. Maximální hodnoty rychlostí sekundárního proudění jsou soustředěny u koncových stěn nádoby. Zároveň si lze povšimnout, že průběh proudnic podél svislých stěn nádoby směrem ke koncovým stěnám je mírně vlnitý. Toto zvlnění je pravděpodobně otázkou velikosti časového intervalu průměrování, neboť při průměrování v nekonečné časové délce by byla informace o koherentních strukturách vyfiltrována. Právě v této oblasti se bude nejvíce projevovat existence dominantních struktur a rovněž tak výskyt nestabilit.

Znázorněné rychlostní profily poskytují ještě jednu velmi důležitou informaci. V grafu 5.9 lze sledovat změnu tloušťky mezní vrstvy s rostoucí hodnotou magnetického Taylorova čísla. Jak je patrné v případě $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$, mezní vrstva je numericky vyřešena s pomocí 5 výpočetních uzlů, což je dostatečné kritérium k numerickému vyřešení mezní vrstvy. V případě menších hodnot magnetického Taylorova čísla není situace s ohledem na tloušťku mezní vrstvy kritická.

5.2.3 Spektra

V předchozích kapitolách bylo možné pozorovat rychlostní pole a s ním určité rozdíly v chování proudění v závislosti na magnetickém Taylorově čísle. Jak již bylo zmíněno při pozorování okamžitého rychlostního pole, čím větší bylo Taylorovo číslo, tím intenzivnější byly také nestability, které se vytvářejí převážně v okrajové mezní vrstvě. Navíc rozložení azimutální rychlosti ve válcové nádobě je nesymetrické a do určité míry bylo možné pozorovat, že míra oscilace azimutální rychlosti se mění s hodnotou magnetického Taylorova čísla. Na obrázku 5.11 je možné pozorovat vývoj azimutální rychlosti v závislosti na čase a v pozici, která je definována $r = 0.75R$ a $z = 0.5H$. Jak bylo prokázáno na časově zprůměrovaném azimutálním rychlostním poli, tato pozice odpovídá místu, kde je dosažena maximální hodnota azimutální rychlosti v příslušném horizontálním řezu. (Maximální hodnoty azimutální rychlosti v rámci celého výpočetního objemu jsou soustředěny v blízkosti koncových stěn nádob.)

Obrázek 5.11 zachycuje signál azimutální rychlosti pro tři různé hodnoty magnetického Taylorova čísla, avšak pokaždé pro stejný časový interval. Společným rysem všech časových průběhů azimutálních rychlostí je oscilace rychlostí. Tato oscilace v rychlostním poli znamená, že proudění již není skutečné laminární, a že nelineární procesy se stávají dominantní a vznikající fluktuace je čistě náhodná. Vzájemným porovnáním mezi jednotlivými

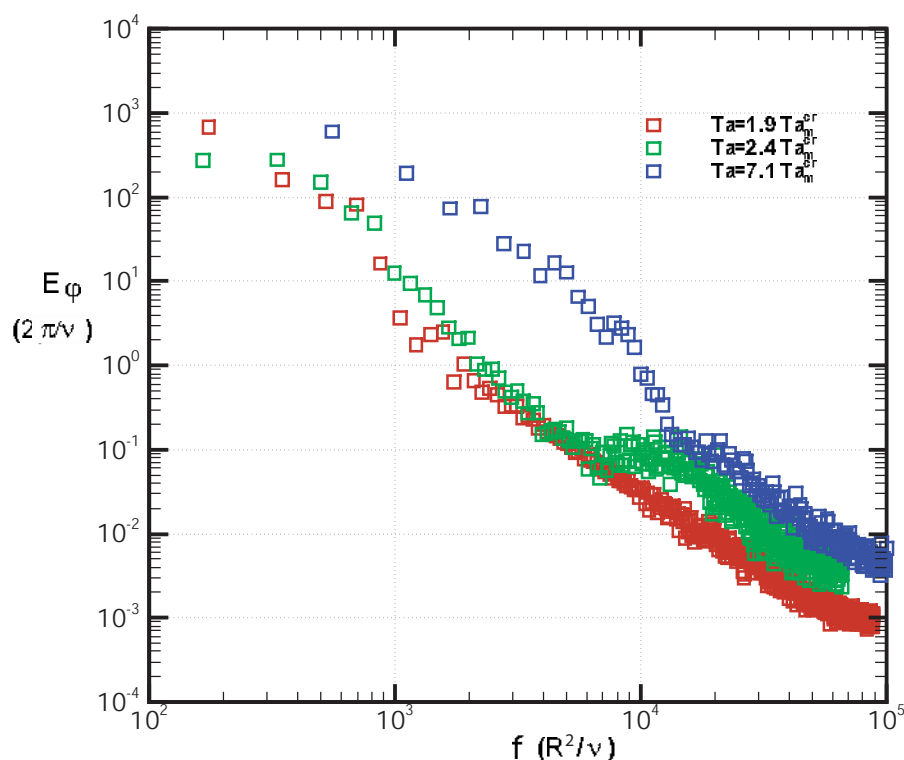


Obrázek 5.11: Časový průběh okamžité azimutální rychlosti pro pozici definovanou $r=0.75R$ a $z=0.5H$ a různou hodnotou magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m=1.9Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m=2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m=7.1Ta_m^{cr}$

Taylorovými čísly lze odvodit, že průběhy vykazují výrazné odlišnosti, které byly zřetelné také přímo při vizualizaci okamžitého rychlostního pole. V případě Taylorova čísla $Ta=1.9Ta_m^{cr}$ je průběh téměř hladký, jevy spojené s vysokou frekvencí jsou téměř zanedbatelné. Naopak, jestliže Taylorovo číslo dosáhne hodnoty $Ta=2.4Ta_m^{cr}$, pak je možné v rychlostním průběhu zaznamenat malé oscilace, které se projevují obzvláště velmi vysokými frekvencemi. U Taylorova čísla $Ta=7.1Ta_m^{cr}$ je oscilace již markantnější. Právě stále větší posun směrem k vyšším hodnotám frekvencí znamená stálý posun směrem k turbulentnímu proudění. Tento závěr byl učiněn na základě průběhu azimutální rychlosti v místě středu válcové nádoby, avšak toto chování je typické také pro jiné pozice v rámci zkoumaného objemu válcové nádoby.

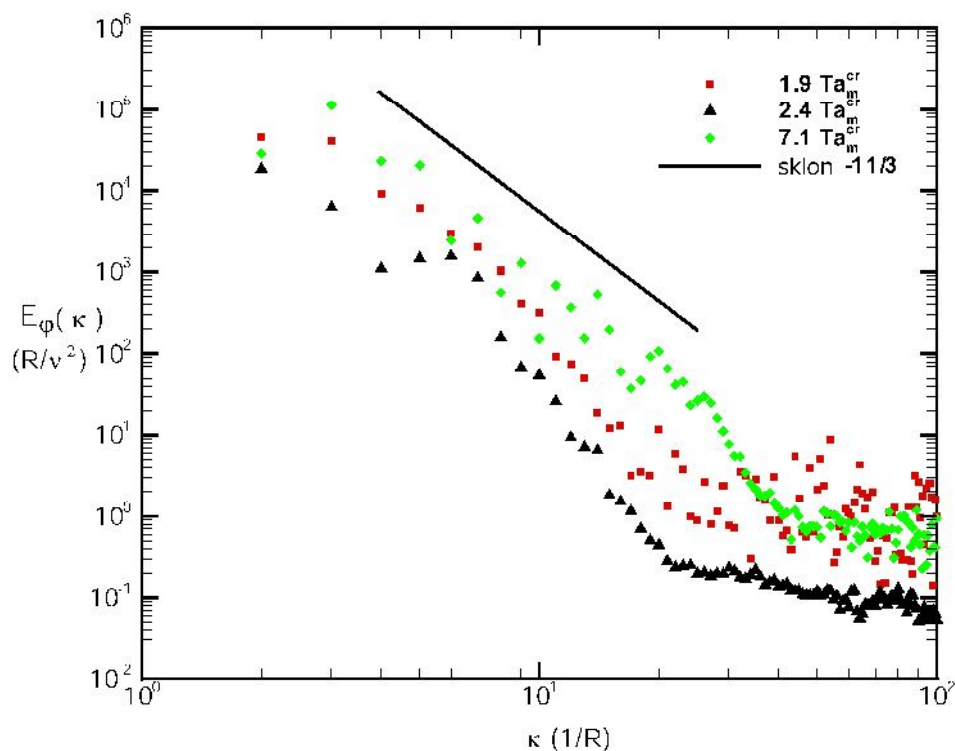
Frekvenční energetické spektrum definující rozložení energie podél zkoumaného frekvenčního pásma je ukázáno na obrázku 5.12. Frekvenční spektrum bylo vyhodnoceno na základě signálu azimutální rychlosti na pozici $r = 0.75R$ a výšky $z = 0.5H$. Proto, aby bylo možné vytvořit frekvenční energetické spektrum, je nutné mít k dispozici dostatečné množství údajů vždy pro jednu veličinu a stejnou pozici, například v našem případě řadu po sobě jdoucích hodnot azimutální rychlosti, shromážděnou během výpočtu pro určitou pevnou pozici se stejným časovým krokem. Z praktického hlediska je lepší mít mnohem větší množství údajů, které by postačily na eventuelní zprůměrování spekter, kdy je možné získat mnohem hladší průběh energetického spektra. Ve většině případů dochází v případě průměrování ke zkrácení pozorovaného rozsahu frekvence, avšak toto omezení se projevuje u nejnižších frekvencí a je-li k dispozici dostatečné množství dat, pak je toto omezení zanedbatelné.

Obrázek 5.12 znázorňuje energetické frekvenční spektrum. Barevné označení je použito



Obrázek 5.12: Spektrální hustota energie azimutálního proudění pro případy magnetického Taylorova čísla. (a) $Ta_m = 1.9 Ta_m^{cr}$ (b) $Ta_m = 2.4 Ta_m^{cr}$ and (c) $Ta_m = 7.1 Ta_m^{cr}$

k rozlišení frekvenčních spekter vždy pro určitou hodnotu magnetického Taylorova čísla. Na vodorovné ose je znázorněna hodnota bezdimenzionální frekvence a vertikální osa pak znázorňuje energii. Společným rysem všech spekter resp. všech pozorovaných případů Taylorových čísel je fakt, že největší množství energie je obsaženo u struktur o nízkých frekvencích, přičemž od určité frekvence směrem k nižším frekvencím zůstává rozložení energie přibližně konstantní. Naopak v oblasti vyšších hodnot frekvencí je možné pozorovat určité odlišnosti v závislosti na magnetickém Taylorovu čísle. V první řadě, je-li Taylorovo číslo mírně vyšší $Ta = 2.4 Ta_m^{cr}$, pak se nárůst energie projeví lokálním zvýšením zhruba v oblasti bezdimenzionální frekvence 10^4 . Toto navýšení je možné velmi dobře konfrontovat se signálem azimutální rychlosti, neboť při stejné hodnotě magnetického Taylorova čísla dochází ke vzniku malých oscilací (viz výše). Dosáhne-li magnetické Taylorovo číslo hodnoty $Ta = 7.1 Ta_m^{cr}$, pak nárůst se projevuje opět převážně kolem hodnoty bezdimenzionální frekvence 10^4 (absolutní hodnota



Obrázek 5.13: Spektrální hustota energie okamžitého azimutálního proudění.

frekvence odpovídá hodnotě 3.77 Hz), ovšem tento nárůst energie je výraznější a postupuje intenzivněji převážně směrem k nižší frekvenci. Tento případ odpovídá časovému průběhu signálu azimutální rychlosti, neboť v případě Taylorova čísla $7.1Ta_m^{cr}$ je možné pozorovat dominantní struktury malých frekvencí a méně intenzivní při vyšších frekvencích.

Kromě těchto zmíněných závěrů lze z frekvenčního spektra mimo jiné dovodit, že v celém zkoumaném frekvenčním rozsahu nebyla nalezena významná dominantní frekvence. Tak se proudění z hlediska azimutální rychlosti jeví jako stochastické proudění.

V úvodu této kapitoly byla také zmíněna některá fakta ovlivňující generování výpočetní sítě. Velmi stručně bylo naznačeno, jakým způsobem je možné provést odhad požadované velikosti sítě v závislosti na předpokládaném Reynoldsově čísle. V následujícím odstavci je možné nalézt definitivní odpověď, zda-li použitá výpočetní síť je dostatečně jemná pro zde prezentované výpočty DNS.

Obrázek 5.13 představuje opět energetické spektrum rozložení energie azimutální rych-

losti v rozsahu sledovaných vlnových čísel. Opětovně je použito také bezrozměrné vyjádření energetického spektra pomocí bezrozměrných hodnot vlnového čísla. Jak je patrné, spektrum je ukončeno v rozsahu dlouhých vlnových číslech průběhem s velmi malou hodnotou hustoty spektrální energie. Tuto malou hodnotu je možné chápat jako numerický šum a považovat ji jako nulovou výchozí hodnotu. Pak lze konstatovat, že celé energetické spektrum bylo vypočtené pro celý rozsah vlnových čísel. Z praktického hlediska je to zároveň důkaz o tom, že vytvořená výpočetní síť je dostatečně jemná na výpočet všech délkových měřítek, které se mohou v proudění objevit. Kromě toho lze stanovit tendenci poklesu energie fluktuací v závislosti na rostoucím vlnovém čísle, která je charakterizována sklonem $-11/3$. I v tomto případě je možné také sledovat vliv velikosti magnetického Taylorova čísla. Jak je vidět z obrázku 5.13, všechny zde analyzované případy mají zhruba identický sklon energetického spektra.

5.2.4 Vírové struktury

Na základě dosavadních zde publikovaných výsledků rychlostního pole a rovněž tak časového průběhu hlavní azimutální rychlosti bylo naznačeno, že v proudění existují pravděpodobně určité vírové struktury. Jejich identifikace a pozorování může být klíčem k objasnění fyzikálních jevů v tekutině. Jak již bylo zmíněno výše, již z výsledků okamžitého rychlostního pole je zřejmé, že v blízkosti bočních stěn se formují struktury tvořené vždy dvojicí opačně orientovaných vírů. Tím bylo naznačeno, že tyto struktury pravděpodobně existují a další otázkou je tudíž jejich identifikace. K vizualizaci vírových struktur se použila dvě kritéria, která se běžně používají a jsou to kritéria Q a Q' , které se nazývají v cizí literatuře jako „second invariant of the velocity gradient tensor“. Výhodou těchto kritérií je identifikace malých struktur resp. vírů v proudění, kde výrazně převládá rotace nad smykovým napětím. Bližší popis této metody vizualizace je možné nalézt u CHONG [53] nebo v literatuře [76].

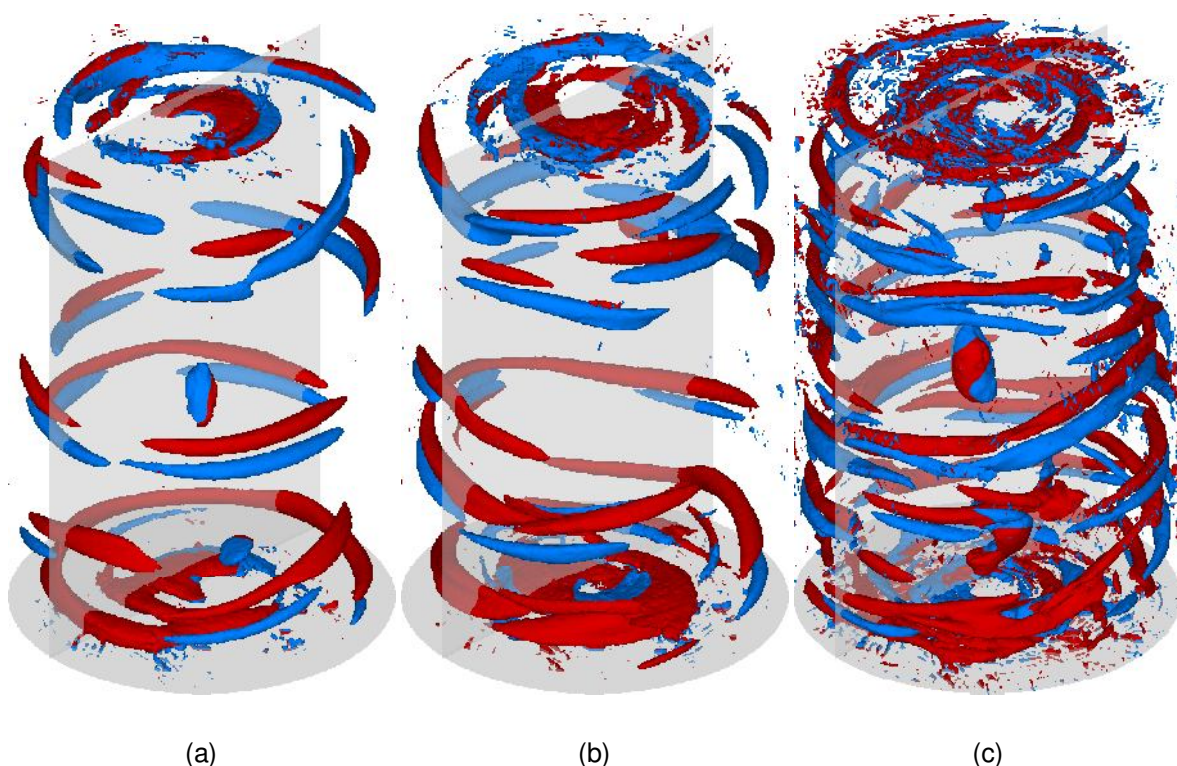
$$Q = -\frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij} + \Omega_{ij}\Omega_{ij}) \quad (5.5)$$

Kritérium Q je definováno vztahem (5.5), kde S_{ij} označuje napěťový tenzor a je definován vztahem (5.6) a (Ω_{ij}) je tenzor rotace daný vztahem (5.7). Q je skalární veličina a k znázornění struktur se použijí izoplochy této hodnoty.

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i}\right) \quad (5.6)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} - \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) \quad (5.7)$$

Jestliže se k vizualizaci dominantních struktur použije Q kritérium, pak hledané struktury pro 3 různá magnetická Taylorova čísla jsou dána obrázkem 5.14. Barevné označení struktury umožňuje rozlišení orientace struktury z pohledu jejich rotace.



Obrázek 5.14: Struktury znázorněné pomocí Q kritéria, dvoubarevné znázornění představuje orientaci rotace struktur. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ a (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

Jak je patrné z obrázku 5.14, mezi výsledky s různou hodnotou magnetického Taylorova čísla existují podobnosti a rovněž také rozdílnosti. Mezi společné rysy patří, že se vždy vytváří jeden pár struktur, který se pohybuje společně a který se rozpadá v blízkosti koncových stěn nádoby. Disipace struktur je pak patrná na dně nebo víku nádoby. Struktury jsou lokalizovány převážně v blízkosti stěn nádoby. Jejich velikost je nerovnoměrná a jejich umístění rovněž nerespektuje symetrické rozvržení. Kromě společných rysů je možné si také všimnout určitých rozdílů. Tyto rozdíly jsou dány velikostí magnetického Taylorova čísla. Jestliže je Taylorovo číslo blízké kritickému Taylorovu číslu, pak vírové struktury přibývají, jsou mnohem

výraznější a mají hladký charakter s jasně definovaným ohraničením. Vyskytují se více odděleně v porovnání k těm s vyšším Taylorovým číslem. Čím větší je pak Taylorovo číslo, tím pravděpodobněji se proudění posouvá směrem k turbulentnímu proudění a tím více se tento fakt projevuje také na těchto strukturách. Ty se stávají menší a jejich počet roste. Rovněž změna jejich tvaru je patrná. Všechny tyto rysy lze odvodit na základě pozorování struktur v rámci jednoho časového okamžiku.

Výhodou Q kritéria je fakt, že tato vizualizační metoda znázornění struktur je v podstatě velmi jednoduchá, neboť nevyžaduje kromě okamžitého rychlostního pole žádné jiné hodnoty. Jinou variantou je tzv. Q' kritérium, které má několik nesporných výhod v porovnání s Q kritériem. Aby bylo možné vůbec realizovat Q' kritérium, je nutné kromě okamžitého rychlostního pole také znát časově zprůměrovanou hodnotu téhož rychlostního pole. Tím je také známá hodnota flukтуаční složky rychlostního pole daná vztahem (5.8).

$$u = \langle u \rangle + u' \quad (5.8)$$

Jaké úskalí je skryto v případě ideálně časově zprůměrovaných hodnot bylo již zmíněno v předchozích kapitolách. Předpokládáme-li, že časově zprůměrované hodnoty jsou známy, pak kritérium Q' je dáno vztahem (5.9).

$$Q' = -\frac{1}{2}(S'_{ij}S'_{ij} + \Omega'_{ij}\Omega'_{ij}) \quad (5.9)$$

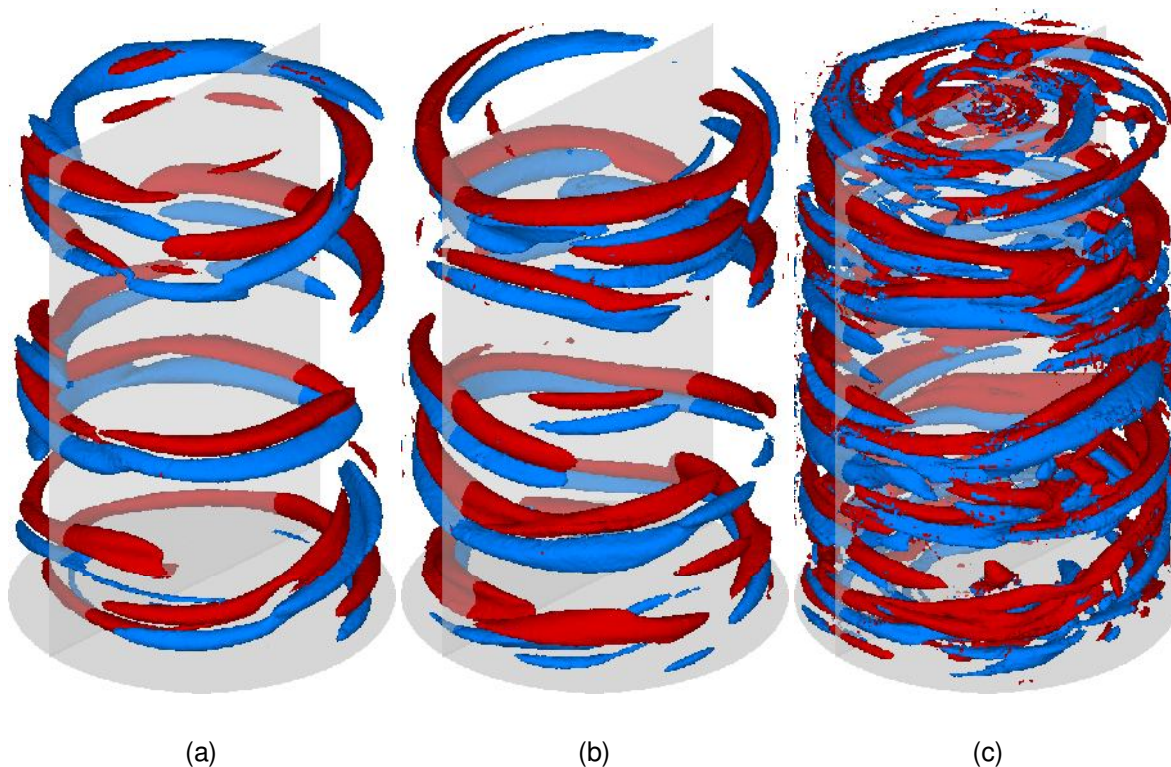
Ve vztahu (5.9) označuje S'_{ij} flukтуаční část napětového tenzoru a Ω'_{ij} flukтуаční rotační tenzor a jejich přesná definice je dána vztahy (5.10) a (5.11).

$$S'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u'_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u'_j}{\delta x_i}\right) \quad (5.10)$$

$$\Omega'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u'_i}{\delta x_j} - \frac{\delta u'_j}{\delta x_i}\right) \quad (5.11)$$

Vizualizace pomocí Q' kritéria viz obrázek 5.15 odhalila podobné dominantní struktury jako v případě Q kritéria. Barevné označení struktur a rovněž tak jejich znázornění je velmi

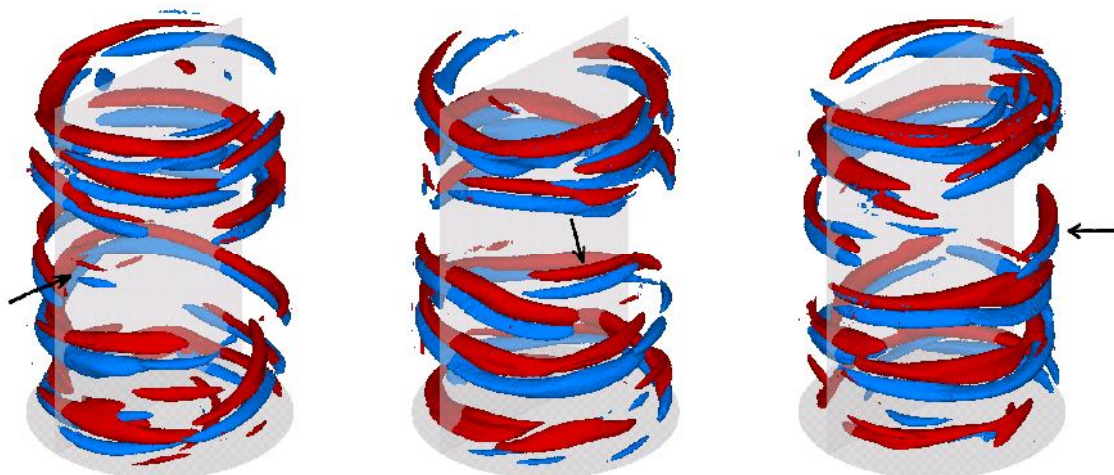
podobné technice popsané výše. Z hlediska jejich vzájemného srovnání, z pohledu metodiky znázornění, je možné pozorovat určité difference. Za prvé je zřetelné, že je-li Taylorovo číslo menší, pak oblast disipace vírových struktur na dně resp. víku nádoby je potlačena. Jistá míra disipace je zřetelná až při větším Taylorově čísle. Z tohoto důvodu se využívá k vyhodnocení výsledků obojí možnosti vizualizace a vzájemného srovnání. Naopak použije-li se kritérium Q' , jsou znázorněné struktury zřetelnější a rušivé jevy jsou odfiltrovány. Charakteristika nalezených struktur je obdobná té, která byla učiněna dříve na základě Q kritéria.



Obrázek 5.15: Vírové struktury znázorněné pomocí Q' kritéria. Dvoubarevné označení znázorňuje smysl rotace vírů. (a) $Ta_m = 1.9Ta_m^{cr}$ a (b) $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$ a (c) $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$

Další pozorování identifikovaných struktur je možné učinit na základě nestacionárního chování. K tomuto účelu je nutno mít k dispozici hned několik výsledků charakterizujících určitou časovou pozici. Opět i zde je možné definovat společné rysy, které jsou platné pro širší oblast magnetických Taylorových čísel. Pouhým pozorováním lze konstatovat, že struktury se vytvářejí podél obvodu nádoby zcela nepravidelně. Některé z nich dosáhnou koncových stěn nádoby, kde se rozpadnou, jiné disipují již během svého pohybu podél obvodových hran nádoby. Navíc, dosahuje-li Taylorovo číslo vyšších hodnot, pak lze zřetelně sledovat také produkci a disipaci těchto struktur během jejich pohybu. Mnohem častěji také dochází

k interakci mezi nimi resp. spojení několika struktur do jedné velké struktury a rovněž tak k jejich rozpadu opět na několik menších struktur.



Obrázek 5.16: Časový vývoj znázorněných vírů pro případ $Ta_m = 2.4Ta_m^{cr}$. Obrázky znázorňují vývoj páru struktur a jejich následný pohyb.

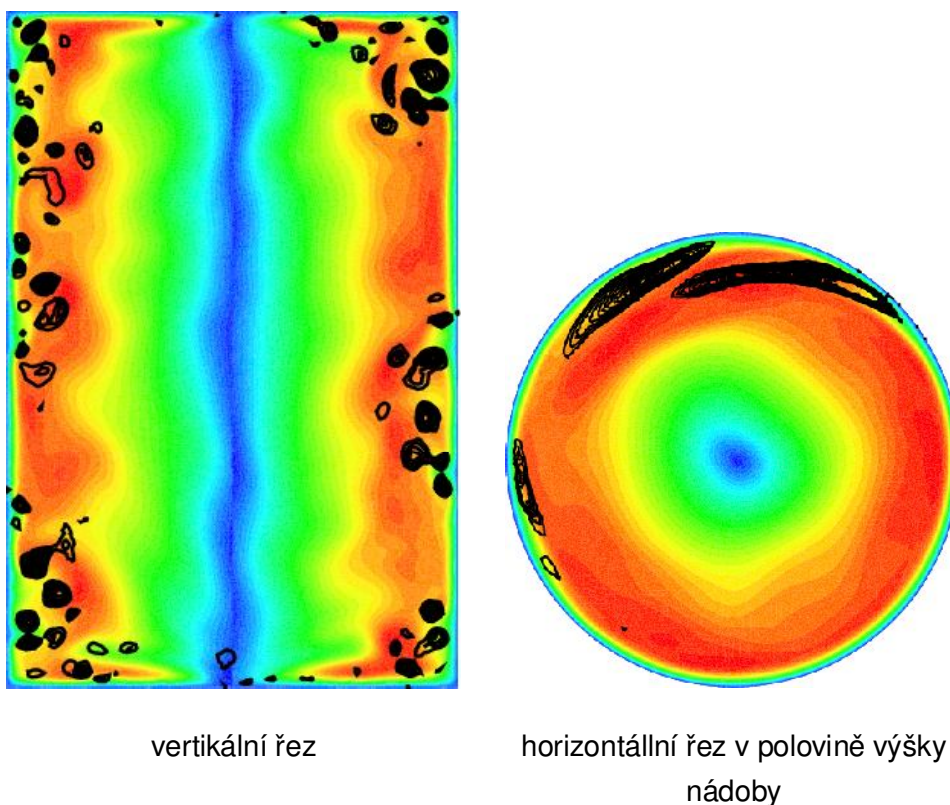
Na rozdíl od výsledků GELFGAT a PRIDE [26] nelze z určitosti potvrdit, že identifikované struktury skutečně dosáhnou koncových stěn nádoby, kde se rozpadnou prostřednictvím disipace. Dosavadní studie dominantních struktur spíše ukazuje na fakt, že tyto struktury se pohybují podél obvodových stěn, aniž by vykonávaly zřetelný pohyb směrem ke koncovým stěnám, resp. některé z nich se sice spirálně přemísťují tímto směrem, ale většina z nich nedosáhne koncových stěn. Při detailnějším pohledu na dynamiku struktur lze možná naznačit, že struktury se pohybují ke svým koncovým stěnám pouze tehdy, nacházejí-li se v blízkosti právě koncových stěn. Jestliže však vznikající pár struktur vznikl někde uprostřed nádoby, bude se otáčet spolu s azimutální rychlostí až do té doby, než bude prakticky úplně disipován (utlumen) a aniž by se přemístil směrem ke koncům nádoby. Tento fakt by mohl být částečně vysvětlen skutečností, že struktury se pohybují ke koncovým stěnám nádoby vlivem účinku sekundárního proudění, které je nejintenzivnější právě v blízkosti koncových stěn. Naopak uprostřed výšky nádoby bude intenzita sekundárního proudění velmi malá a pravděpodobně nemá dostatečnou sílu uvést vzniklou strukturu do pohybu směrem ke koncovým stěnám.

Na obrázku 5.16 je graficky znázorněn vývoj dominantních identifikovaných struktur typický pro případ nadkritického proudění, který potvrzuje některé skutečnosti, které již byly řečeny. Jak je možné pozorovat, někde uprostřed válcové nádoby vznikají dva víry, jejichž intenzita s časovým vývojem roste a zároveň obě struktury společně rotují podél vertikální osy

v blízkosti obvodové stěny nádoby. Toto je charakteristický případ pro magnetické Taylorovo číslo $Ta = 2.4Ta_m^{cr}$.

5.2.5 Vírové struktury a okamžité rychlostní pole

V oblasti nadkritických Taylorových čísel existují dominantní struktury, jejichž identifikace byla uskutečněna v předchozí kapitole (viz obrázek 5.15 popř. 5.14) a dále je známo, že v mezní vrstvě na vertikálních stěnách nádoby vznikají nestability Taylor-Görtlerova typu. Tyto nestability, které tvarově připomínají prst kolmo orientovaný ke kolmým stěnám válcové nádoby mohou být velice dobře rozeznány na obrázku 5.17. Jak je patrné, jejich tvar nemusí být závislý na velikosti magnetického Taylorova čísla. Jejich výskyt je nesymetricky rozložený podobně jako je nesymetricky rozložené rychlostní pole v azimutálním a rovněž také ve vertikálním směru.



Obrázek 5.17: Okamžitá azimutální rychlost znázorněná společně s dominantní strukturou (Q') pro konkrétní případ magnetického Taylorova čísla: $Ta_m = 7.1Ta_m^{cr}$.

Na obrázku 5.17 je možné pozorovat znázornění azimutální okamžité rychlosti a sou-

časně aktuální pozici dominantní struktury, která je identifikována pomocí Q' kritéria. Kromě vertikálního řezu válcovou nádobou (vlevo) je také možné vidět horizontální řez (vpravo). Barevné označení reprezentuje okamžitou azimutální rychlost, přičemž červená barva znázorňuje maximální hodnoty a černá barva zastupuje identifikovanou dominantní strukturu resp. vír. Obecně je možné pozorovat, že nestability se vyskytují současně s párem dvou struktur resp. vírů. Tento závěr potvrzuje obecně známé fakta ohledně vzniku struktur SARIC [79]. Na základě barevného označení struktur bylo již řečeno, že se vytváří vždy jeden pár dvou opačně orientovaných vírů (viz obrázek 5.15).

Takovýmto způsobem je možné pozorovat současně vznikající nestability a existence dominantních struktur včetně vlivu na okamžitou azimutální rychlost. Obrázek 5.17 (vpravo) popisuje podobný jev, avšak jak již bylo zmíněno dříve, v azimutálním rychlostním poli se objevuje ještě tzv. azimutální oscilace resp. deformace azimutálního rychlostního pole. Tato deformace rychlostního pole se stává intenzivnější, tak jak narůstá hodnota magnetického Taylorova čísla. Jak ukazuje obrázek 5.17 (vpravo), existuje souvislost mezi touto deformací a výskytem dominantních struktur. Bohužel dosavadní studie nedokáže zodpovědět, do jaké míry ovlivňují nestability dominantní struktury a oscilaci azimutální rychlosti v obvodovém směru proudění.

5.2.6 Charakteristické vlastnosti proudění

Tak jako u laminárního proudění je možné definovat poměr mezi hlavním rotačním prouděním a sekundárním prouděním, je možné podobné vyjádření učinit pro případ nadkritického turbulentního proudění. Ovšem oproti laminárnímu režimu je situace v oblasti přechodového proudění poněkud složitější. Aby bylo možné výsledky, definující různé magnetické Taylorovo číslo vůbec věrohodně porovnat, je nutné použít časově zprůměrované hodnoty rychlostního pole. Hlavní rotační proudění je dáno časově zprůměrovanou hodnotou azimutální rychlosti $\langle u_\varphi \rangle_{max}$ a sekundární proudění lze vyjádřit vztahem 5.12.

$$\langle u_{mer} \rangle_{max} = \max(\sqrt{\langle u_r \rangle^2 + \langle u_z \rangle^2}) \quad (5.12)$$

V tabulce 5.1 je možné vidět vztah mezi maximální hodnotou sekundárního a azimutálního proudění. Tento poměr se ustaluje zhruba kolem hodnoty 0.45, což mimo jiné charakterizuje, že maximální intenzita sekundárního proudění je přibližně poloviční oproti maximální hodnotě hlavního rotujícího proudění.

Ta	$\langle u_{mer} \rangle_{max}$	$\langle u_{\varphi} \rangle_{max}$	$\frac{\langle u_{mer} \rangle_{max}}{\langle u_{\varphi} \rangle_{max}}$
$8 \cdot 10^4$	0.00401	0.00938	0.427
$1 \cdot 10^5$	0.00456	0.01032	0.442
$3 \cdot 10^5$	0.01024	0.02286	0.448

Tabulka 5.1: Maximální hodnoty hlavního azimutálního proudění a vedlejšího sekundárního proudění pro případy $Ta_m = 8 \times 10^4$, $Ta_m = 1 \times 10^5$ a $Ta_m = 3 \times 10^5$.

Jak je možné dále vyvodit z tabulky 5.1, hodnota poměru maximální rychlosti sekundárního proudění a azimutální rychlosti zůstává zhruba konstantní v celém rozsahu zde numericky analyzovaných Taylorových čísel. V oblastech nízkých Taylorových čísel byl pozorován lineární nárůst tohoto poměru v závislosti na magnetickém Taylorově čísle. Od hodnoty $Ta_m=1000$ už není tento nárůst lineární a jeho hodnota dosáhne maximální hodnoty v oblasti již přechodového proudění a poté, jak již bylo řečeno, zůstává téměř konstantní.

	$Ta_m = 8 \cdot 10^4$		$Ta_m = 1 \cdot 10^5$		$Ta_m = 3 \cdot 10^5$	
H	$ u'_{\varphi} _{max}$	$\frac{ u'_{\varphi} _{max}}{u_{\varphi} _{max}}$	$ u'_{\varphi} _{max}$	$\frac{ u'_{\varphi} _{max}}{u_{\varphi} _{max}}$	$ u'_{\varphi} _{max}$	$\frac{ u'_{\varphi} _{max}}{u_{\varphi} _{max}}$
0.023H	0.003196	0.341	0.00226	0.22	0.00965	0.42
0.33H	0.00161	0.172	0.00135	0.13	0.00717	0.313
0.5H	0.001684	0.18	0.00171	0.166	0.00543	0.24

Tabulka 5.2: Číselné vyjádření maximální amplitudy fluktuace v nadkritickém proudění pro případy magnetického Taylorova čísla $Ta_m = 8 \times 10^4$, $Ta_m = 1 \times 10^5$ a $Ta_m = 3 \times 10^5$.

Jak se chová azimutální proudění z hlediska oscilace proudu ve válcové nádobě je možné vidět v tabulce 5.2. Tabulka popisuje maximální hodnotu fluktuační odchylky $|u'_{\varphi}|_{max}$, která byla stanovena v určitém časovém intervalu, stejně velikém pro všechny 3 případy velikosti magnetického Taylorova čísla. Tato tzv. maximální odchylka byla určována na pozici poloviny výšky válcové nádoby 0.5H dále v 1/3H a těsně u víka nádoby ve vzdálenosti 0.95H. Navíc v tabulce je ještě vyjádřen poměr maximální odchylky azimutální rychlosti k maximální hodnotě azimutální rychlosti $\frac{|u'_{\varphi}|_{max}}{u_{\varphi}|_{max}}$.

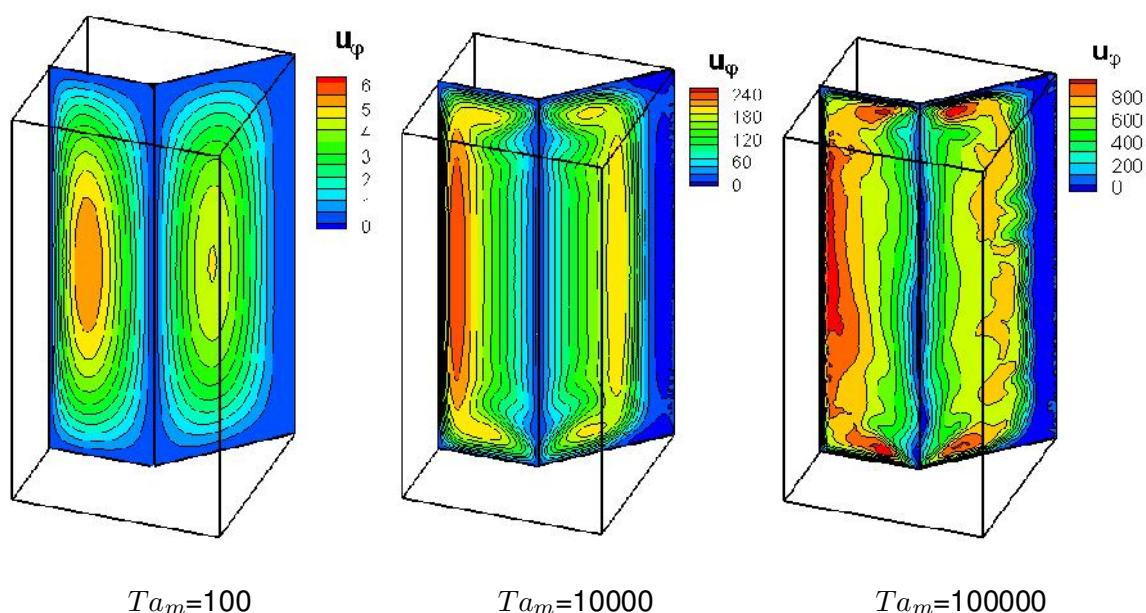
časoprostorová zprůměrovaná hodnota azimutální rychlosti

$$\overline{u_{\varphi}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u_{\varphi} d\Omega \quad (5.13)$$

časoprostorová zprůměrovaná hodnota azimutální momentu

$$\overline{r \langle u_\varphi \rangle} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} r \langle u_\varphi \rangle d\Omega \quad (5.14)$$

Jak ukazuje tabulka 5.2, maximální fluktuační hodnota $|u'_\varphi|_{max}$ se zvyšuje v polovině výšky nádoby s tím, jak se zvyšuje hodnota magnetického Taylorova čísla Ta_m . Tento fakt lze vysvětlit tak, že čím vyšší je hodnota Taylorova čísla, tím také roste hodnota Reynoldsova čísla a to má za následek, že proudění se více blíží k turbulentnímu proudění. Maximální fluktuace proudění lze nalézt přímo u koncových stěn nádoby tedy v blízkosti víka a dna nádoby.



Obrázek 5.18: Normalizované azimutální rychlostní pole ve vertikálních řezech nádoby pro různé hodnoty Taylorova čísla

Číselná charakteristika proudění má de facto doplňující charakter k již dříve zde uvedeným výsledkům v oblasti rychlostního pole a identifikace struktur. Další informace k tématu přechodového a turbulentního proudění je možné nalézt v literatuře FRAŇA, STILLER a GRUNDMANN [39] a [38] nebo STILLER a FRAŇA [28] a [29]. V kapitole 9 je uskutečněno porovnání numerických výsledků s výsledky publikovanými jinými autory, eventuálně s experimentem. Tím se ověří platnost získaných numerických výsledků.

5.3 Osově nesymetrická nádoba

Na obrázcích 5.18 jsou znázorněny okamžité hodnoty azimutální složky rychlosti ve dvou vertikálních řezech pro nádobu s poměrem šířky a výšky nádoby v poměru 1:2a v případě osově nesymetrické nádoby. Tyto výpočty byly umožněny doplněním výpočetního programu NS-FEM3D o nové moduly především v oblasti výpočtu externích Lorentzových sil.

Při velikosti $Ta_m = 1 \times 10^5$ je vidět již vznik oscilací a nestabilit v proudění. Maximální hodnoty rychlostí se objevují v blízkosti vertikální stěny a na dně a víku nádoby. U malých hodnot Taylorova čísla je vidět rovnoměrné rozložení rychlostního pole a maximální hodnotou přibližně v polovině vzdálenosti od osy nádoby k vertikální stěně. Se zvyšujícím se Taylorovým číslem se posouvají maximální hodnoty azimutální rychlosti směrem k vertikální stěně.

Kapitola 6

Rotující magnetické pole - turbulentní režim

6.1 Využití turbulentních modelů v magneticky poháněných prouděch

Vliv anizotropie proudění v souvislosti s běžně používanými turbulentními modely (modely založené na lineární turbulentní viskozitě) je studován v literatuře JARKILICE [70], YUANA [71], SPEZIALEHO [8] a RUBINSTEINA [68].

Již v definici dvourovnicových turbulentních modelů $k - \varepsilon$ nebo $k - \omega$ je obsažena slabost modelu ve smyslu simulace zakřivených či rotujícího proudění, neboť žádná z rovnic neobsahuje výrazy pro silně rotující rychlostní pole. Přirozeně se sice částečně zahrne vliv zakřiveného proudu do řešení prostřednictvím rychlostního a tlakového pole, ovšem tento vliv je velmi slabý (JARKILIC [70]). Praktické numerické testy simulace tohoto druhu proudění částečně potvrzují slabost těchto turbulentních modelů JARKILIC [70], ovšem existují i práce, kde tyto jednoduché turbulentní modely dosáhly lepších výsledků než jejich složitější varianty LAI [81]. Tato skutečnost se vysvětluje existencí více různých efektů v proudění, které při řešení turbulentního modelu přináší nepřesnosti do řešení, které se ovšem mohou v konečné fázi vykompenzovat.

SPEZIALE [8] se věnoval testu turbulentních modelů $k - \varepsilon$ a jeho lineární a nelineární varianty včetně RNG varianty. Studie se zaměřila na proudění složené ze smykového a rotačního pohybu tekutiny. Obecně platil závěr, že RNG varianta dosáhla nejhoršího vý-

sledku obzvláště pro proudění, kde převládá zřetelně rotující pohyb tekutiny nad smykovým pohybem.

V případě silné anizotropie smykových napětí v proudění jsou mnohdy výsledky z numerické simulace pomocí nelineárních turbulentních modelů $k - \varepsilon$ a to s variantou pro nízká Re čísla a s různou metodou modelování stěnové mezní vrstvy neuspokojivé [71]. Velmi zajímavé výsledky byly ovšem získány pomocí URANS modelů (WEGNER [5]), resp. turbulentních modelů, kde turbulence je modelována, zatímco nestacionární časově zprůměrované toky jsou počítány přímo. Tyto modely mohou mít velmi zajímavou aplikaci rovněž i na některé případy proudění v magnetohydrodynamice, neboť nestacionární jevy jsou v proudění mnohdy významné. Všechny zde zmíněné studie neuvažovaly vznik Jouleovy turbulentní disipace, která ovlivňuje turbulentní transport tepla a hmoty v proudění. Mnohem složitější modely založené na definici $k - \varepsilon$ modelu, které podchycují zde zmíněný jev, lze nalézt v literatuře WIDLUNDA [56]. V rámci zde prezentované práce zůstanou tyto složitější turbulentní modely pro svoji komplikovanou stavbu prozatím stranou, neboť pro praktické aplikace jsou jejich vlivy na konečné výsledky zanedbatelné.

6.1.1 Definice bezrozměrných veličin

Bezrozměrné veličiny a parametry jsou použity pro porovnávací studii výsledků z turbulentních modelů. Délkové rozměry jako je poloměr nádoby R a výška nádoby H jsou definovány v bezrozměrné formě ve vztahu 6.1.

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad z^* = \frac{z}{H} \quad (6.1)$$

Časově zprůměrovaná rychlost vyjádřená v bezdimenzionální formě je uvedena ve vztahu 6.2, kde ν je kinematická viskozita tekutiny.

$$u^* = \frac{uR}{\nu} \quad (6.2)$$

Rovněž normálové složky Reynoldsova napětí a turbulentní kinetická energie jsou vyjádřeny v bezdimenzionální formě dle vztahů 6.3.

$$\langle u'_i u'_i \rangle^* = \frac{\langle u'_i u'_i \rangle R^2}{\nu^2}, \quad k'^* = \frac{k' R^2}{\nu^2} \quad (6.3)$$

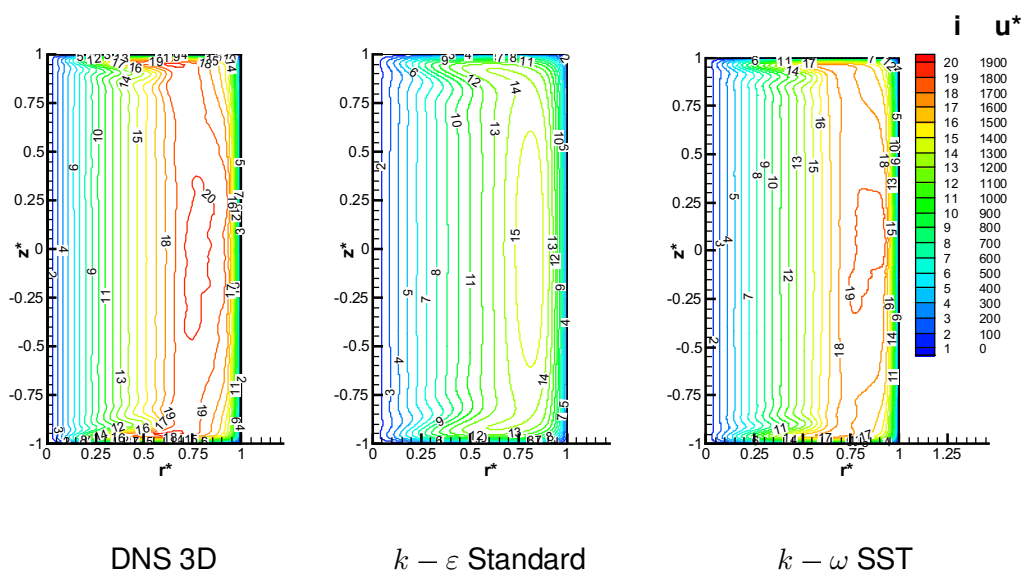
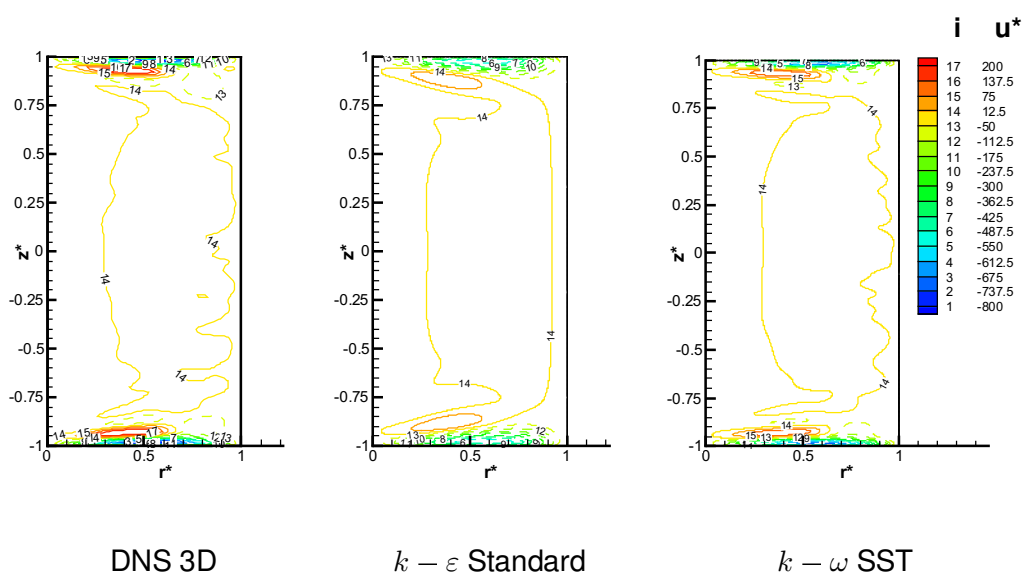
6.1.2 Výpočetní síť

Výpočetní síť 3D DNS studie obsahuje 9.7×10^6 výpočetních elementů, přičemž síť je zjemněna na okraji pevných stěn tak, aby její hustota byla $R/120$ a uvnitř nádoby je hustota sítě zhruba $R/60$. Nerovnoměrnou výpočetní sítí se tak dosáhlo velkého rozlišení především u stěn nádoby, kde se objevují nejvýraznější gradienty rychlostí. Výpočetní síť 2D studie je založena na axisymetrické úloze, takže síť obsahuje pouze 3×10^4 elementů s odpovídající hustotou sítě $R/100$ v rámci celého výpočetního objemu.

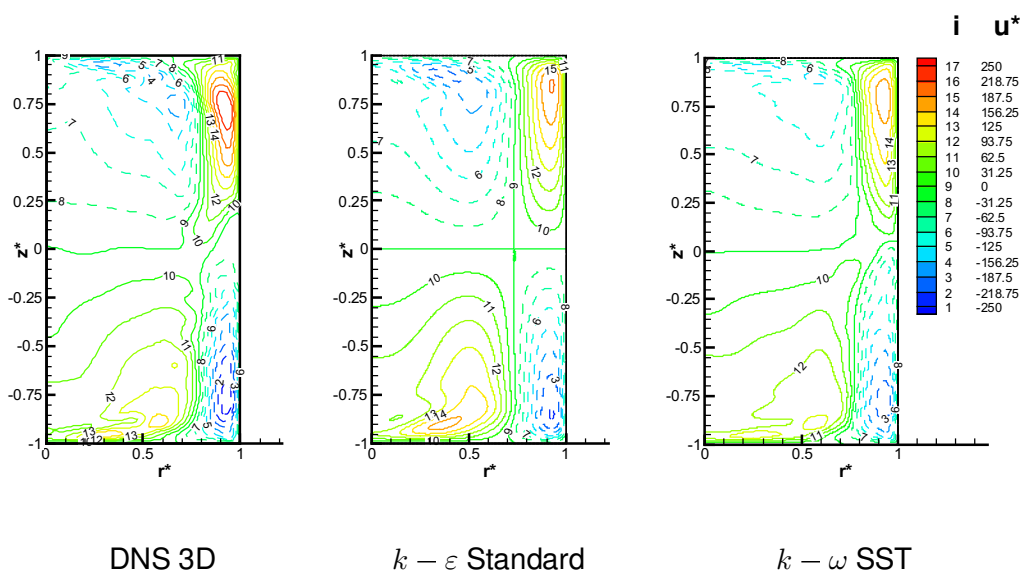
6.1.3 Časově středované rychlostní pole

V oblasti ustáleného vyvinutého proudění se statisticky zpracovává rychlostní pole pro azimutální, radiální a axiální složky rychlosti. Na obrázku 6.8 jsou vidět rychlostní pole v řezech válcovou nádobou. Obrázek 6.1 zobrazuje azimutální složku časově středované rychlosti pro DNS 3D a turbulentní modely $k - \varepsilon$ Standard a $k - \omega$ SST. Hodnoty rychlostního pole jsou v bezdimenzionálním tvaru a legenda k hodnotám je vypracována společně pro všechny řešené případy. Azimutální složka rychlosti představuje rotující proudění, přičemž z hlediska kinetické energie je toto proudění asi 1000x intenzivnější, než je tomu u zbylých dvou složek. Z tohoto důvodu je právě porovnání azimutální složky rychlosti podstatné. Na první pohled je patrné, že výsledky $k - \omega$ modelu jsou nejbližší k výsledkům 3D DNS studie. V obou případech se objevuje nesouměrnost izočár rychlostí, související s časovými efekty, které i po dlouhé době časového průměrování zůstávají patrné v rychlostních polích. Azimutální rychlostní pole získané prostřednictvím modelu $k - \varepsilon$ Standard vykazuje osovou symetrii, přičemž hodnoty azimutální rychlosti jsou výrazně menší než je tomu u 3D DNS a nebo $k - \omega$ modelu.

Obrázky 6.2 a 6.3 zobrazují radiální a axiální složku rychlostí, vyjadřující sekundární proudění tekutiny. V obou případech je patrná dobrá shoda v rozložení rychlostních polí mezi turbulentními modely a 3D DNS. V případě $k - \varepsilon$ Standard modelu bylo opět získáno

Obrázek 6.1: Časově středovaná azimutální rychlost v r - z řezu.Obrázek 6.2: Časově středovaná radiální rychlost v r - z řezu.

osově symetrické rozložení rychlosti. Jak ukazují výsledky 3D DNS a $k - \omega$ modelu, je ve skutečnosti radiální a axiální rychlostní pole nesymetrické. I v případě sekundárního proudění existuje stejný závěr, tj. že nejbližší ke skutečným výsledkům 3D DNS řešení jsou výsledky získané pomocí modelu $k - \omega$. Hlavní rozdíly mezi referenčními hodnotami DNS řešení a turbulentními modely se objeví při srovnání maximálních hodnot rychlostí.



Obrázek 6.3: Časově středovaná axiální rychlost v r - z řezu.

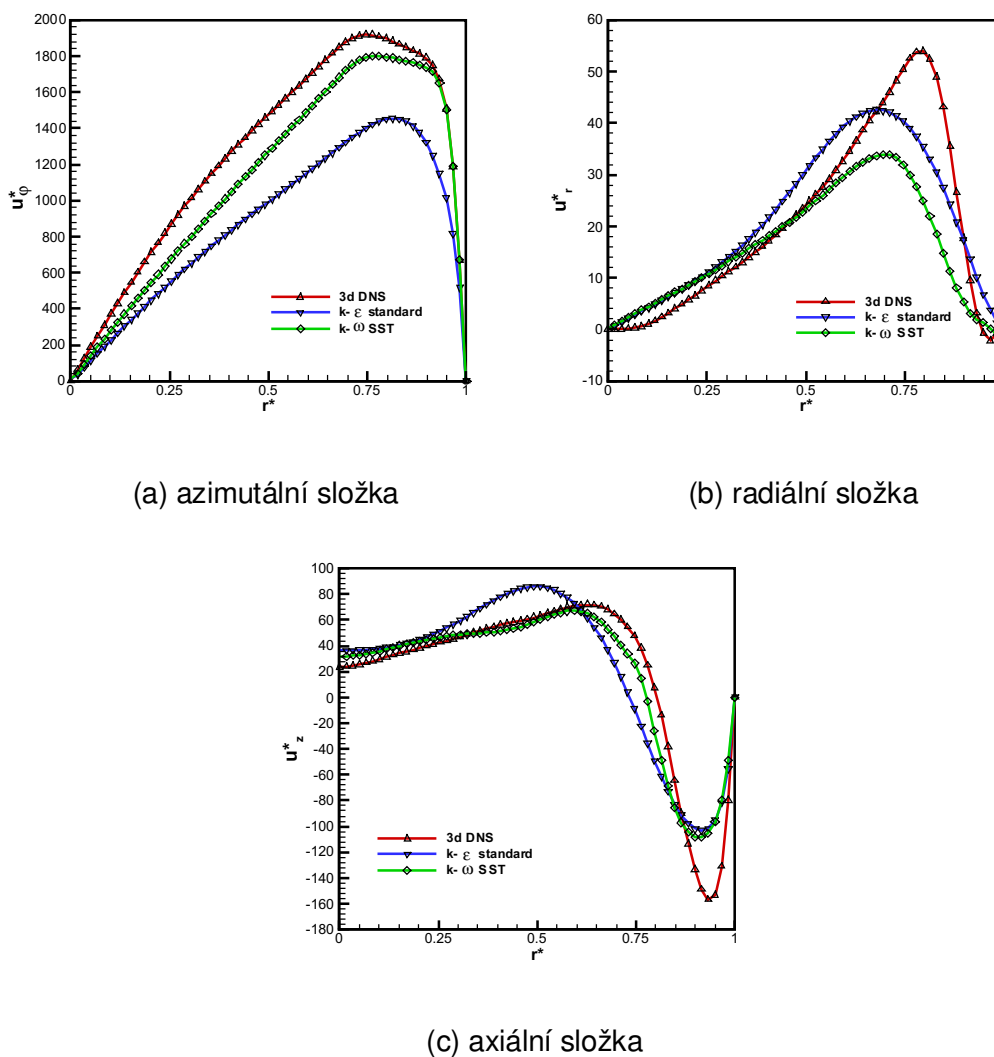
V tabulce 6.1 jsou znázorněny maximální hodnoty hlavního azimutálního proudění a podstatně slabšího sekundárního proudění. Maximální hodnoty azimutálního proudění se liší v případě modelu $k - \omega$ SST o 6 %, zatímco u modelu $k - \varepsilon$ Standard je to 25 %. Při vyhodnocení sekundárního proudění dosáhnou rozdíly v maximálních hodnotách v případě modelu $k - \omega$ SST 15 % a modelu $k - \varepsilon$ Standard 35 %.

Case	$ \max \langle u_\varphi^* \rangle $	$ \max(\sqrt{\langle u_r^{*2} \rangle + \langle u_z^{*2} \rangle}) $
3D DNS	1981.7	843.4
$k - \varepsilon$ Standard	1474.7	547.7
$k - \omega$ SST	1863.4	715.6

Tabulka 6.1: Maximální hodnoty rychlostí

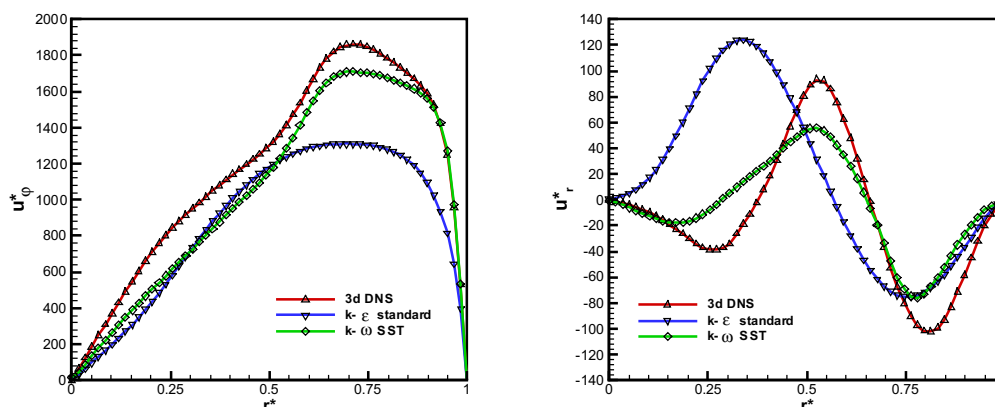
Rychlostní pole daná obrázky 6.1, 6.2 a 6.3 poskytují globální náhled, zatímco u obrázků

6.4 a 6.5 se jedná o porovnání rychlostních profilů vyhodnocených v rovině ve výšce $h = H/3$ a $h = H/20$.



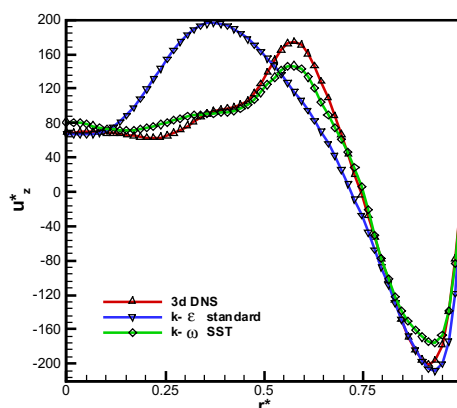
Obrázek 6.4: Rychlostní profily časově středovaných rychlostí vyhodnocených na rovině umístěné ve výšce $h = H/3$.

Porovnáním rychlostních profilů pro azimutální složku (obrázek 6.4a a 6.5a) je možné pozorovat, že turbulentní model $k - \omega$ SST poskytuje velmi podobný průběh rychlosti jako u 3D DNS, ovšem hodnoty rychlostí jsou nepatrně menší. Na druhé straně u modelu $k - \varepsilon$ Standard jsou rychlostní profily pro obě pozice vyhodnocování výrazně odlišné. Jelikož drtivý podíl kinetické energie je soustředěn v azimutální rychlosti, jsou závěry získané porovnáním



(a) azimutální složka

(b) radiální složka



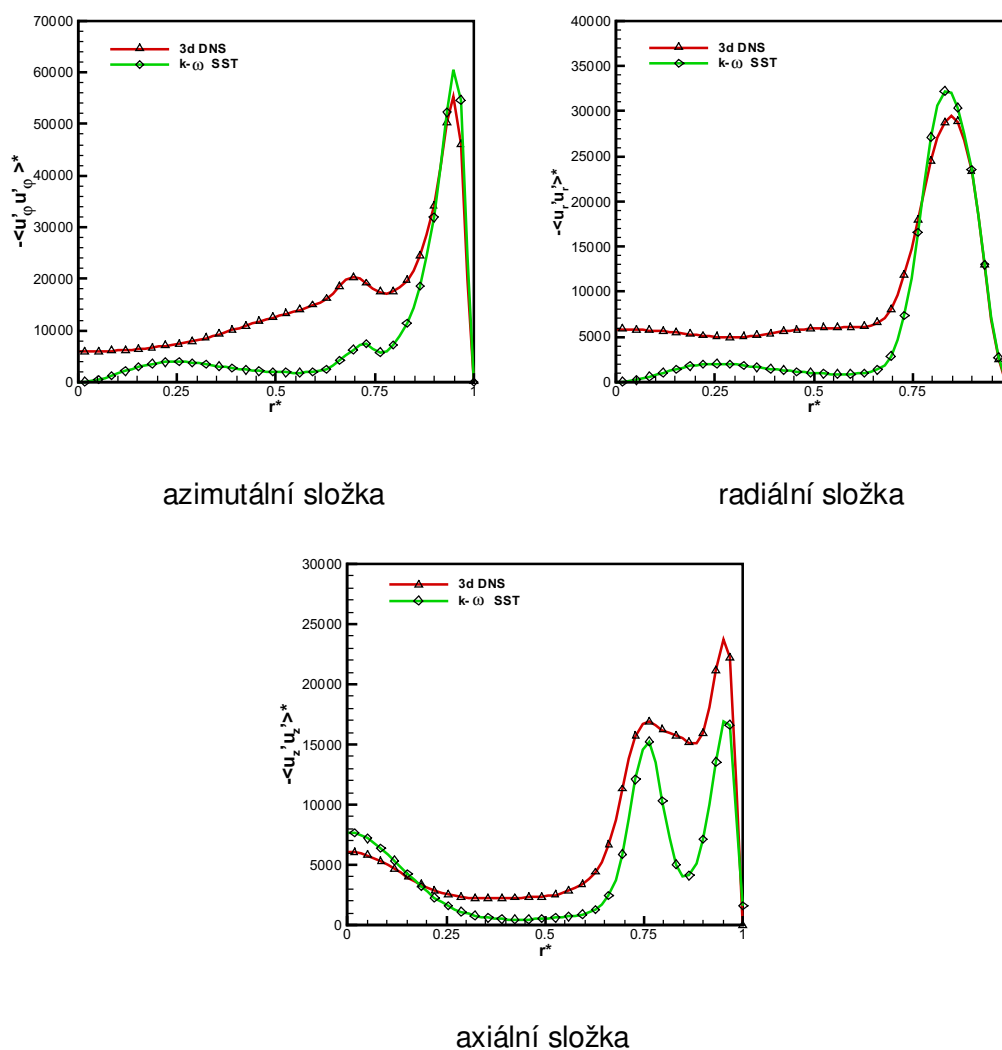
(c) axiální složka

Obrázek 6.5: Rychlostní profily časově středovaných rychlostí vyhodnocených na rovině umístěné ve výšce $h = H/20$.

azimutální složky rychlosti nejpodstatnější pro tuto studii proudění. Pro doplnění je zde uvedeno srovnání rychlostních profilů radiální a axiální rychlosti rovněž pro stejné pozice (obrázek 6.4b,c a 6.5b,c). I v tomto případě platí, že $k-\omega$ SST poskytuje nejbližší výsledky k 3D DNS studii, i když i zde jsou patrné menší rozdíly, které se nejvíce projevují v radiální složce časově středované rychlosti. Podstatným výsledkem je fakt, že u všech tří složek jsou pro model $k-\omega$ SST a 3D DNS maximální rychlosti ve stejných radiálních odlehlostech.

6.1.4 Reynoldsovo napětí

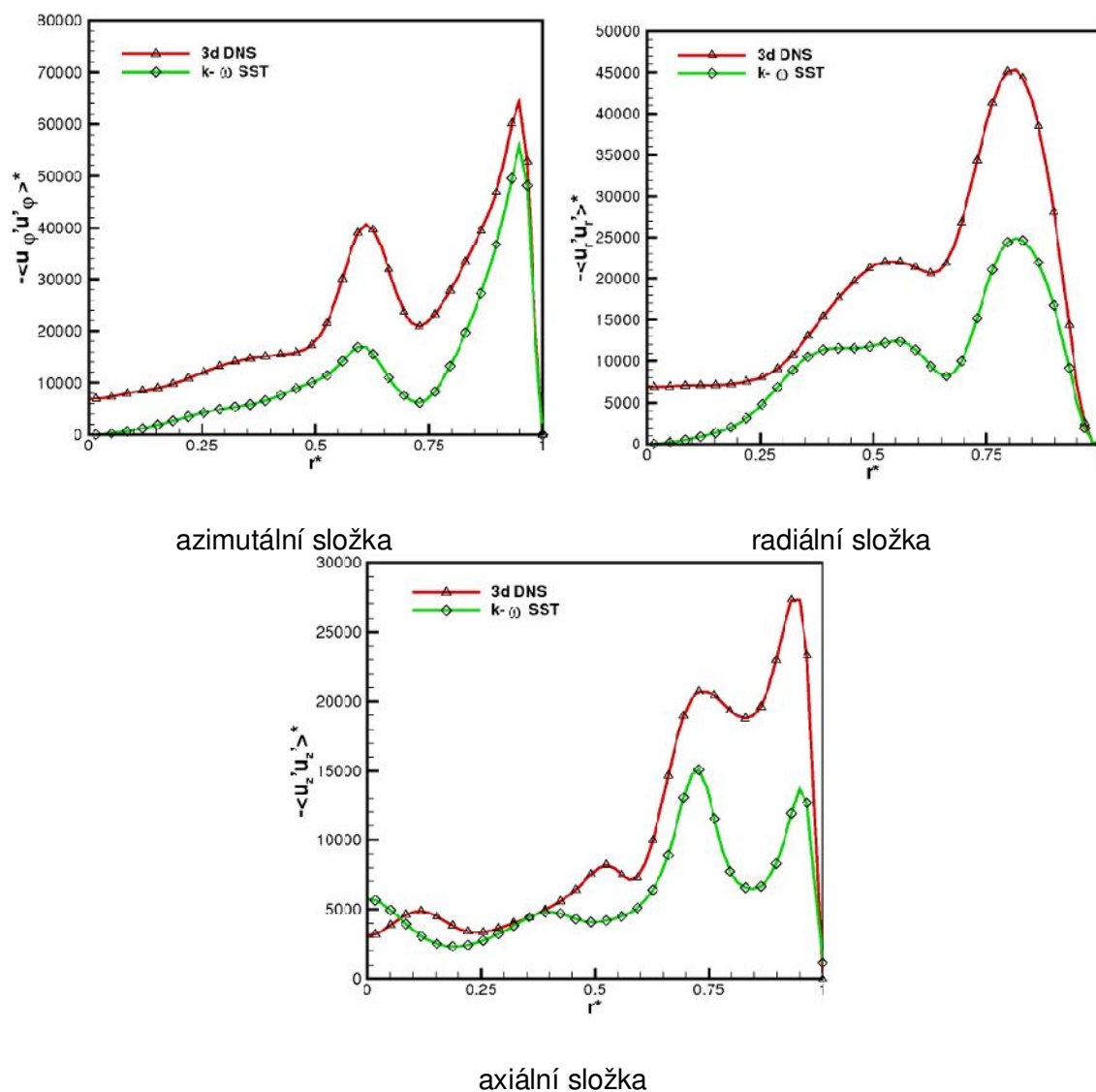
Porovnáním Reynoldsových napětí je možné vzájemně srovnat výsledky také z pohledu turbulentních vlastností v proudu.



Obrázek 6.6: Normálová složka Reynoldsova napětí v horizontální rovině $h=H/3$.

Studie 3D DNS nabízí kompletní tenzor Reynoldsova napětí $\tau_{ij} = -\overline{u_i u_j}$, zatímco klasický turbulentní model $k - \omega$ SST definuje pouze normálové složky Reynoldsova napětí $\tau_{ii} = -\overline{u_i u_i}$.

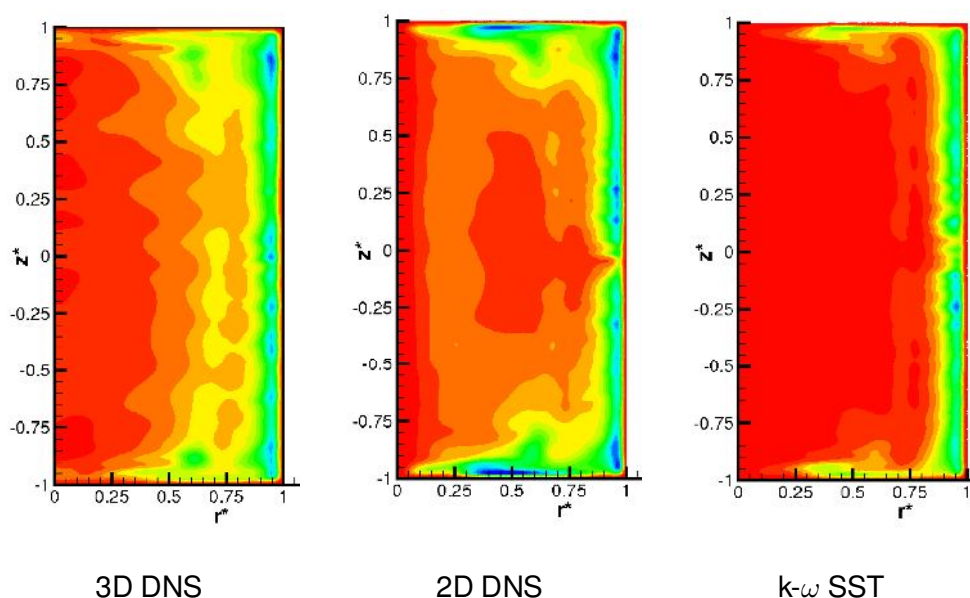
Profily normálové složky Reynoldsových napětí jsou vyhodnoceny na pozici $h = H/3$



Obrázek 6.7: Normálová složka Reynoldsova napětí v horizontální úrovni $h=H/20$.

obrázek 6.6 a $h = H/20$ obrázek 6.7. Toto srovnání ukazuje podobný tvar průběhu napětí u modelu $k - \omega$ a 3D DNS jak pro oblast v $h = H/3$, tak i pro oblast v blízkosti pevné stěny $h = H/20$, ovšem hodnoty všech tří normálových složek napětí jsou zřetelně menší u modelu $k - \omega$. Tento rozdíl je mnohem výraznější v blízkosti pevné stěny (viz obrázek 6.7), kde se tak projevuje zřetelně rozdíl mezi přesnými 3D DNS výsledky a turbulentním modelem $k - \omega$ SST pro fluktuace radiální a axiální složky.

Obrázky 6.8 zachycují rozložení hlavní složky tenzoru Reynoldsova napětí (v azimutálním



Obrázek 6.8: Azimutální složka Reynoldsova napětí v bezdimenzionálním měřítku. Testovací úloha často používaných turbulentních modelů a porovnání výsledků s reálnou skutečností v 3D DNS.

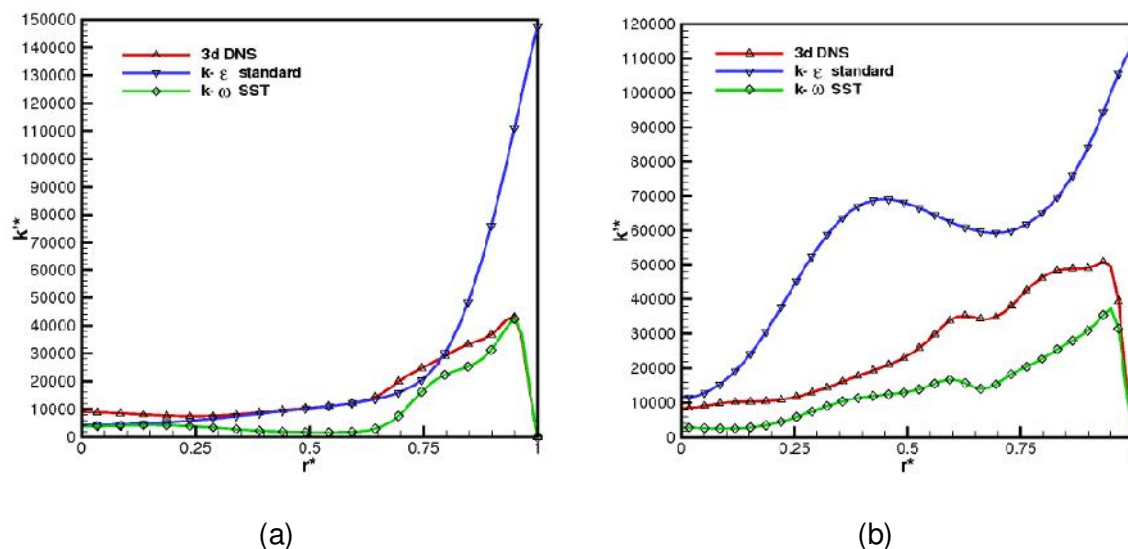
směru). Maximální hodnoty jsou znázorněny modře. Oblast vyznačena červeně představuje hodnoty blížíící se nule. Nejvyšší hodnoty napětí byly nalezeny v blízkosti vertikálních svislých stěn, kde se současně objevují Taylor Görtlerovy víry, které zapříčiňují silnou fluktuaci proudu, ale tím i promíchávání tekutiny.

Na první pohled je zřetelný ještě jeden viditelný jev a to, že v ose rotace jsou složky napětí nenulové v případě 3D DNS výpočtů. Tyto nenulové hodnoty napětí lze vysvětlit částečně existujícím tokem tekutiny středem osy nádoby, ale také jako důsledek interpolace výsledků v blízkosti osy nádoby. Na druhou stranu v případě 2d úlohy se předpokládá absolutní osová symetrie proudění a tudíž rychlosti toku tekutiny v bodech ležících na ose nádoby musí mít nulovou hodnotu z definice okrajové podmínky.

6.1.5 Turbulentní kinetická energie

K porovnávací studii turbulentních modelů je možné použít také turbulentní kinetickou energii k . Rozložení turbulentní kinetické energie ve válcové nádobě je zobrazeno na obrázku 6.10. Na rozdíl od Reynoldsových napětí je možné vyhodnotit tuto veličinu rovněž pro model $k - \varepsilon$

Standard. Profily turbulentní kinetické energie jsou zobrazeny pro vertikální pozici $h = H/3$ a $h = H/20$ na obrázku 6.9a,b.

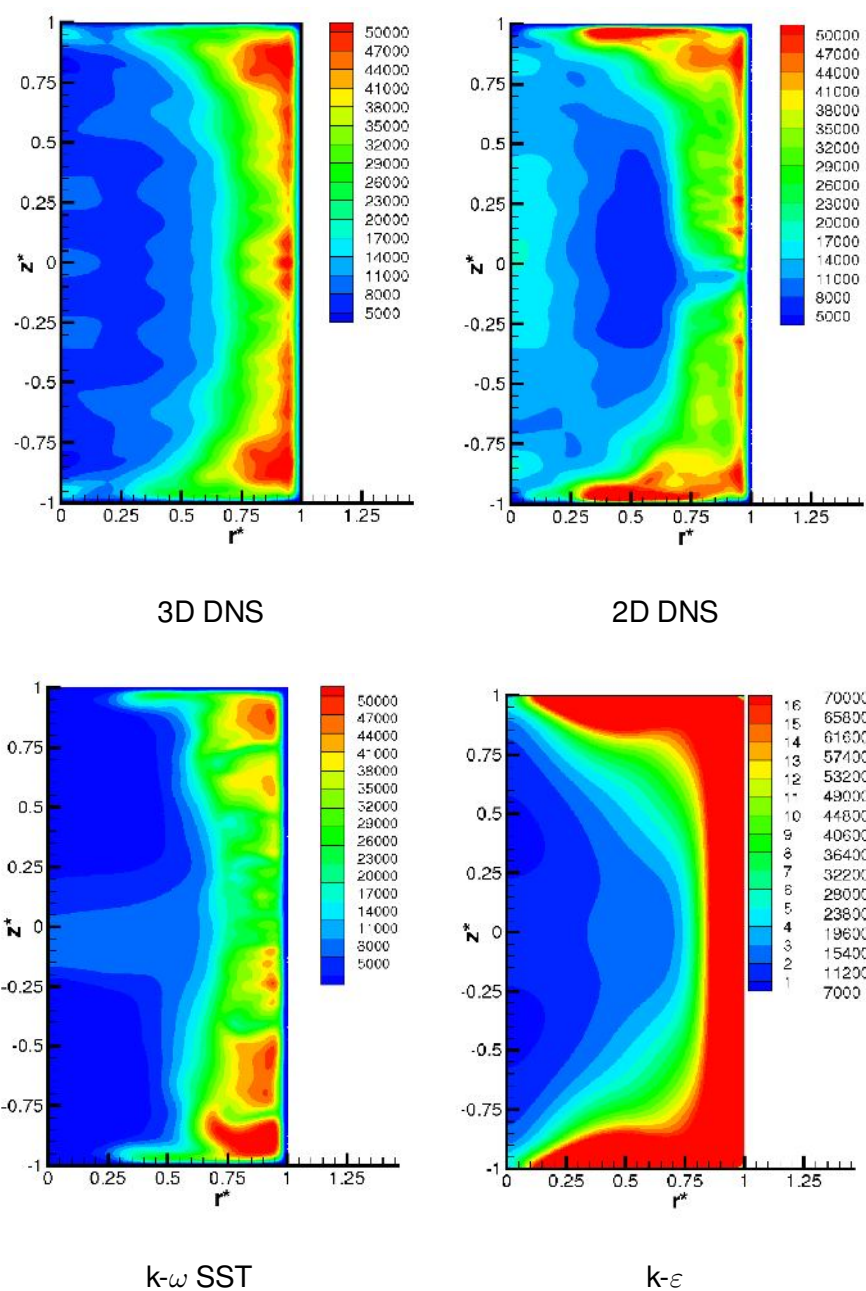


Obrázek 6.9: Turbulentní kinetická energie v rovině $h=H/3$ a $h=H/20$.

Výsledky průběhu turbulentní kinetické energie $k - \omega$ jsou velmi podobné s výsledky 3D DNS, zatímco výsledky modelu $k - \varepsilon$ Standard ukazují velké rozdíly v porovnání s 3D DNS. Hodnoty turbulentní kinetické energie u modelu $k - \varepsilon$ Standard jsou výrazně vyšší, obzvláště v blízkosti pevné stěny, což se projeví u vertikální stěny (obrázek 6.9a) nebo při vyhodnocení turbulentní kinetické energie v blízkosti dna nebo víka nádoby (obrázek 6.9b), kde se navíc výrazně vyšší hodnoty projevují v celém průběhu. Srovnatelné hodnoty lze získat pomocí modelu $k - \omega$ SST, i když i zde jsou hodnoty průběhu energie menší než je tomu u výsledků 3D DNS, stejně jako se to projevilo u normálových složek Reynoldsových napětí.

Obrázky 6.10 popisují rozložení kinetické turbulentní energie ve vertikálním řezu nádobou. Maximální hodnoty byly zaznamenány v blízkosti vertikálních stěn a dále na dně a víku nádoby a jsou znázorněny červenou barvou. Naopak modrá barva zachycuje minimální až nulové hodnoty turbulentní kinetické energie. Právě minimální hodnoty jsou typické pro oblast středu proudu, kde jsou rychlosti poměrně menší, proudění ustálené bez výskytu TG struktur.

Porovnáním rychlostních časově středovaných polí, Reynoldsových napětí a turbulentní kinetické energie vyplývá, že turbulentní model $k - \varepsilon$ Standard není vhodný pro simulaci



Obrázek 6.10: Turbulentní kinetická energie v bezdimenzionálním měřítku. Testovací úloha často používaných turbulentních modelů a porovnání výsledků s reálnou skutečností v 3D DNS.

turbulentního proudění rotujícího rychlostního pole, což je v souladu s výsledky JARKILICE [70]. Tento neúspěch turbulentního modelu lze částečně vysvětlit nestacionárními přechodovými jevy, které se vyskytují v režimu proudění o nižší hodnotě Reynoldsova čísla. Naopak

turbulentní model $k - \omega$ SST je mnohem vhodnější pro takovýto režim, a proto se potvrdil předpoklad, že takto získané výsledky budou správněji odpovídat skutečnosti. Z hlediska nestacionárních jevů spojených s Taylor-Görtlerovými víry [55], ale i z hlediska turbulentních vlastností jsou výsledky přesné 3D DNS studie a turbulentního modelu $k - \omega$ SST velmi podobné. Z tohoto důvodu je možné považovat turbulentní model $k - \omega$ SST jako velmi vhodný pro tyto typy úloh vyznačující se nižší hodnotou Reynoldsova čísla. V případě proudění, kde Reynoldsovo číslo bude výrazně vyšší, lze předpokládat, že i výsledky a závěry této práce by mohly doznat výraznějších změn.

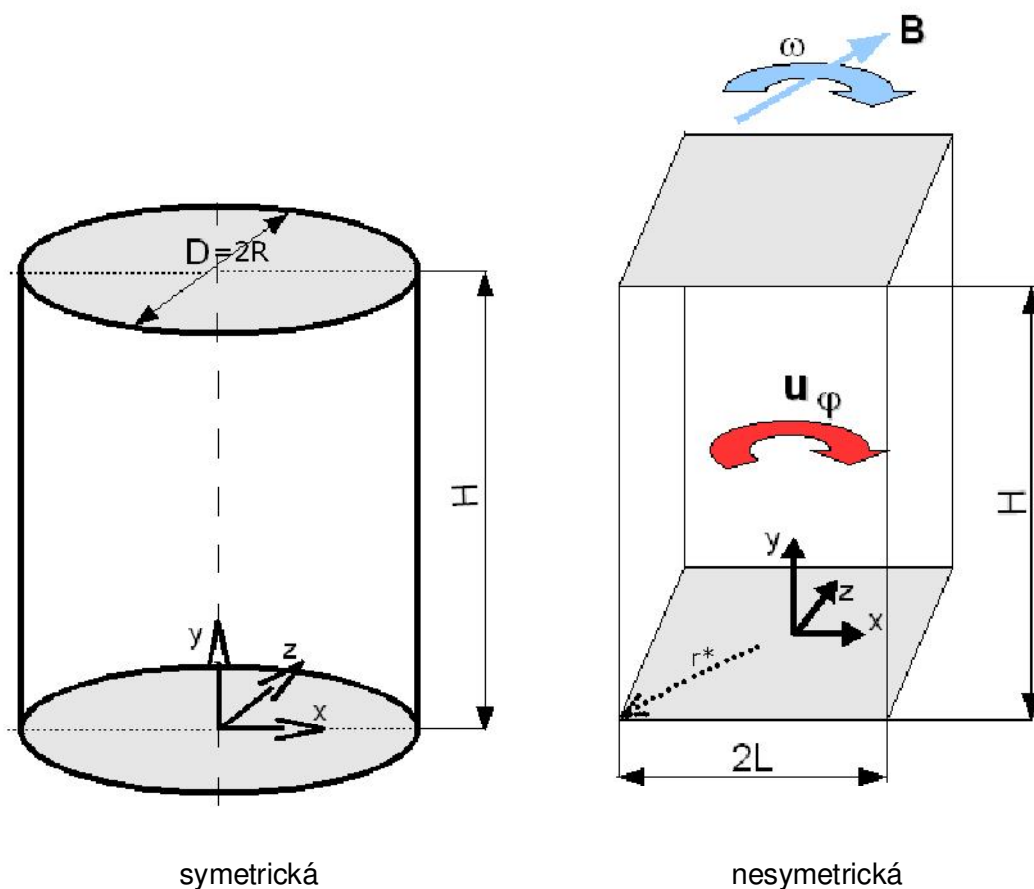
6.2 Osově nesymetrická nádoba

Osově symetrické nádoby představují po výpočetní stránce jednoduché případy, kdy je možné s výhodou využít osově symetrie. Numerické simulace zahrnují jednak základní určující rovnice pro pohyb nestlačitelné tekutiny v čase, rovnice magnetohydrodynamiky a popřípadě i vliv turbulence. Matematický model, popisující tuto představu, zahrnuje mnoho rovnic a závislostí, které činí výpočetní program náročný na výpočetní čas s ohledem i na velikost výpočetní sítě. Z tohoto důvodu je výhodnější zaměřit výzkum proudění s vlivem magnetického pole na osově symetrické nádoby, kde je možné využít právě osovou symetrii a počítat základní veličiny pouze v řezu. Mnoho praktických aplikací ovšem zahrnuje právě osově nesymetrickou nádobu. V následující kapitole je ukázka řešení výpočtu pro osově nesymetrickou nádobu v oblasti turbulentního proudění.

K řešení numerické simulace byl použit turbulentní model Delayed Detached Eddy Simulation (DDES). Tento model byl doplněn do výpočetního programu NS-FEM3D .

6.2.1 Rychlostní pole

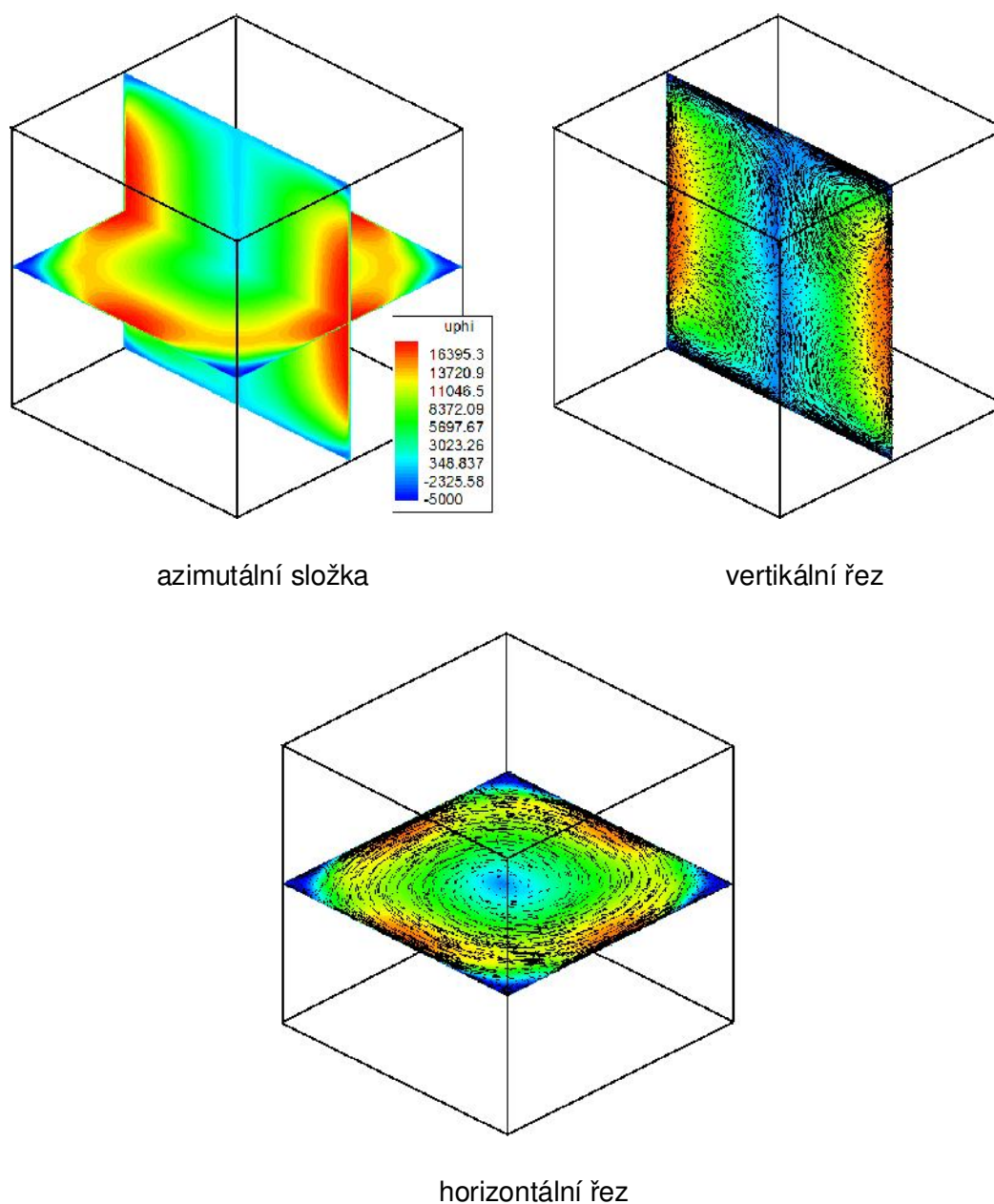
Obrázky 6.12 zachycují rozložení časově zprůměrované azimutální složky rychlosti a vektorové znázornění vertikálního proudění u proudu generovaného rotujícím magnetickým polem. Proudění se vyznačuje vysokým Reynoldsovým a Taylorovým číslem a proto je numericky simulováno za použití hybridního turbulentního modelu DDES, který patří do stejné skupiny turbulentních modelů jako Detached Eddy Simulation (DES). Tyto modely se vyznačují použitím LES ve volném proudu a RANS modelu, v tomto případě jednorovnicového modelu Spalart-Allmaras, v blízkosti stěn. Tímto řešením je možné eliminovat problém s pevnými stěnami při současném použití LES modelů.



Obrázek 6.11: Řešení problému v osově symetrické a nesymetrické nádobě.

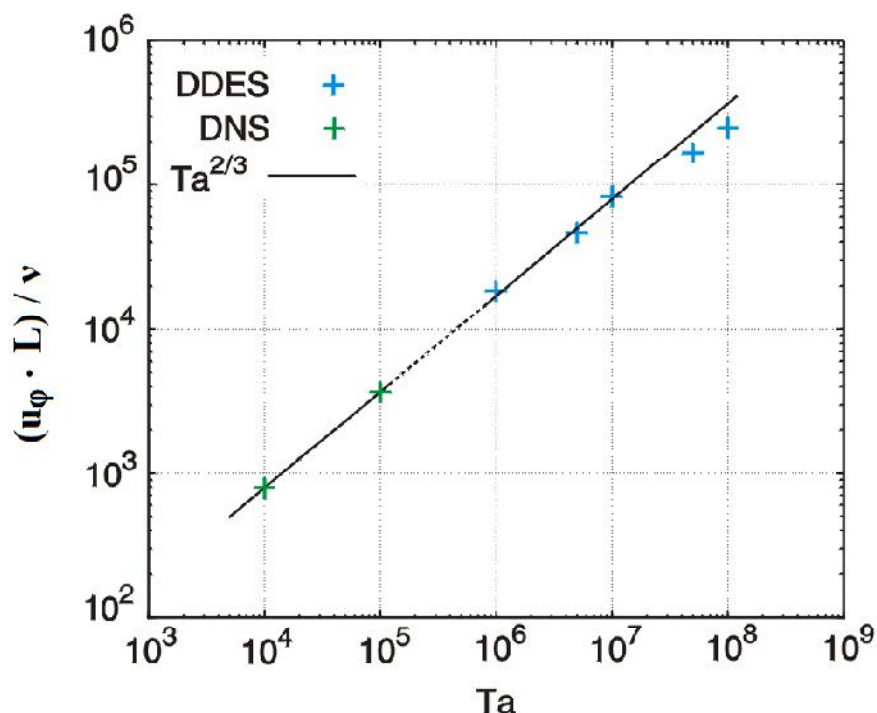
Z obrázků 6.12 je opět zřetelný silný rotační pohyb tekutiny podél vertikální osy. Tento jev je pozorovatelný i u nízkých hodnot Taylorova čísla. Rovněž v oblasti turbulentního proudění je možné pozorovat silné proudění ve vertikálním směru. Silný vír zůstává zachován v rozích nádoby, zatímco v ostatní oblasti nádoby je tekutina výrazně méně promíchávána. Rozhodující je vliv nesymetrie nádoby na rotační azimutální pohyb tekutiny. Nesymetrie nádoby způsobuje, že rotační pohyb tekutiny dosahuje maximální intenzity na kolmých stěnách nádoby a v rozích klesá intenzita rotace proudu. Zřetelný je tzv. sekundární vír, který je mnohem slabší a vzniká právě v rozích nádoby. Popis tohoto jevu byl dobře zdokumentován v literatuře Fraňa a Stiller [36].

Obrázek 6.13 ukazuje závislost maximální rychlosti na velikosti Taylorova čísla. Zelenou barvou je znázorněna oblast, která je řešena pomocí DNS. Tato oblast sice vykazuje prvky vznikající turbulence, avšak vzniklá výpočetní síť je ještě dostatečně jemná na zachycení



Obrázek 6.12: Bezdimenzionální časově středované složky rychlosti v osově nesymetrické nádobě pro $Ta_m = 1 \times 10^6$

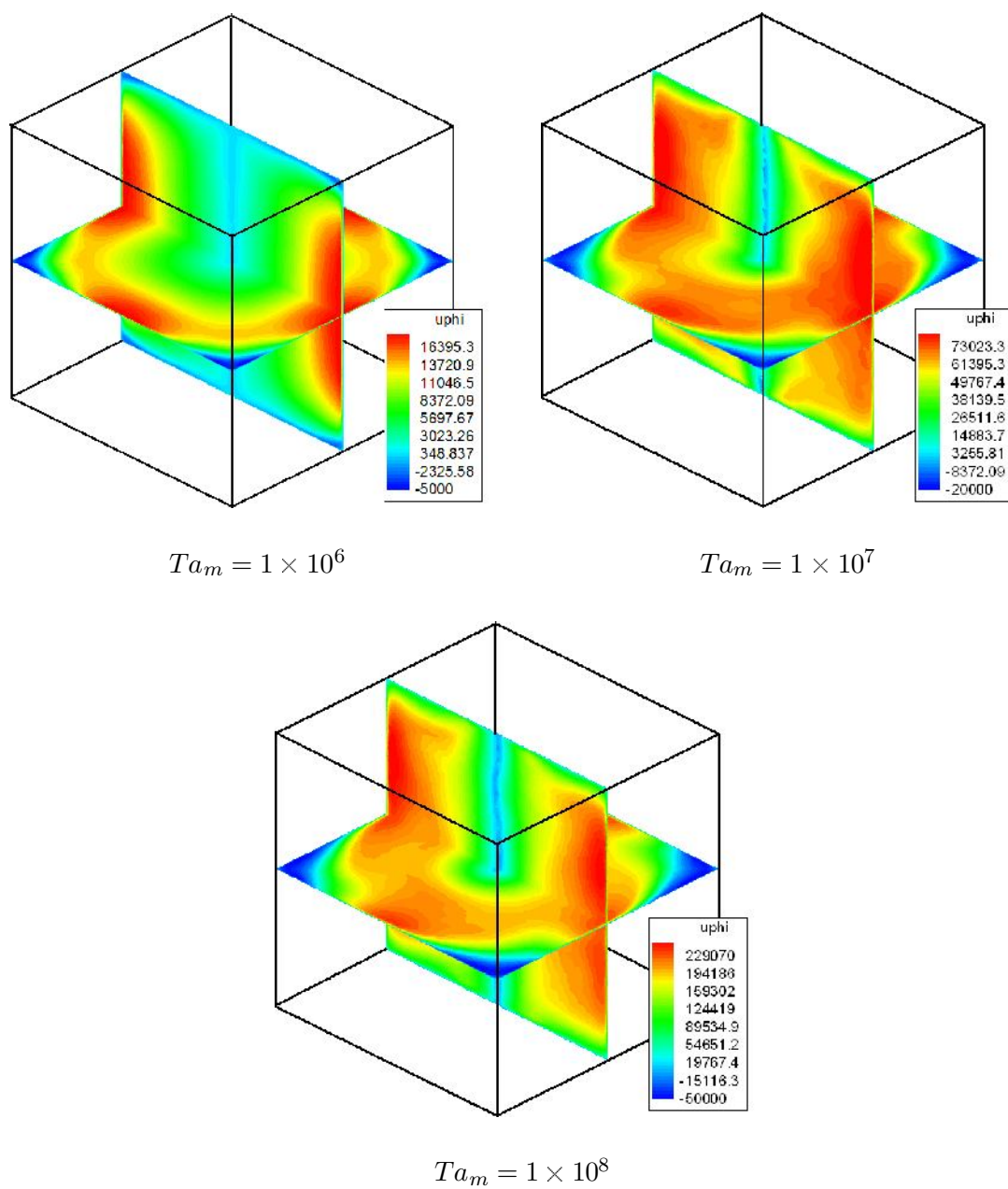
malých struktur v prostoru a čase. U vyšších hodnot Taylorova čísla už to možné není, a proto je problém dále řešen pomocí hybridního turbulentního modelu DDES. V tomto případě je stále ještě zřetelná závislost 2/3 maximální hodnoty azimutální rotační rychlosti na Taylorově čísle. Poslední dva výpočty sice indikují mírnou odchylku, ovšem ve skutečnosti je spíše



Obrázek 6.13: Závislost bezrozměrné azimutální složky na Taylorově čísle

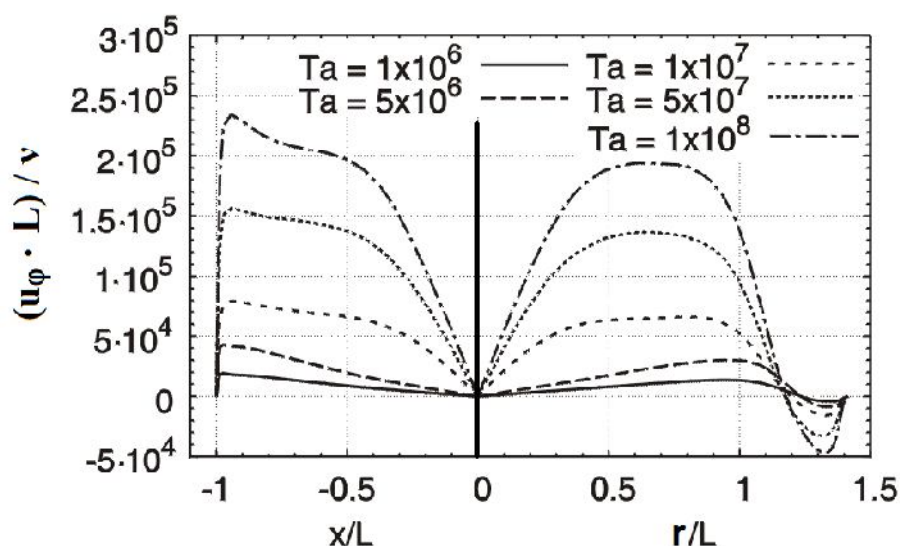
jedná o ještě nedořešené výsledky numerické simulace. Zkušenosti s řešením rychlostních polí u nižších hodnot Taylorových čísel ukázaly jednoznačně, že při nedostatečně dlouhém časovém řešení není hodnota maximální azimutální rychlosti ještě ustálena a tudíž i body popisující tuto závislost ještě neleží na předpokládané čáře vyjadřující $2/3$ závislost. Zjištěná závislost $2/3$ je totožná s teorií Davidsona [61], která byla odvozena pro osově symetrickou nádobu. Je zcela zřetelné, že $2/3$ závislost platí i pro osově nesymetrické proudění v nádobě typu kvádr nebo krychle, ale je platná i pro vysoké hodnoty Taylorova čísla. Tato skutečnost byla popsána v publikaci Fraňa a Stiller[36].

Na obrázcích 6.14 jsou znázorněna rychlostní pole v azimutálním směru ve vertikálním a horizontálním řezu pro různé hodnoty Taylorova čísla. Při vyšší hodnotě Taylorova čísla přetrvává nesymetrie v rozložení rychlostního pole tj. nejvyšší hodnoty se objevují na vertikálních stěnách nádoby. S vyšší hodnotou Taylorova čísla se zvětšuje oblast vyšších hodnot azimutálního rychlostního pole. Současně se posouvají vyšší hodnoty intenzity proudění směrem ke koncovým stěnám nádoby. Rychlostní pole se stává více homogenní a naopak oblast nižších rychlostí rotace proudu se zmenšuje. Tento jev by mohl být pozitivní ve smyslu homogenizace proudu. V rozích nádoby existuje ustálená oblast se sekundárním prouděním.



Obrázek 6.14: Bezdimenzionální časově středovaná složka azimutální rychlosti v osově nesymetrické nádobě pro různé hodnoty Taylorova čísla resp. intenzity magnetického pole.

S vyšší hodnotou Taylorova čísla se mírně zvětšuje tato oblast v rozích nádoby.

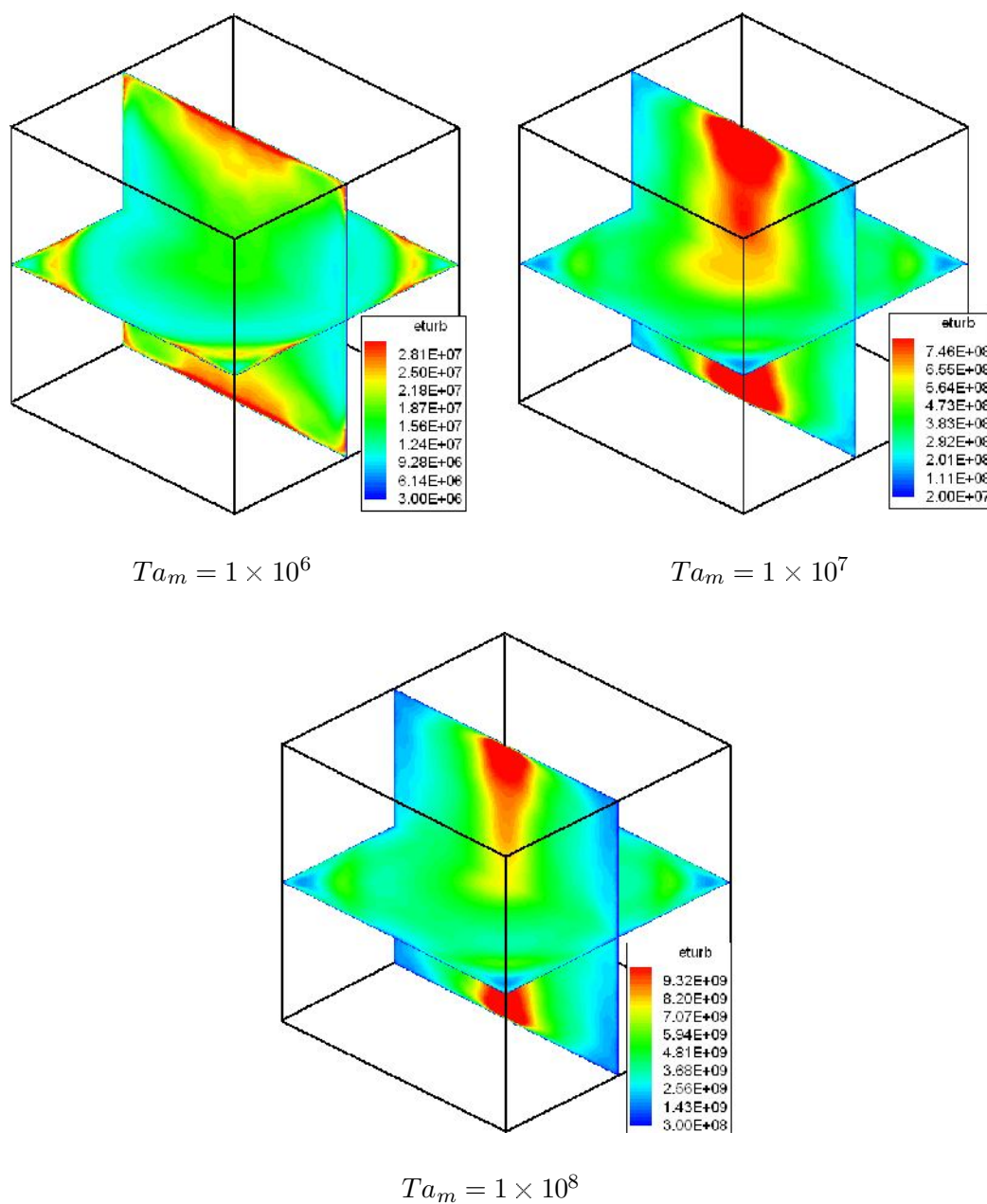


Obrázek 6.15: Průběh rychlostních profilů pro různé hodnoty Taylorova čísla (v rovině $h=H/2$).

6.2.2 Vlastnosti turbulentního proudění

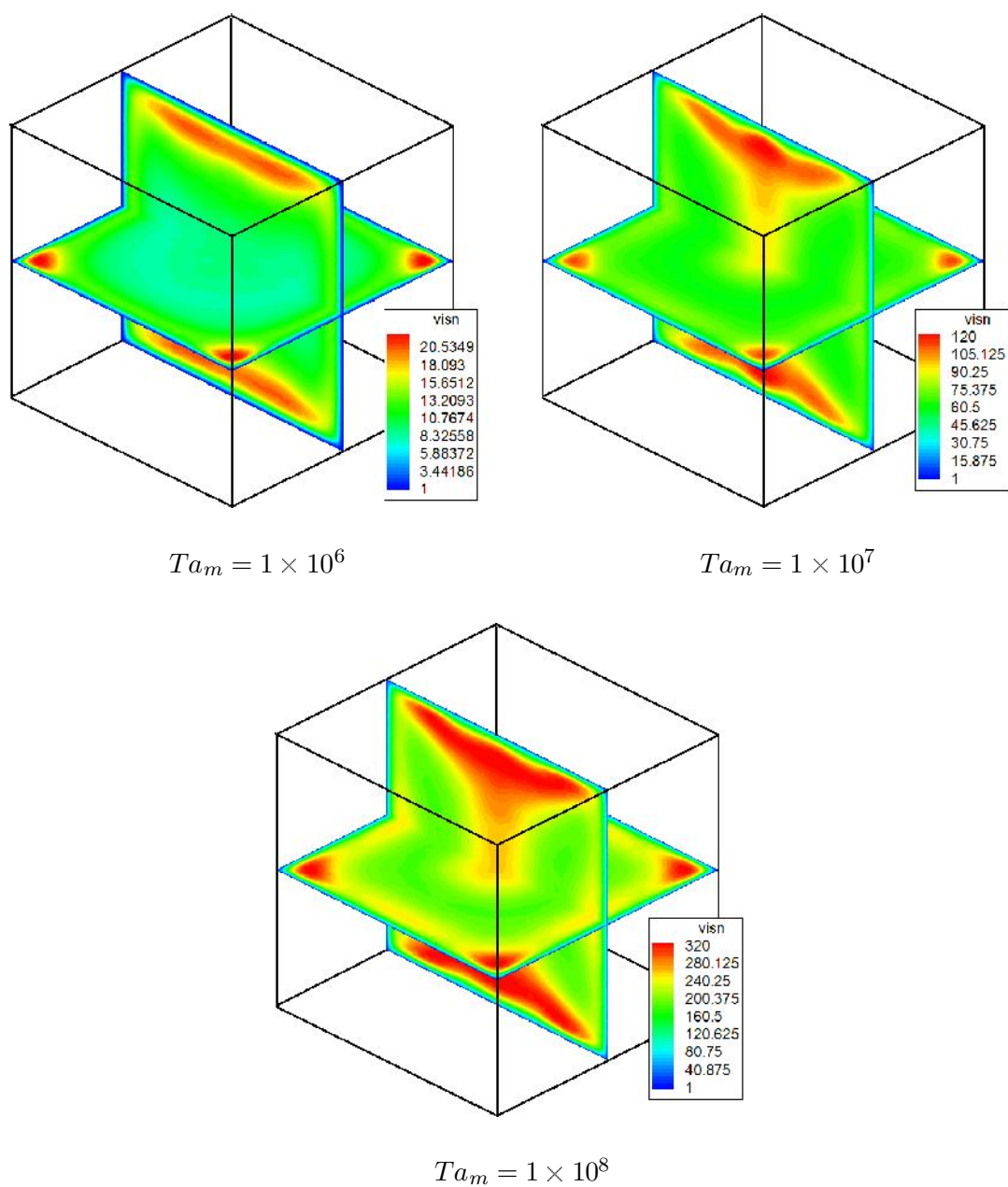
Obrázek 6.15 ukazuje průběh rychlostního profilu ve dvou řezech: ve směru kolmém na vertikální stěnu nádoby a ve druhém směru vedeném ze středu do rohu nádoby. Se zvyšující se hodnotou Taylorova čísla roste hodnota azimutální rychlosti. Na obrázku 6.15 je stále vidět velmi podobný charakter průběhu rychlosti a ani při vyšších hodnotách Taylorova čísla není vidět žádná výrazná odlišnost oproti menším hodnotám Taylorova čísla. V případě rychlostního profilu, vyhodnoceném ve směru kolmém do rohu nádoby, je již zachycen zpětný proud tj. sekundární vír v rohu nádoby. Čím vyšší je hodnota Taylorova čísla, tím větší je intenzita sekundárního víru. To je potvrzeno i z předchozího obrázku, že se zvyšující se hodnotou Taylorova čísla se evidentně zvyšuje i oblast sekundárního proudění. Zatímco kontury rychlostních polí na obrázcích 6.14 zachycují globální jevy v proudových polích, rychlostní profily umožňují podchytit i lokální menší jevy, které ale mohou mít zásadní vliv na dynamiku proudu. Při podrobném prozkoumání rychlostního profilu je zřetelné, že v oblasti hlavního rotujícího proudu je nejprve výrazný nárůst rychlosti (velké rychlostní gradienty) a poté pozvolný další nárůst až na hodnotu cca. $0,9 L$, kde parametr L označuje polovinu šířky nádoby. Hodnota $0,9 L$ je velmi podobná hodnotě u osově symetrické nádoby. Odlišná je jen skutečnost, že existuje velká oblast v rozmezí od $0,4L$ až $0,9L$, kde se rychlost zvyšuje jen pomalu.

Obrázky 6.16 znázorňují rozložení turbulentní kinetické energie ve vertikálním a horizon-



Obrázek 6.16: Turbulentní kinetická energie

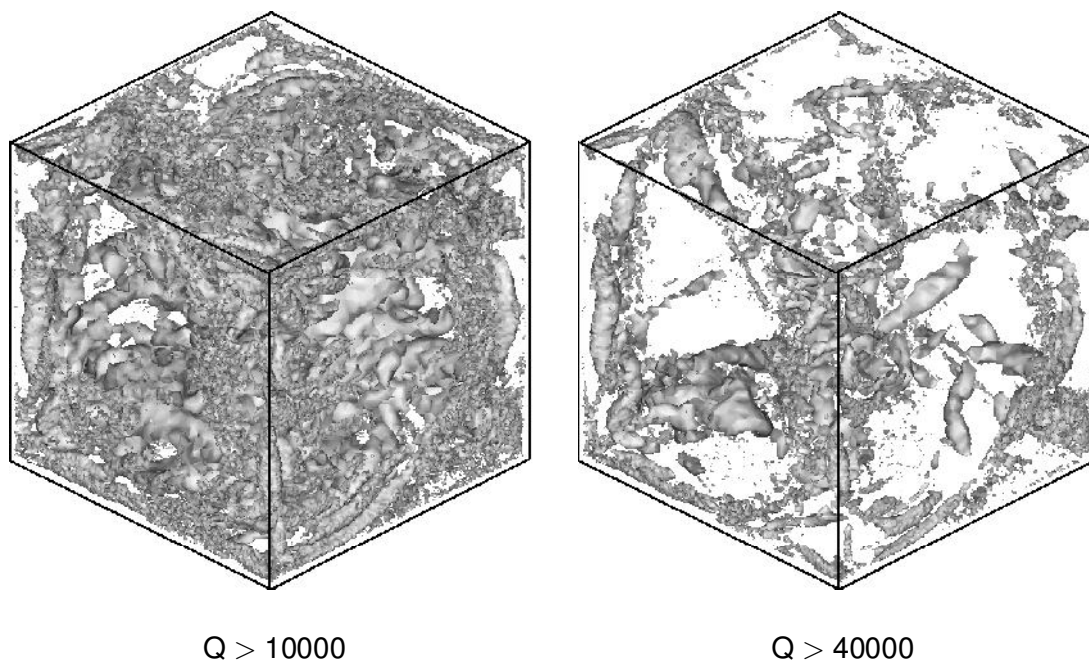
tálním řezu nádoby. U Taylorova čísla do 1×10^6 se objevuje maximální hodnota turbulentní kinetické energie na horní a dolní části stěny nádoby (dno a víko) a dále na rozhraní mezi hlavním rotačním proudem taveniny a sekundárním proudem tj. rohových vírů. Jsou-li hodnoty Taylorova čísla vyšší, tj. dosáhnou-li hodnoty 1×10^7 a více, dochází k zřetelné změně. Maximální hodnoty turbulentní kinetické energie jsou v jádru proudu. V této oblasti jsou



Obrázek 6.17: Turbulentní viskozita

hodnoty vyšší, než je tomu například na stěnách či na rozhraní hlavního rotačního pohybu tekutiny a sekundárního rohového víru. Již na obrázcích 6.14 je vidět mírná změna v chování jádra proudu. Azimutální okamžitá rychlost zachycuje u vyšších hodnot Taylorova čísla zvlnění této oblasti a tudíž i prvky vírů a pulzace jádra proudu. Tyto víry a pulzace jádra proudu vyvolávají rovněž i výrazný příspěvek do hodnoty turbulentní kinetické energie. Produkce

turbulentní kinetické energie je vyšší, než je tomu ve zbylé části proudění.



Obrázek 6.18: Dominantní vírové struktury

Kromě turbulentní kinetické energie je možné pochopit jevy turbulence v proudě i pomocí turbulentní viskozity. Jedná se o hodnotu, která přímo vstupuje do Navier-Stokesovy rovnice. Konkrétně jde o člen zastupující tření resp. disipaci energie proudění. Turbulence v proudění je mnohdy ve svém důsledku obdobná jevu laminární kinematické viskozity u disipačního členu, a proto se vliv turbulence připojuje k disipačnímu členu na pravé straně Navier-Stokesovy rovnice. Rozložení turbulentní viskozity je prezentováno na obrázcích 6.17 a to opět ve vertikálních a horizontálních řezech. Ve všech uvedených případech Taylorova čísla jsou maximální hodnoty soustředěny v oblasti na dně a víku nádoby. Číselná škála u popisu obrázku vyjadřuje násobek k laminární kinematické viskozitě. Například u Taylorova čísla $Ta_m = 1 \times 10^8$ je maximální hodnota turbulentní viskozity cca. 320 x vyšší než je laminární kinematická viskozita. Vyšší hodnoty turbulentní vírové viskozity byly zaznamenány ještě v koutech nádoby.

6.2.3 Vírové struktury

V osově symetrické nádobě byly identifikovány dominantní vírové struktury, které se podařilo velmi dobře vizualizovat pomocí tzv. Q kritéria. Stejné kritérium bylo použito i zde k vizualizaci vírových struktur, vznikajících v proudění v osově nesymetrické nádobě. Vhodná volba velikosti Q hodnoty určuje možnosti znázornit slabé víry popřípadě zvýraznit silné víry v proudu. Vírové struktury vznikají podél svislých stěn, ale rovněž i na dně nebo víku nádoby. Dominantní vírové struktury jsou v dobré korelaci s vizualizovanými oblastmi maxim turbulentní viskozity.

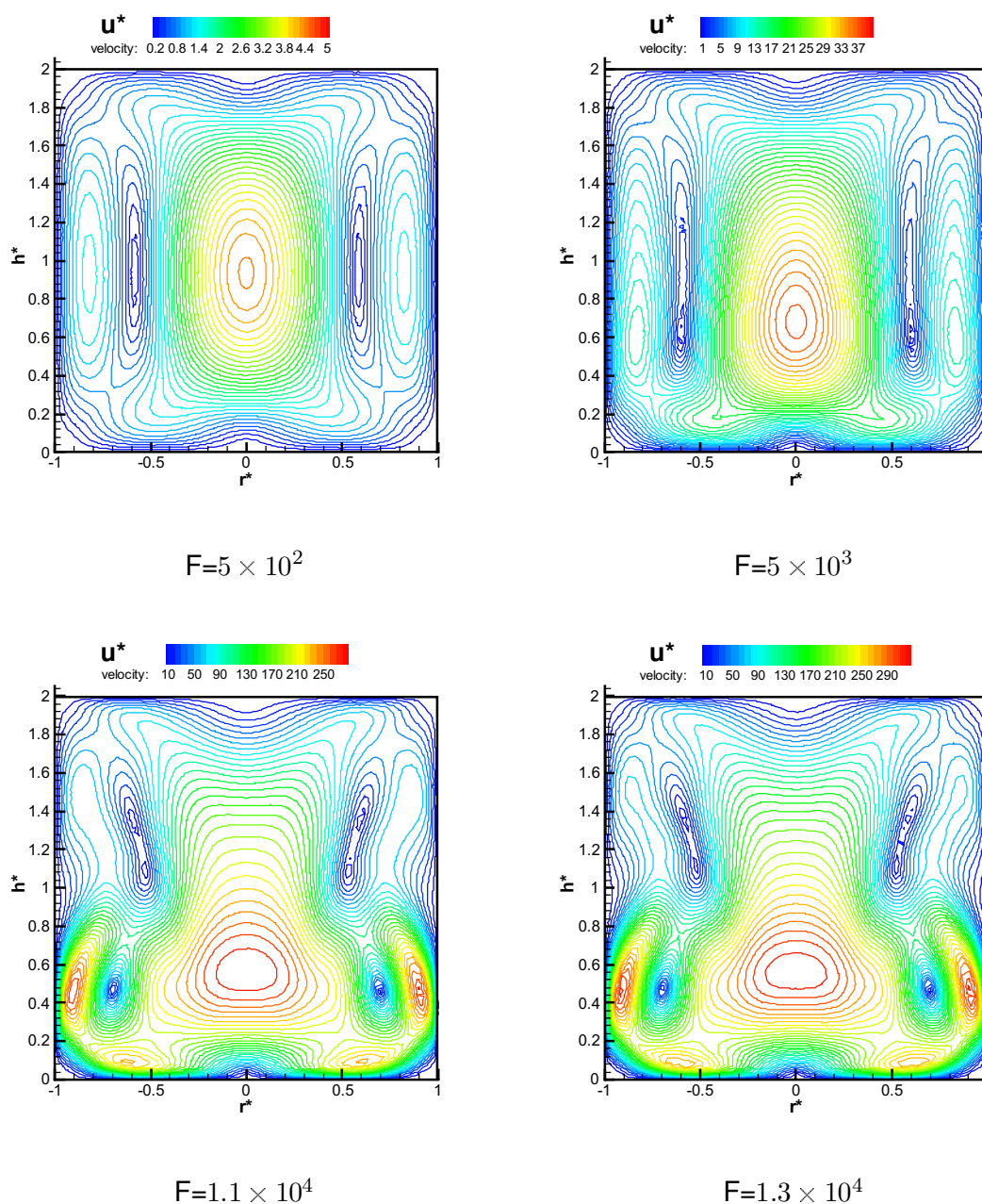
Kapitola 7

Translační magnetické pole - laminární režim

7.1 Výsledky numerické simulace proudění vyvolaného TMP

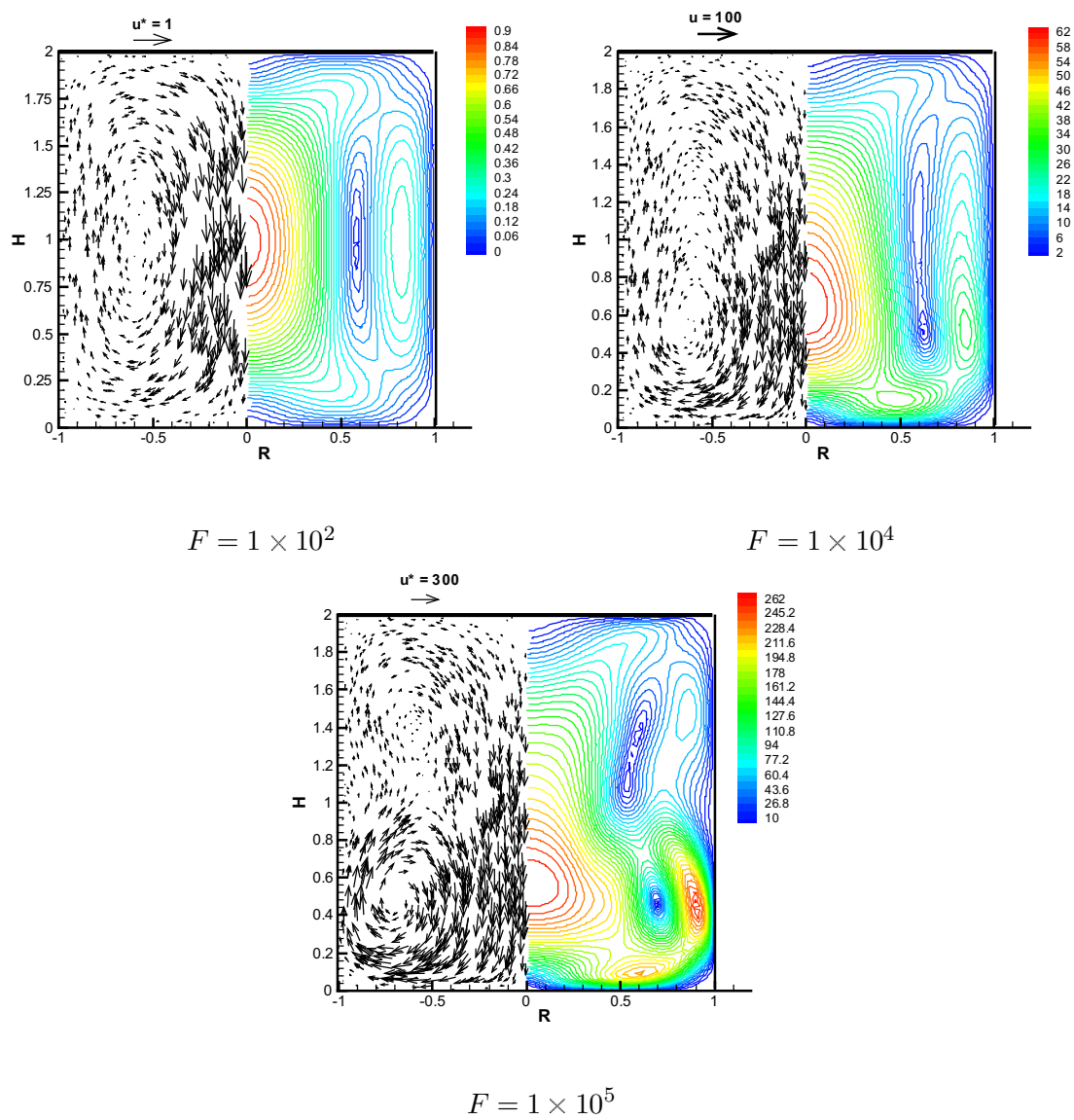
Pro oblast malých hodnot kritériálního čísla F (definice v) je magneticky generované proudění osově symetrické a nevznikají žádné oscilace v rychlostním poli. Z hlediska aplikace je tento klidný stav proudění nejvýhodnější, neboť rovnoměrně rozložené rychlostní pole přispívá k rovnoměrnému rozložení teplot, což se pozitivně odrazí v procesu rovnoměrného tuhnutí materiálu v technologických procesech zpracování kovů.

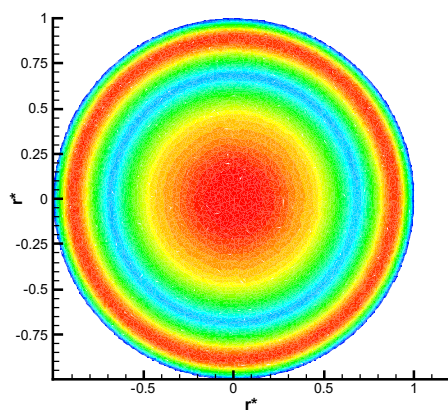
Na obrázcích 7.1 je znázorněn vývoj okamžité rychlosti proudění při postupně zvyšující se velikosti intenzity magnetické indukce translačního magnetického pole (vliv intenzity závislé veličiny parametru F viz definice v 7.1). Pro malé hodnoty parametru F (řádově stovky) je znatelné osově symetrické rozložení kontur azimutální rychlosti. Proudění stoupá po obvodě vertikálních stěn a klesá středem nádoby. Důležitý aspekt je ten, že intenzita vertikálního proudu je rovnoměrná v celém zkoumaném objemu nádoby. Čím větší je hodnota parametru F tedy intenzity Lorentzových sil, tím je zřetelnější, že vertikální proudění nemá již takovou sílu zajišťovat pohyb ve vertikálním směru v dostatečné intenzitě v celém objemu. Obzvláště zřetelné je to u vyšších hodnot parametru F (hodnota řádově desetitisíce a více). Právě u těchto hodnot dochází k tomu, že se proud ve vertikálním směru zkrátí jen do určité výšky nádoby. Horní část nádoby není tak silně ovlivněna. Další podrobnosti vývoje je možné vidět na obrázcích 7.2. Ve vertikálním řezu r - z je zobrazeno okamžité rychlostní pole ve formě $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}R/\nu$. K simulaci se předpokládá válcová nádoba s podobnými charakteristickými pa-



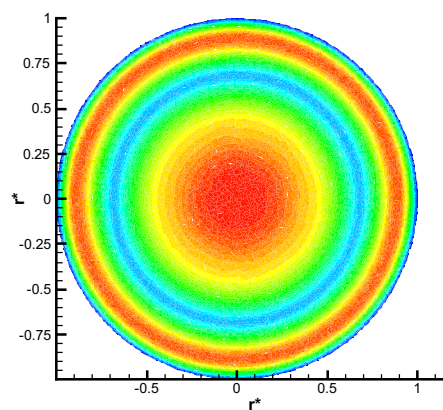
Obrázek 7.1: Okamžité rychlostní pole, indukované translačním magnetickým polem (TMP) a jeho vývoj vzhledem k rostoucí hodnotě kritériálního čísla F resp. intenzity magnetického pole. Vertikální řez je veden osou válcové nádoby. Hodnoty okamžitého rychlostního pole jsou vyjádřeny v bezdimenzionální formě odpovídající barevné stupnici.

rametry jako tomu bylo u případu rotujícího magnetického pole. Poněvadž je proudění osově symetrické, je hlavní vertikální pohyb tekutiny zobrazen na levé straně vertikálního řezu ná-

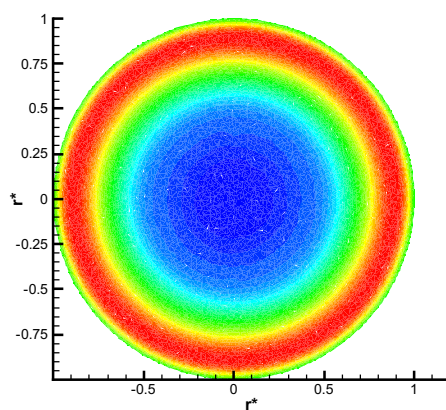
Obrázek 7.2: Znázornění rychlostního pole v řezu r - z



(a)



(b)



(c)

Obrázek 7.3: Výsledky rychlostních polí pro případ hodnoty kritériálního parametru $F=1.2 \times 10^4$ ve vertikálním řezu umístěném v první 1/2 výšky nádoby. Rychlostní pole jsou vyjádřena v bezdimenzionální formě: (a) okamžité rychlostní pole, (b) časově středované rychlostní pole a (c) rozdíl okamžité a časově středované rychlosti.

dobou pomocí vektorového pole, zatímco na pravé straně je vykresleno okamžité rychlostní pole pomocí izočár. Rychlostní pole u dalších hodnot F jsou znázorněna na předchozím obrázku 7.1. Z obrázků dále vyplývá, že se vzrůstající hodnotou F se mění výrazně rozložení rychlosti. V případě velmi malých hodnot F ($\approx 1 \times 10^2$) vzniká v proudění dominantní vír, jehož střed se nachází v polovině poloměru a výšky nádoby. Tento střed vírů se postupně posouvá směrem ke dnu nádoby s tím, jak se zvyšuje intenzita magnetického pole. Dále dochází k růstu intenzity rychlostního pole, přičemž při vyšších hodnotách F se již vytváří tenká mezní vrstva na dnu a na vertikální stěně do $1/3H$ výšky nádoby. Jak je dále patrné z obrázku 7.2, v případě vyšší hodnoty F je intenzita proudění výrazně vyšší v oblasti od dna do $1/3$ výšky nádoby, kde existuje velmi silný vír, který napomáhá zesílení transportu hmoty.

Na druhou stranu ovšem dochází k zeslabení účinku proudění ve zbylé části nádoby, což se prakticky projeví zhoršením intenzity promíchávání tekutiny a tím i dochází k nerovnoměrnému rozložení teplotního pole. V případě tuhnutí materiálu se může očekávat, že vzniklá struktura materiálu bude nehomogenní, obzvláště v horní části nádoby.

Obrázek 7.3 zachycuje rozložení rychlostního pole pro případ okamžité hodnoty rychlosti, časově středované a flukтуаční části složky okamžité rychlosti. Řezy jsou provedeny horizontálně v polovině výšce válcové nádoby. Na obrázcích zatím není viditelný vznik lineárních nestabilit. Jedná se sice dle teorie o hodnotu parametru F na kritické hodnotě, ovšem ke vzniku nestabilit je zapotřebí provést počáteční rozrušení rychlostního pole. Více bude o této problematice vysvětleno později. Prozatím lze říci, že tetrahedrální elementy mají dostatečnou sílu stabilizovat proudění během výpočtu. Ke vzniku nestabilit by teoreticky mohlo dojít až za delší dobu výpočtu.

Kapitola 8

Lineární a nelineární nestability v proudění

V rámci této kapitoly je věnována pozornost vzniku lineárních i nelineárních nestabilit v proudění, které je buzeno magnetickým polem. Vznik nestabilit v proudění označuje přechod ze stabilního režimu proudění do oblasti přechodového nebo turbulentního proudění. Z pohledu matematického modelu je zde uvažované proudění popsáno Navier-Stokesovými rovnicemi, přičemž základní rovnice hybnosti obsahuje nelineární člen, jenž je zodpovědný za vznik nestabilit v proudění. Tento člen je v případě laminárního proudění v porovnání k ostatním členům rovnice slabý, ovšem jeho vliv na rovnováhu v rovnici hybnosti roste tak, jak se zvyšuje Reynoldsovo číslo. Od určitého poměru mezi nelineárním konvektivním a třecím členem se začnou objevovat v proudění nestability, které vedou k narušení proudění a vzniku změn v proudění. Vlastností nestabilit je skutečnost, že jen malý přírůstek energie na počátku vyvolá velkou změnu energie na výstupu. V současné době existuje široká řada metod zabývajících se vznikem a identifikací lineárních nestabilit od možnosti matematicky analyzovat pomocné rovnice popisující stabilitu systému (teorie lineárních nestabilit) např. CEBECI [72] anebo přímo řešit Navier-Stokesovy rovnice prostřednictvím výpočetního kódu. Tento druhý případ je zvolen v této kapitole a prostřednictvím této metody jsou nalezeny kritické hodnoty kritériálních čísel (Reynoldsovo číslo, Taylorovo číslo apod.).

8.1 Teorie lineárních nestabilit

Teorie lineárních nestabilit vychází z řešení (přibližné řešení) základních definičních rovnic zejména zákona zachování hybnosti. Nejprve se určuje prostřednictvím výpočtu ustálené stacionární proudění dané okamžitou rychlostí $\mathbf{u}_0$ a tlakem p_0 . Po dosažení ustáleného stacionárního stavu proudění se k rychlostnímu a tlakovému poli přičítá výrazně slabší tzv. rušivé rychlostní pole $\mathbf{u}_r$ a tlakové pole p_r . Celkové rychlostní pole $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_r$ a tlakové pole $p = p_0 + p_r$ se pak řeší podle určujících rovnic a materiálové konstanty se pro jednodušší vysvětlení budou uvažovat o hodnotě 1.

$$\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}_r + \mathbf{f} \quad (8.1)$$

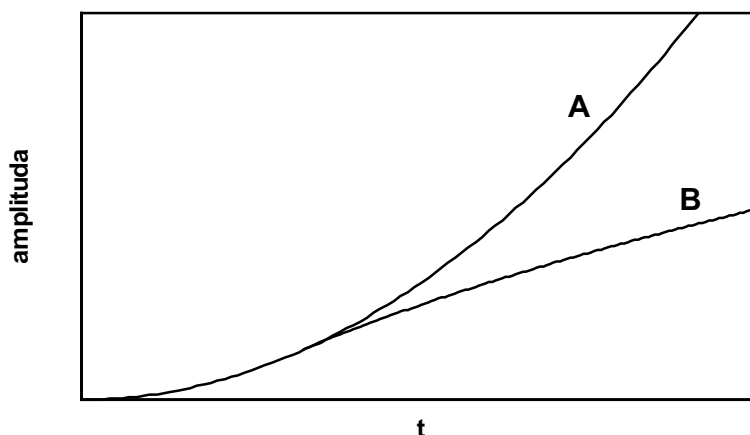
Rychlostní pole $\mathbf{u}_0$ musí splňovat základní rovnici kontinuity. Okrajové podmínky jsou definovány pouze jako tzv. non-slip podmínky vyjádřené výrazem $\mathbf{u}(\mathbf{x} = \Gamma) = \mathbf{0}$. Daná soustava rovnic se dále řeší a pozoruje se, jak se vyvíjejí nestability v rámci časového vývoje. Jakékoliv rychlostní pole s rušivými jevy lze analyzovat pomocí Fourierovy analýzy. Předpokládá-li se pouze lineární typ nestability, pak platí, že neexistuje žádná vazba mezi jednotlivými Fourierovými komponenty. Za podmínek prostorového rušivého pole, popsaného pomocí sinusového průběhu, se pak časový vývoj těchto vzruchů v proudění objevuje ve formě $e^{\sigma t}$.

$$\Delta Q \approx e^{[ikr + \delta t]} \quad (8.2)$$

Parametr δ je definován reálnou a imaginární částí dle vztahu $\delta = i\delta_i + \delta_r$.

Znaménko reálné části δ_r udává, zda-li rušivé jevy budou růst (pozitivní) nebo se utlumí (negativní). Jednotlivé Fourierovy koeficienty lze označit jako k (vlnová čísla). Jestliže δ_r je negativní pro všechny hodnoty k , pak lze jednoznačně říci, že dané proudění je stabilní. Tato podmínka se nazývá obecně podmínkou stability. Na druhou stranu při pozitivní hodnotě δ_r pro alespoň jedno libovolné k bude platit, že se rušivý jev v proudění bude zesilovat. Tato podmínka je dostatečná podmínka pro nestabilní proudění.

Obrázek 8.1 ukazuje možné vývoje amplitudy vzruchů v proudění. Jak naznačuje ilustrativní obrázek, existují různé možnosti růstu amplitudy rušení. Křivka A ukazuje velmi rychlý spontánní růst amplitudy, zatímco křivka B ukazuje zpočátku velmi rychlý růst, který se výrazně zpomalí postupem času.



Obrázek 8.1: Ilustrační obrázek možných časových vývojů amplitudy oscilací v libovolném typu nestabilního proudění

Vznik a vývoj lineárních nestabilit lze velmi názorně ukázat na případě Couettova rotačního proudění, které představuje rotaci dvou pevných stěn kolem jedné společné vertikální osy. Obrázek 8.2 ukazuje schéma Couettova proudění.

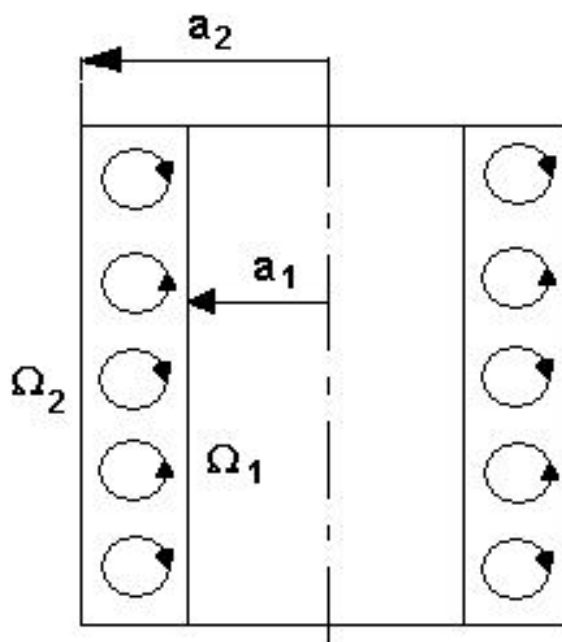
Podle úhlové rychlosti Ω_1, Ω_2 a velikosti nádoby určené poloměry a_1 a a_2 je možné nalézt několik různých režimů proudění. Pro vysvětlení lineárních nestabilit se bude dále uvažovat jednodušší případ, kdy $\Omega_2 = 0$. Reynoldsovo číslo je pak definované dle vztahu 8.3.

$$Re = \Omega_1 a_1 (a_2 - a_1) / \nu \quad (8.3)$$

Předpokládá-li se rušení rychlostního a tlakového pole dle vztahů 8.4 a 8.5, pak studie lineárních nestabilit umožňuje identifikovat hranici stabilního a nestabilního proudění.

$$\Delta U = U(r) \exp[i(m\varphi + kz) + \delta t] \quad (8.4)$$

$$\Delta p = P(r) \exp[i(m\varphi + kz) + \delta t] \quad (8.5)$$

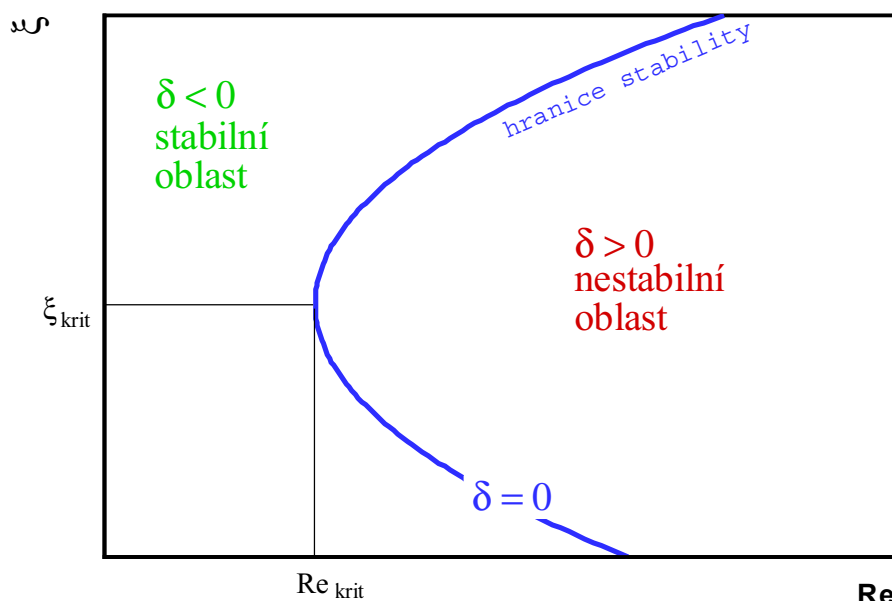


Obrázek 8.2: Schéma Couettovy úlohy s vyznačením vznikajících rotujících vírů

Ve vztahu 8.4 a 8.5 označuje φ azimutální a z axiální směr proudění. Parametr m je libovolné pozitivní celé číslo. Předpokládá-li se dále případ, kdy $m = 0$, pak test lineárních nestabilit je uskutečněn pro axisymetrické podmínky a $\delta_i = 0$. Získané výsledky analýzy lineárních nestabilit lze názorně zobrazit dle ilustračního obrázku 8.3, kde amplituda δ je vyjádřena v bezdimenzionální formě dle vztahu 8.6.

$$\xi = k(a_2 - a_1) \quad (8.6)$$

Pro velmi nízké hodnoty Reynoldsova čísla je σ negativní pro všechny hodnoty ξ . Totéž platí nejen pro $m = 0$, ale i pro $m \neq 0$ tj. pro všechny hodnoty m se oscilace rušení utlumí a azimutální proudění zůstává stabilní. V případě vyšších hodnot Reynoldsova čísla bude amplituda δ pozitivní pro určité hodnoty ξ . To bude mít za následek stálý nárůst amplitudy oscilací. V klasickém testu lineárních nestabilit se zde popsaná studie uskuteční pro každou hodnotu m a určí se minimální hodnota Reynoldsova čísla. Hledaná výsledná kritická hodnota Reynoldsova čísla je rovna jednotlivým minimálním Reynoldsovým číslům z jednotlivých m tj. $Re_{min} = Re_{cr}$.



Obrázek 8.3: Ilustrační obrázek stabilních a nestabilních oblastí a hranice stability pro Couettův typ proudění

8.2 Dosavadní znalosti a publikace

V následující kapitole je věnována pozornost předchozím výsledkům studie lineárních a nelineárních nestabilit v prouděních vyvolaných rotujícím a translačním magnetickým polem. Poněvadž se charakter proudění výrazně mění v okamžiku, kdy se překročí určitá hranice kritického kriteriálního čísla, je tato studie velmi důležitá pro vymezení praktické aplikovatelnosti metod magnetického buzení v technologických procesech. Zde již zmíněné skutečnosti, že při překročení určité mezní hodnoty kriteriálního čísla se výrazně mění charakter proudění, si již povšiml RICHARDSON [4], který svoji prvotní studii zaměřil na rotující magnetické pole působící na elektricky vodivou tekutinu v nádobě o teoreticky nekonečné výšce. Snahy o přesnější identifikaci kritických hodnot proudění, při kterých se poprvé objevují nestability, přišly na řadu až později v rámci prací KAISERA a BENZE [74], MARTHYHO a MARTIN WITKOWSKIHO [62], MÖSSNERA a GERBETHA [67] a GRANTSE a GERBETHA [23]. Pro tyto zde zmíněné studie je typické, že se autoři omezovali na myšlenku axisymetrického proudění a zjištěné výsledky se vzájemně mírně lišily. Určení kritické hodnoty kriteriálního čísla, kritického módu a eventuální frekvence vznikajících oscilací energie bylo uskutečněno

v závislosti na hustotě výpočetní sítě a velikosti nádoby dané poměrem průměru a výšky nádoby. S pomocí těchto vyjmenovaných studií byly odhaleny oscilace proudění ve vertikálním směru, ovšem otázka existence nestabilit v azimutálním směru a jejich úloha při vzniku počátků nestabilit v proudění zůstávala tak nezodpovězena. V práci GRANTSE a GERBETHA [24] je řešena problematika komplexního 3d proudění. Nové získané hodnoty mezního kritériálního čísla, kritického módu, a frekvence oscilací nestabilit se odlišovaly od stejné studie uskutečněné za podmínek osově symetrického proudění. Nicméně bylo zjištěno, že první nestability, které se objevují v proudění, jsou spojeny s oscilacemi azimutální rychlosti, které právě předchází studie nemohly ze své podstaty identifikovat.

Všechny zde zmíněné studie byly uskutečněny použitím numerických metod. V publikaci GRANTSE a GERBETHA [23] je možné rovněž najít experimentální pozorování vzniku nestabilit. Obecné poznatky o vzniku nestabilit rotujícího proudění je možné nalézt společně s teorií v publikaci GALLAIREHO a CHOMAZE [14].

Na rozdíl od rotujícího magnetického pole, je studie vzniku lineárních nestabilit pro případ translačního magnetického pole mnohem chudší. Doposud jsou známé dvě významné práce, GRANTS a GERBETH [24] a GELFGAT [80]. První studie byla zaměřena na obecné určení kritických hodnot spojených se vznikem lineárních nestabilit pro různé poměry průměru a výšky nádoby. Studie GELFGATA se zaměřuje na doplňující studii pro analýzu lineárních nestabilit pro různé hodnoty vlnových čísel a elektrické vodivosti materiálu. Jak demonstrují jeho výsledky, kritické hodnoty parametrů lineárních nestabilit jsou rovněž podstatně ovlivněny těmito dvěma parametry magnetického pole a materiálovou konstantou. Další informace ohledně vzniku nestabilit v případě rotujícího proudění lze také nalézt v literatuře GÖRTLER [17] a SARIC [79].

8.3 Popis numerického testu lineárních nestabilit

Většina publikací zabývajících se studií lineárních nestabilit pomocí numerické simulace vychází z výsledků, které byly získány pomocí výpočetních programů postavených na diskretizačních metodách vyšších řádů. Zpravidla se využívá řešení ve 2D, přičemž třetí rozměr se počítá na základě Fourierovy transformace. Takto lze rozložit rychlostní pole na jednotlivé módy již během samotného výpočtu a počítat tak jen ty módy, které jsou významné, tj. které jsou pro analýzu nestabilit důležité. Tato metoda umožňuje nejen snížit náročnost na výpočetní čas, ale rovněž nabízí mnoho dalších možností pro studii lineárních nestabilit např. oddělení závislosti jednotlivých módů během výpočtu.

Studie prezentovaná v rámci této práce zde popsanou metodu neumožňuje, nýbrž řeší celé proudění jako skutečné 3D proudění se všemi módy zároveň. Navíc diskretizační metoda nabízí maximálně přesnost druhého řádu. Tyto skutečnosti povedou k praktickému závěru, že bude možné počítat pouze omezený počet případů.

Matematický model použitý pro test lineárních nestabilit vychází z ustáleného proudění definovaného rychlostním polem u_0 . Pro definování ustáleného vyvinutého proudění se použila dvě kritéria. První kritérium 8.7 je založeno na velmi malé změně ε^1 v rychlostním poli následného $(n+1)$ a současného (n) časového kroku. Druhé kritérium je založeno na velmi malé změně ε^2 momentu rotace 8.8.

$$\varepsilon^1 = \left| \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\mathbf{u}^n} \right| \quad (8.7)$$

$$\varepsilon^2 = \int_{\Omega} r \cdot \mathbf{u}_{\varphi}^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} r \cdot \mathbf{u}_{\varphi}^n d\Omega \quad (8.8)$$

Po dosažení ustáleného vyvinutého proudění se zavede dodatečné rušení, bez kterého by jinak rychlostní pole zůstalo bez změny. Další výpočet potom ukáže vývoj těchto vzruchů v čase. Velikost rušivého rychlostního pole $\mathbf{u}_r$, které osciluje nepravidelně v prostoru, je dáno náhodnou funkcí s definováním maximální hodnoty $\mathbf{u}_r = 0.1\% \mathbf{u}_0$. Toto rušivé pole je v podstatě, co se týče vlivu na proudění, zanedbatelné, což lze dokázat následujícím vysvětlením.

Předpokládáme-li celkovou energii proudění dle vztahu 8.9, pak podobně můžeme vyjádřit celkovou energii pro dodatečné rušivé rychlostní pole vztahem 8.10.

$$e_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}_0^2 d\Omega \quad (8.9)$$

$$e_r = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}_r^2 d\Omega \quad (8.10)$$

Vztah 8.10 lze dále upravit, jestliže se bude předpokládat, že maximální hodnota rušivého rychlostního pole je dána $0.1\% \mathbf{u}_0$, takže lze vyjádřit maximální možnou hodnotu energie rušivého rychlostního pole také dle vztahu 8.11.

$$e_r = 1 \times 10^{-6} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}_0^2 d\Omega \quad (8.11)$$

Kinetická energie nového rušivého rychlostního proudění je dána hodnotou $e_r = 1 \times 10^{-6} e_0$. Tato hodnota je velmi malá ke skutečné kinetické energii ustáleného rychlostního pole, ovšem jak ukážou výsledky numerické studie vzniku lineárních nestabilit pro rotující a translační magnetické pole, vyvolají tyto malé změny energie velkou odezvu v proudění, které leží již v oblasti nestabilního režimu proudění. V případě, že se podaří dosáhnout uspokojivé srovnání s výsledky z přesnějších metod výpočtu (např. spektrální metody), je možné prokázat rovněž správnost diskretizace nelineárního konvektivního členu Navier-Stokesových rovnic ve výpočetním kódu NS-FEM3D. Právě jakákoliv eventuální chyba v implementaci nelineárního členu by měla hrozivý dopad na konečné výsledky.

K definici samotného testu lineárních nestabilit je nutné ještě zmínit způsob vyhodnocení výsledků. Všechny průběhy energií v jednotlivých módech proudění jsou zaneseny do grafu, přičemž znázorněné hodnoty energie E^* jsou vztaženy na průměrnou hodnotu energie v módu 0. Tím je zaručena možnost vzájemného porovnání výsledků. Hodnoty rychlostí jsou vyjádřeny rovněž bezdimenzionálně dle vztahu $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}R/\nu$, kde R je poloměr nádoby, ν je kinematická viskozita tekutiny a $\mathbf{u}$ reprezentuje skutečné rychlostní pole.

8.4 Proudění vyvolané rotujícím magnetickým polem

Test vzniku lineárních a nelineárních nestabilit byl uskutečněn na případě proudění generovaného rotujícím magnetickým polem. Výpočetní nestrukturovaná síť je tvořena elementy se 4 uzly (tetrahedral) s hustotou sítě odpovídající dělení $R/60$. Na této relativně jemné síti byla provedena studie vzniku nestabilit s cílem určit kritickou hodnotu Taylorova čísla, příslušný kritický mód a frekvenci oscilací energie nebo rychlostí.

8.4.1 Velikost nádoby $Z=1$

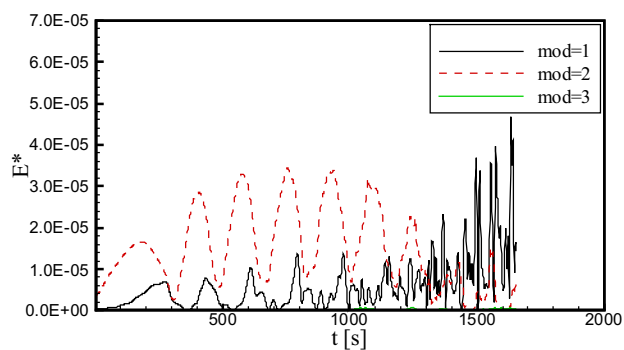
Test vzniku nestabilit v proudění byl uskutečněn na velikosti nádoby $Z = 1$, pro kterou jsou dostupné výsledky jiné numerické studie pocházející z výpočtů realizovaných přesnějšími

metodami (spektrální metody s vysokým řádem interpolační funkce). Test nestabilit byl realizován na 4 případech Taylorova čísla $Ta_m = 1.1 \times 10^5$, $Ta_m = 1.2 \times 10^5$, $Ta_m = 1.25 \times 10^5$ a $Ta_m = 1.3 \times 10^5$. Tyto hodnoty Taylorových čísel byly zvoleny s ohledem na uskutečněnou studii stability proudění v případě rotujícího magnetického pole (GRANTS a GERBETH [24]). Na obrázku 8.4 jsou uvedeny vývoje energií ve třech základních módech pro různou hodnotu Taylorova čísla.

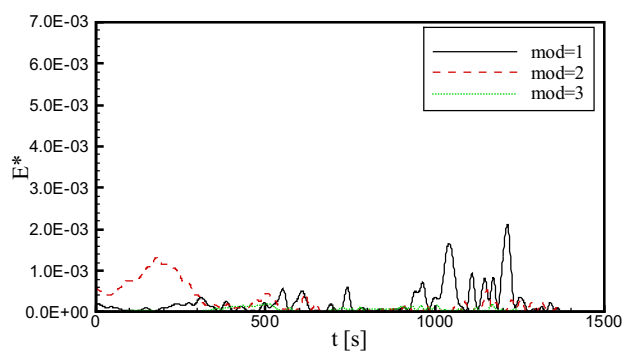
Mezi hodnotou Taylorova čísla $Ta_m = 1.1 \times 10^5$ a $Ta_m = 1.2 \times 10^5$ dochází k velkému skoku v hodnotách energií až o dva řády u všech módů $m > 0$. Dalším zvýšením hodnot Taylorova čísla až na hodnotu $Ta_m = 1.3 \times 10^5$ se již hodnoty energií tak razantně nezvyšují. Na základě těchto testů se dá odhadnout hodnota kritického Taylorova čísla ležící přibližně kolem hodnoty $Ta_m = 1.2 \times 10^5$. Dle dostupných výsledků GRANTSE a GERBETHA [24] je hodnota kritického Taylorova čísla přibližně $Ta_m = 1.23 \times 10^5$. Odchyłka zde prezentované studie tak činí maximálně 2.5%. To je relativně dobrý výsledek s ohledem na skutečnost, že použitá metoda konečných prvků umožňuje dosáhnout přesností maximálně druhého řádu.

Jak dále ukazuje obrázek 8.4, pro případ proudění definovaného hodnotou Taylorova čísla $Ta_m = 1.1 \times 10^5$ je možné pozorovat v počátku vývoje nestabilit relativně pravidelnou oscilaci energie u módu 1 a 2. Po určité době se oscilace módu 2 ovšem utlumí a dále převažují již pouze nepravidelné oscilace módu 1. Na vyšších hodnotách Taylorova čísla se ukazuje rovněž počáteční dominantní postavení módu 2 z hlediska rozložení energie a i zde později převládá mód 1. Na základě stejné studie GRANTSE a GERBETHA [24] je mód 2 právě hledaným kritickým módem. V případě zde uvedeného testu ovšem tento mód je co do velikosti energie s průběhem času zcela potlačen dalšími módy. Ve stejném časovém okamžiku se objevují v rychlostním poli náznaky existence Taylor-Görtlerových vírů 5.15. Tyto skutečnosti vedou k závěru, že v případě proudění generovaného rotujícím magnetickým polem není možné pozorovat vznik lineárních nestabilit nekonečně dlouho, neboť existence lineárních nestabilit se projevuje jen velmi krátce na počátku testu. Později se objevují pouze nelineární nestability, kdy dochází k nepravidelným oscilacím energie všech zde pozorovaných módů.

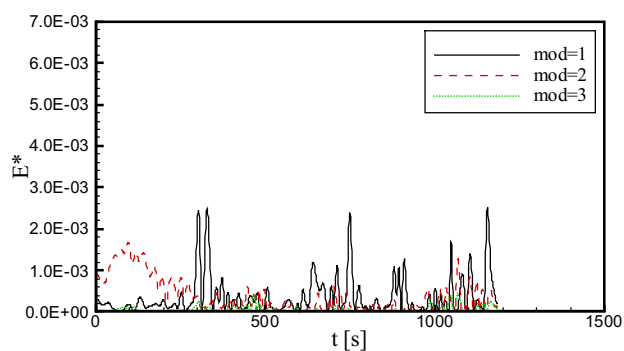
Na obrázku 8.5 je možné pozorovat časový vývoj energie pro hlavní mód 0. V případě proudění definovaného hodnotou Taylorova čísla $Ta_m = 1.1 \times 10^5$ je amplituda oscilací energie přibližně 0.02, zatímco při vyšších hodnotách Taylorova čísla jsou již tyto hodnoty amplitud oscilací 0.1. I zde je patrný výrazný nárůstu energie při malé změně hodnoty Taylorova čísla. Vznikající oscilace energie módů 0 je nepravidelná ve všech pozorovaných případech Taylorova čísla, avšak nelze vyloučit existenci periodických struktur o nízkých frekvencích.



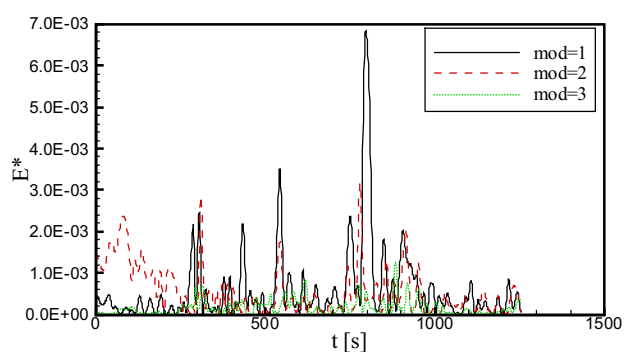
$$Ta_m = 1.1 \times 10^5$$



$$Ta_m = 1.2 \times 10^5$$

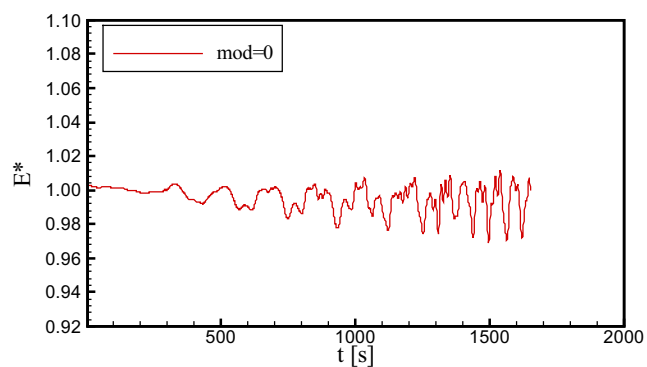


$$Ta_m = 1.25 \times 10^5$$

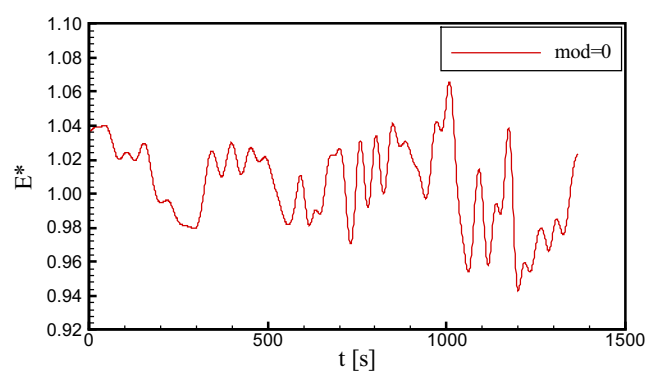


$$Ta_m = 1.3 \times 10^5$$

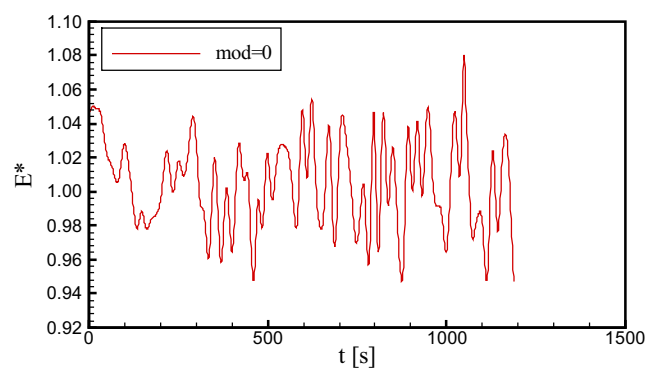
Obrázek 8.4: Vývoj energie v módech $m = 1$, $m = 2$ a $m = 3$ pro různé hodnoty Taylorova čísla Ta_m



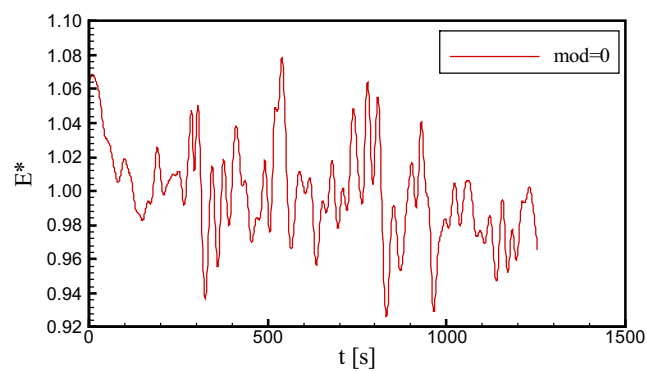
$$Ta_m = 1.1 \times 10^5$$



$$Ta_m = 1.2 \times 10^5$$



$$Ta_m = 1.25 \times 10^5$$



$$Ta_m = 1.3 \times 10^5$$

Obrázek 8.5: Vývoj energie v $m = 0$ pro různé hodnoty Taylorova čísla Ta_m

8.5 Proudění vyvolané účinkem translačního magnetického pole

Test lineárních nestabilit v proudění vyvolaného translačním magnetickým polem je studováno pro velikost nádoby $Z = H/2R = 1$ a $Z = H/2R = 0.5$. Základním cílem je opět nalézt kritickou hodnotu parametru F_{cr} , kritický mód m_{cr} a kritickou frekvenci λ_{cr} určujícího kritického módu. Získané výsledky lze porovnat s výsledky publikovanými v literatuře GRANTSE a GERBETHA [24] a GELFGATA [80]. Základní studie lineárních nestabilit je uskutečněna na velikosti nádoby $Z = 1$. Vliv studie sítě na vznik nestabilit včetně základního testu je uskutečněn na velikosti nádoby $Z = 0.5$.

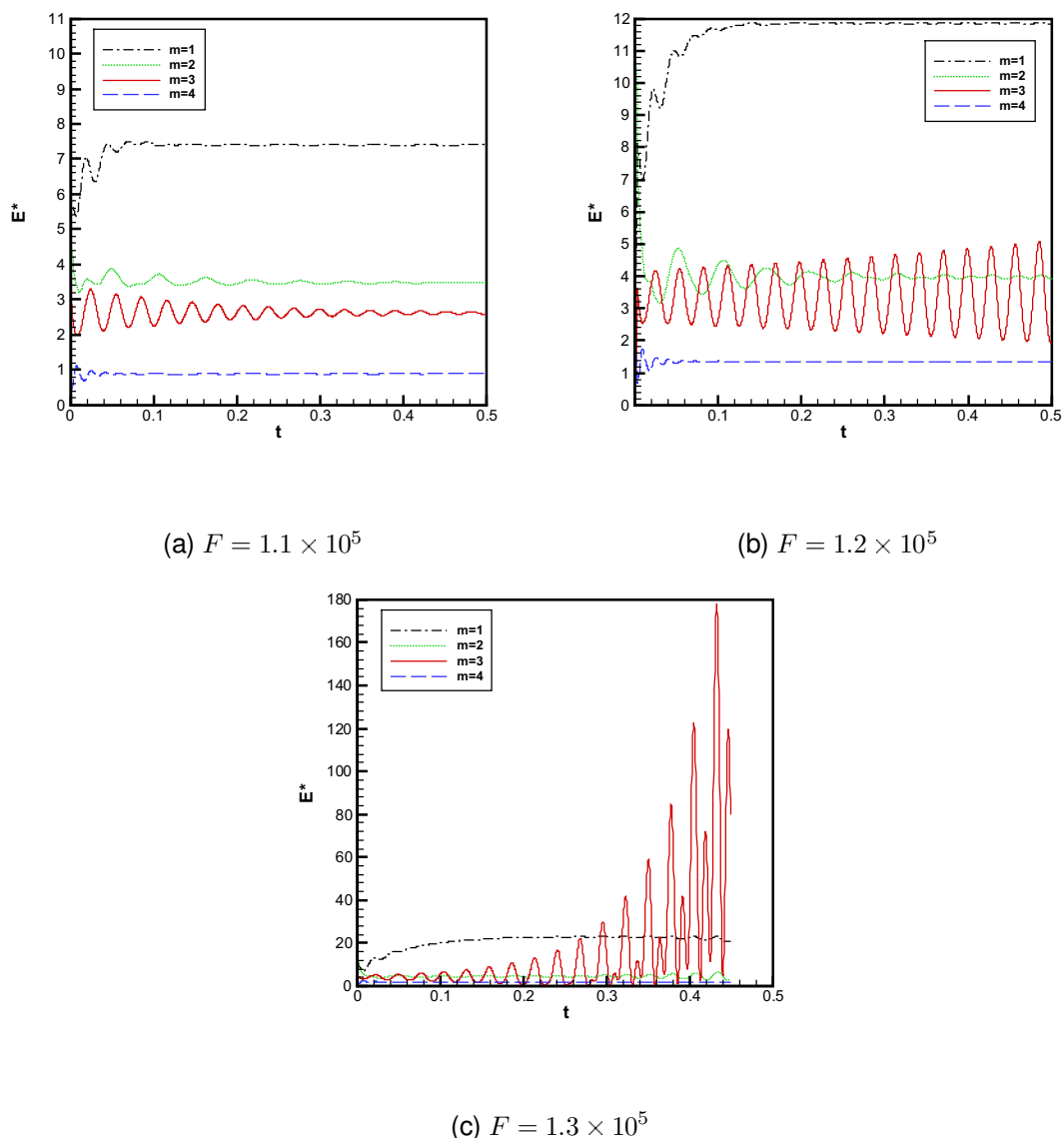
8.5.1 Velikost nádoby $Z=1$

Základní studie vývoje lineárních nestabilit je uskutečněna na velikosti nádoby $Z = H/2R = 1$. Výpočetní síť je dána 4 uzlovými elementy (tetrahedral) s hustotou sítě odpovídající rozdělení $R/30$. Test lineárních nestabilit byl uskutečněn na třech různých hodnotách kritériálního čísla $F = 1.1 \times 10^5$, $F = 1.2 \times 10^5$ a $F = 1.3 \times 10^5$.

Obrázek 8.6a ukazuje časový vývoj energie v jednotlivých módech pro hodnotu čísla $F = 1.1 \times 10^5$. Zřetelné oscilace energie, které se objevily ve všech módech těsně po zavedení rušivých jevů do rychlostního pole, se postupně během časového vývoje utlumily. Tento fakt ukazuje na skutečnost, že proudění definované parametrem $F = 1.1 \times 10^5$ je stabilní. V případě, že se hodnota kritériálního čísla zvýší na hodnotu $F = 1.2 \times 10^5$ vznikají opět oscilace v časovém vývoji energie.

Obrázek 8.6b ovšem ukazuje, že se oscilace energie v módu 3 neutlumí, zatímco ostatní módy zůstávají stabilní. Poněvadž se amplituda oscilací u módu 3 zvyšuje velmi pomalu, lze odhadovat, že proudění dané $F = 1.2 \times 10^5$ leží velmi těsně na hranici stability proudění. Jestliže se dále zvýší hodnota kritériálního čísla na hodnotu $F = 1.3 \times 10^5$, amplituda oscilací energie prudce narůstá na módu 3 a zároveň později se objevují oscilace také u dalších módů. Obrázek 8.6c zachycuje prudký nárůst amplitudy u módu 3, a rovněž se objevují oscilace i u dalších módů. Tato skutečnost potvrzuje, že proudění definované hodnotou $F = 1.3 \times 10^5$ leží definitivně v oblasti nestabilního proudění.

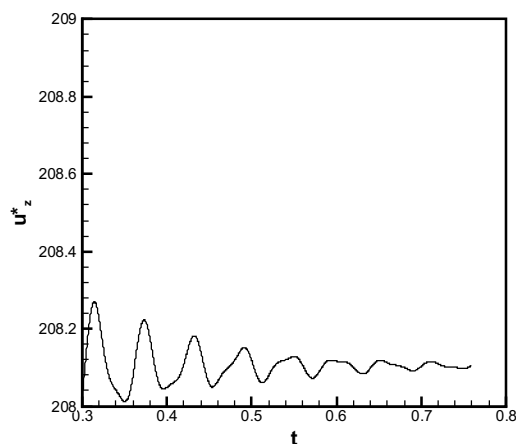
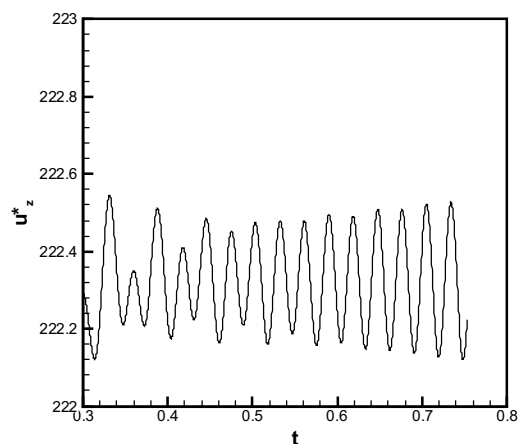
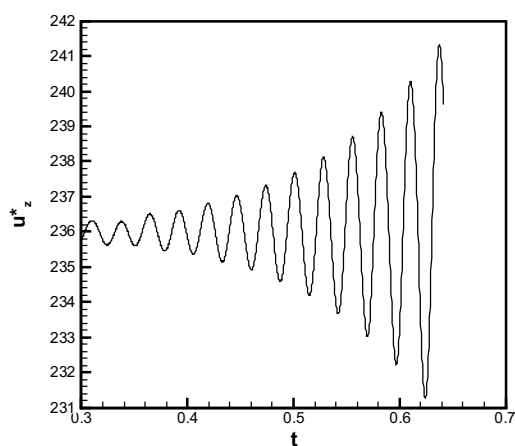
Na základě obrázku 8.6b lze odvodit, že kritická hodnota kritériálního čísla pro proudění vyvolané translačním magnetickým polem leží blízko hodnoty $F_{cr} = 1.2 \times 10^5$. Kritickým módem je mód 3, kde se poprvé objevuje nárůst amplitudy oscilací energie bez útlumu amplitudy. Frekvence oscilací je dle obrázku 8.6b $\lambda_i = 218$. Tyto zjištěné hodnoty jsou v dobré



Obrázek 8.6: Lineární nestability v proudění definované různými hodnotami kritériálního čísla F

shodě s výsledky GRANTSE a GERBETHA[24], kteří prezentovali výsledky $F_{cr} = 1.204 \times 10^5$, kritický mód 3 a kritickou frekvenci $\lambda_i = 219$.

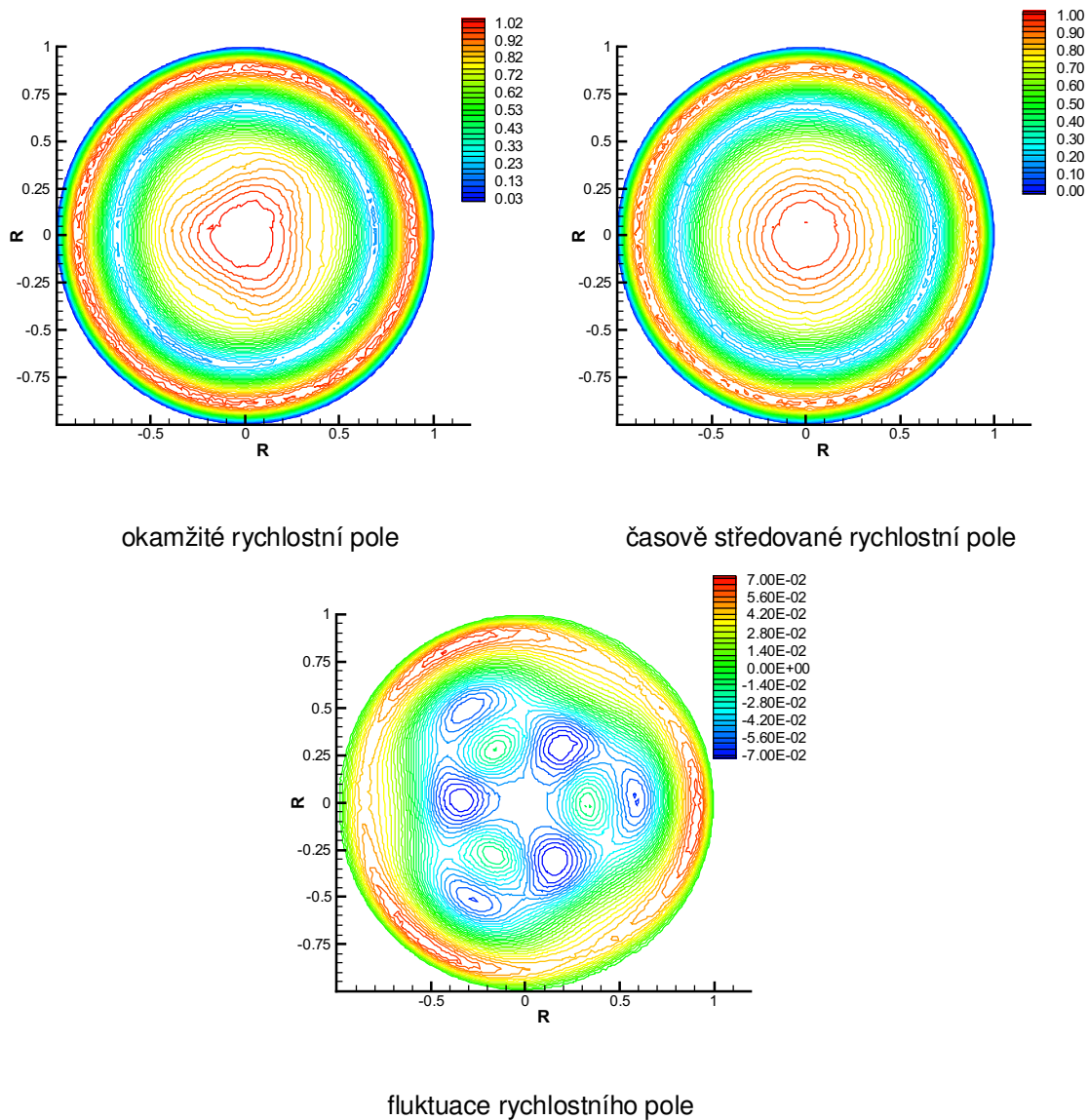
Na obrázku 8.7 je časový vývoj okamžité rychlosti na pozici definované $h = H/3$ a $r = 2R/3$. Rovněž průběh rychlostí ukazuje vliv vznikajících nestabilit v proudění, ovšem na základě časového vývoje není možné identifikovat kritický mód. Časový vývoj rychlosti pro případ proudění s $F = 1.1 \times 10^5$ ukazuje oscilaci rychlosti, která však během výpočtu zeslábně. V případě hodnoty $F = 1.2 \times 10^5$ se amplituda oscilace rychlosti slabě zvyšuje a

(a) $F = 1.1 \times 10^5$ (b) $F = 1.2 \times 10^5$ (c) $F = 1.3 \times 10^5$

Obrázek 8.7: Časový vývoj okamžité rychlosti pro různé hodnoty kritériálního čísla.

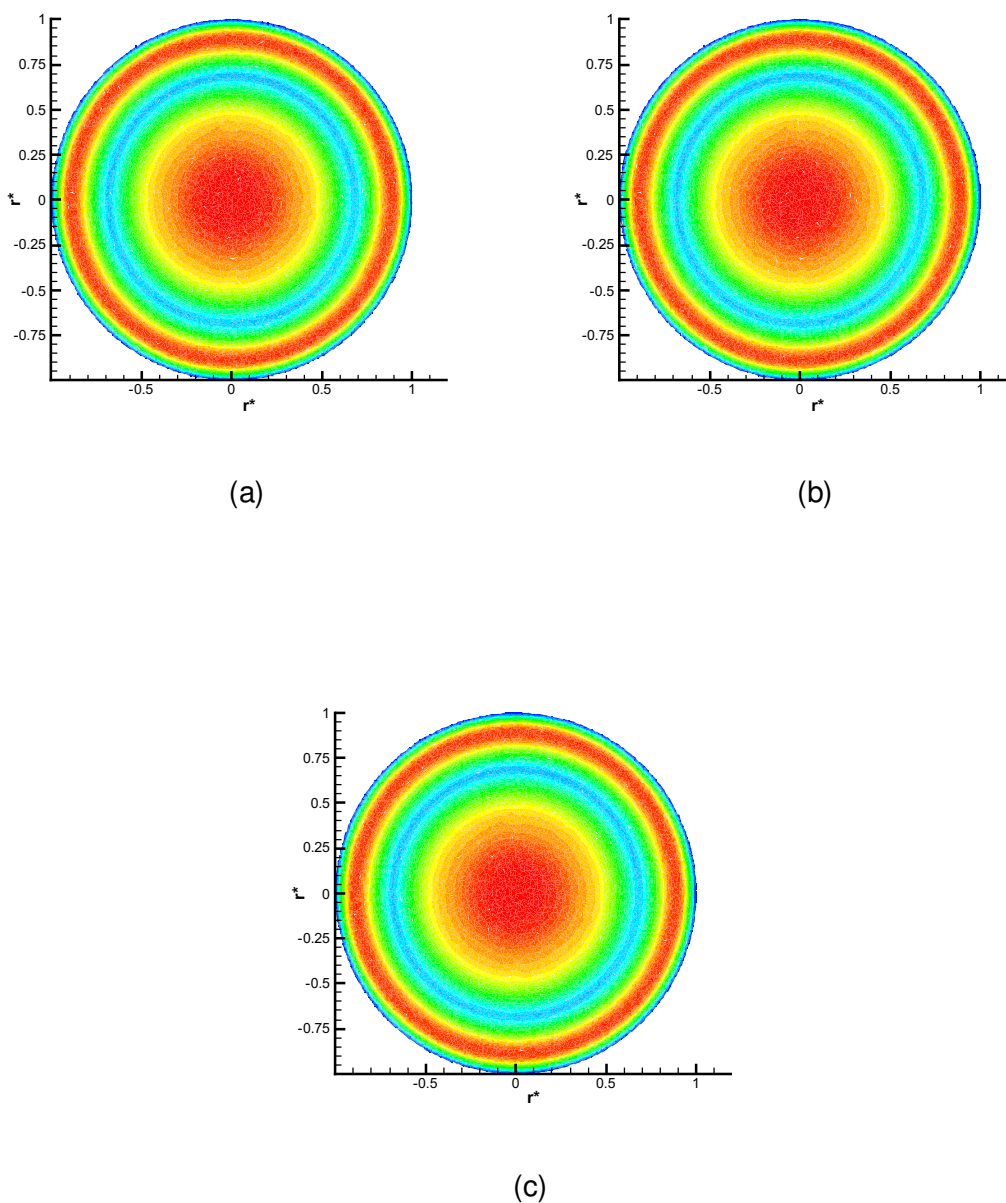
tento průběh okamžité rychlosti ukazuje na začínající nestabilní proudění. S dalším zvýšením intenzity proudění na hodnotu kritériálního čísla $F = 1.3 \times 10^5$ dochází výraznému nárůstu amplitudy oscilace. Tento závěr dokazuje, že vznik a vývoj nestabilit se projevuje rovněž v oscilaci časového průběhu okamžité rychlosti.

Na obrázku 8.8 je znázorněna axiální složka rychlostního pole pro případ proudění definovaného hodnotou $F = 1.3 \times 10^5$. Totéž vyhodnocení pro případ $F = 1.2 \times 10^5$ je možné nalézt na obrázku 8.9.



Obrázek 8.8: Rychlostní pole pro $F = 1.3 \times 10^5$ v řezu r-r ve výšce $z=0.546$.

Okamžité hodnoty rychlostí a časově středované hodnoty neodhalují přítomnost kritického módu v proudění. Prostřednictvím obou druhů rychlostních polí je možné stanovit flukтуаční rychlostní pole, které ukazuje přítomnost 3 maximálních a 3 minimálních hodnot rychlostí na určitém poloměru válcové nádoby. Tato tři maxima nebo minima odpovídají módu 3, který byl identifikován na základě Fourierovy transformace.

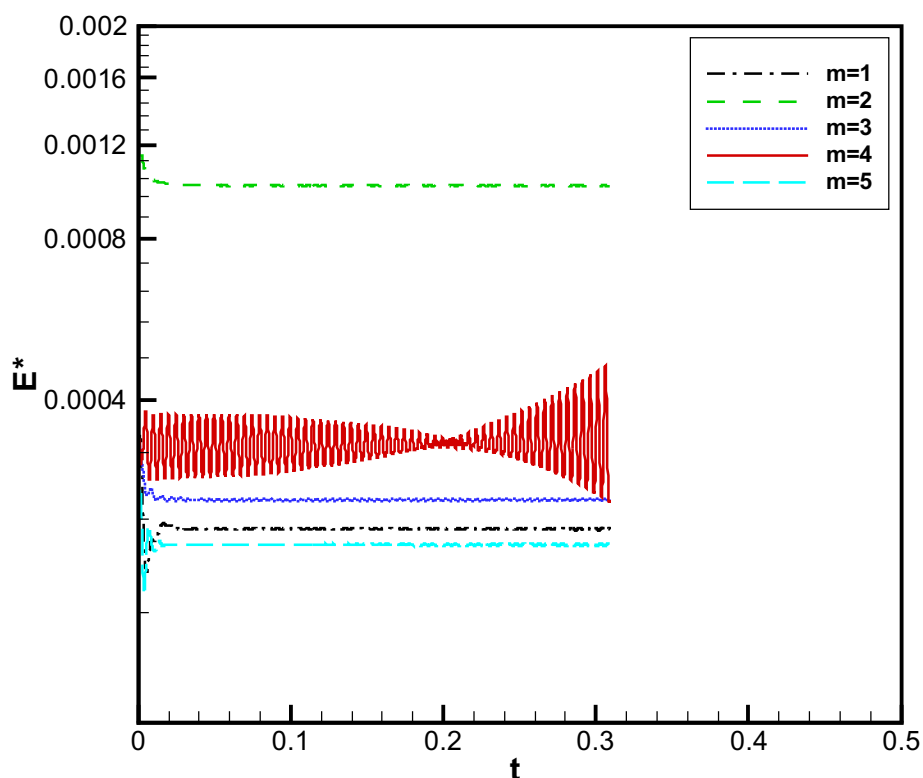


Obrázek 8.9: Výsledky bezrozměrných rychlostních polí pro případ hodnoty kritériálního parametru $F=1.2 \times 10^4$ ve vertikálním řezu umístěném v první 1/2 výšky nádoby. Rychlostní pole jsou vyjádřena v bezdimenzionální formě: (a) okamžité rychlostní pole, (b) časově středované rychlostní pole a (c) flukuační rychlostní pole

8.5.2 Velikost nádoby $Z=0.5$

Test lineárních nestabilit pro případ velikosti nádoby $Z = 0.5$ s hustotou výpočetní sítě $R/30$. Obrázek 8.10 ukazuje vývoj energie v jednotlivých módech po zavedení rušivého

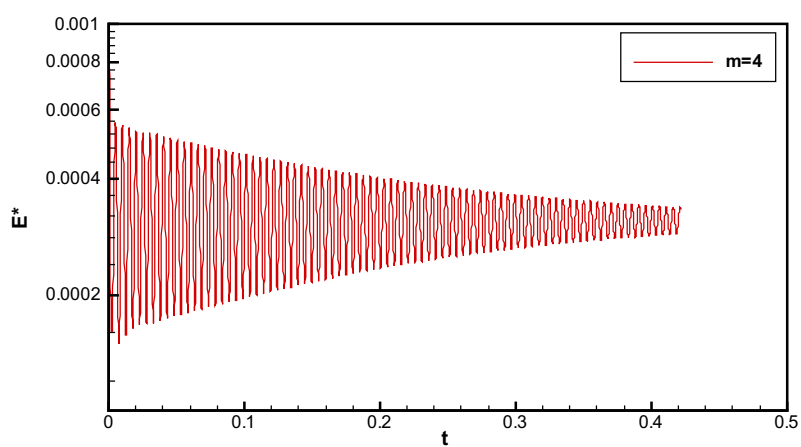
rychlostního pole pro $F = 3.9 \times 10^5$. Jak je patrné z obrázku, všechny módy až na mód 4 jsou stabilní, tj. neexistuje oscilace energie v těchto módech, na rozdíl od módu 4, kde je patrná nejprve klesající a později rostoucí amplituda oscilací energie.



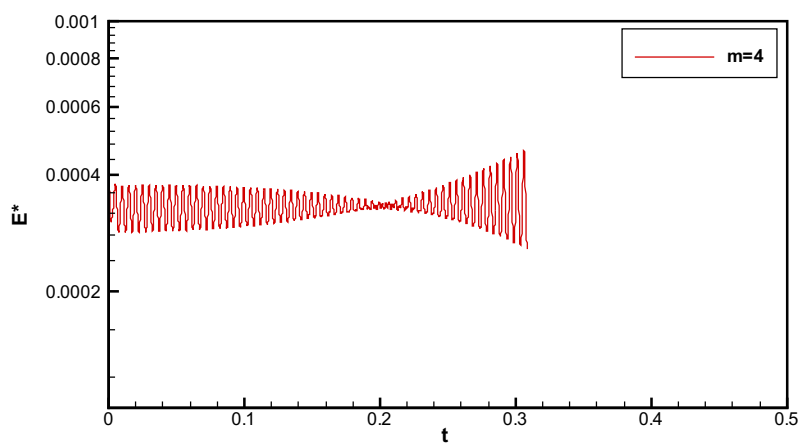
Obrázek 8.10: Analýza nestabilit pro případ $F = 3.9 \times 10^5$.

Dle studie uskutečněné na různých hodnotách kriteriálního kritického čísla se dá prokázat, že existuje jeden dominantní mód, kde se poprvé objevují nestability a v případě tohoto testu je to mód 4.

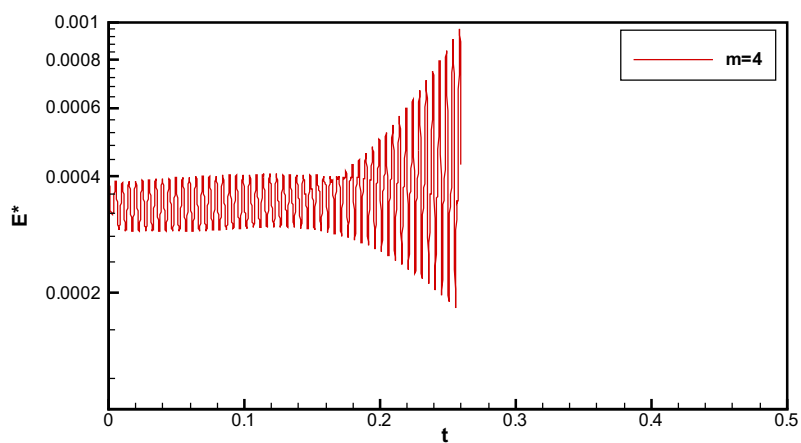
Další studie je proto zaměřena pouze na mód 4, přičemž cílem je nalézt kritickou hodnotu kriteriálního čísla a identifikovat kritickou hodnotu frekvence těchto oscilací. Na obrázku 8.11 jsou testovány případy proudění definované kriteriálním číslem $F = 3.8 \times 10^5$, $F = 3.9 \times 10^5$ a $F = 3.95 \times 10^5$ pro mód 4. Proudění definované kriteriálním číslem o velikosti $F = 3.8 \times 10^5$ vykazuje stabilitu módu 4 během celé výpočetní doby. Zpočátku vykazuje kritický mód oscilace energie, ovšem během rostoucího výpočetního času tyto oscilace



(a) $F = 3.8 \times 10^5$

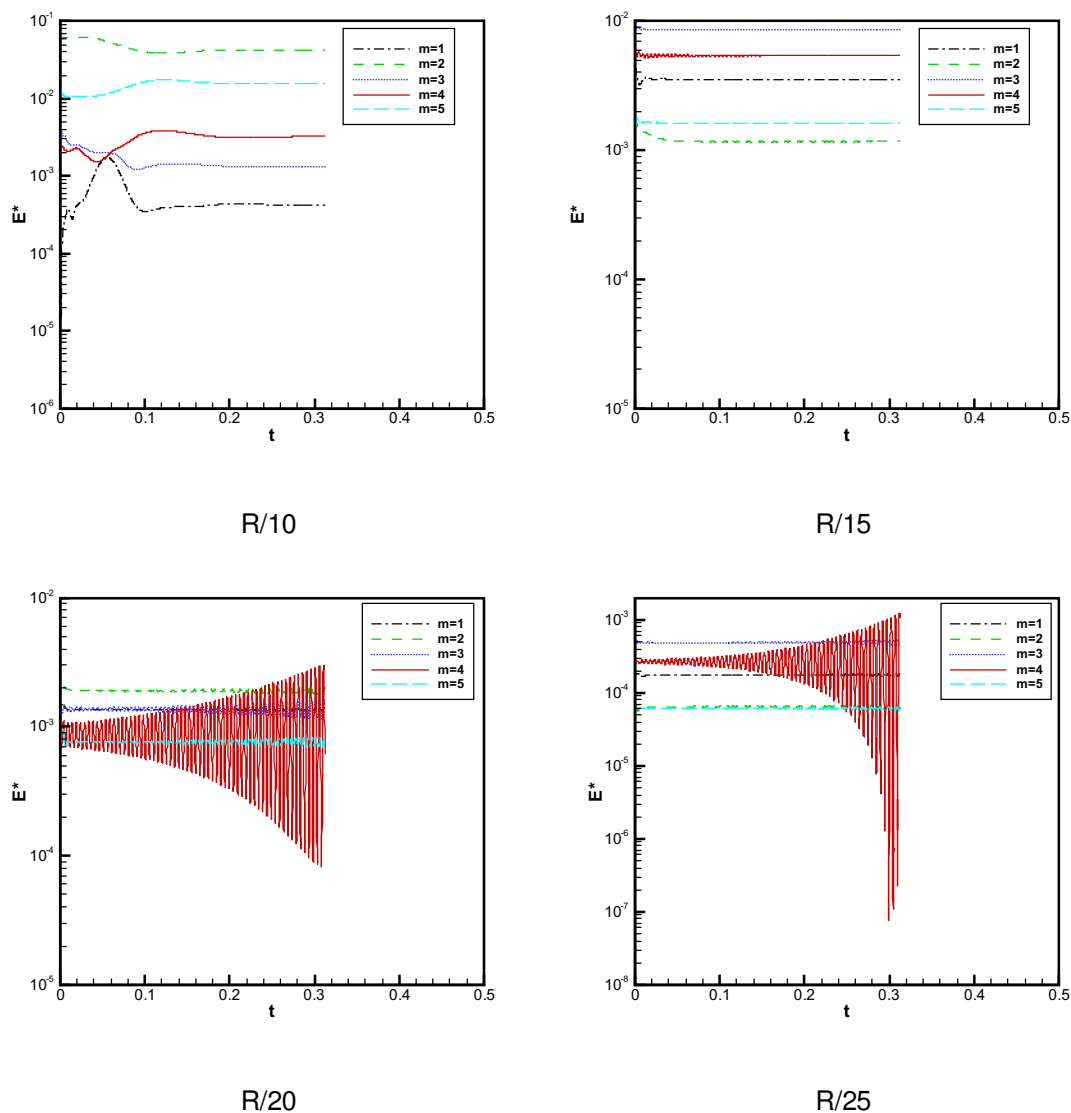


(b) $F = 3.9 \times 10^5$



(c) $F = 3.95 \times 10^5$

Obrázek 8.11: Analýza lineárních nestabilit v módu 4.



Obrázek 8.12: Studie lineárních nestabilit v závislosti na hustotě sítě.

zcela vymizí a mód 4 zůstává stabilní viz obrázek 8.11 (a). Proudění definované touto hodnotou lze tak považovat za stabilní. Zvýšením hodnoty čísla F na úroveň $F = 3.9 \times 10^5$ a zavedením dodatečného rušivého jevu do proudění se objevují oscilace opět na módu 4, které se zpočátku zeslabují, ale později opět rostou, jak ukazuje obrázek 8.11 (b). Tento stav vývoje energie ukazuje na režim proudění ležící v těsné blízkosti hranice lineární stability. Ostatní módy zůstávají stabilní po celou dobu výpočetního času. Dalším zvýšením čísla F na hodnoty $F = 3.95 \times 10^5$ a po dodatečném zavedení rušivého jevu od rychlostního pole

zůstane mód 4 kritický se stále rostoucí oscilací energie viz obrázek 8.11 (c). Tyto oscilace se slabě přenášejí také na jiné módy než je kritický. Tento jev je zřetelnější s tím, jak se zvyšující hodnota F vzdaluje od kritické hodnoty F_{cr} .

Uskutečněný test lineární stability proudění tak pomohl identifikovat kritickou hodnotu $F_{cr} = 3.9 \times 10^5$ s kritickým módem 4 a s kritickou frekvencí $\lambda_i = 619$. Tyto výsledky jsou v dobré shodě s výsledky GRANTSE a GERBETHA [24], kteří našli kritickou hodnotu $F_{cr} = 3.9 \times 10^5$, kritický mód 4 s kritickou frekvencí $\lambda_i = 630$. Rozdíl ve frekvenci oscilace energie kritického módu 4 je pouze 1.7 %. Identifikace kritické hranice kritériálního čísla, kritického módu a frekvence oscilací pro velikost nádoby definovanou poměrem $Z = 0.5$ poslouží jako výchozí bod pro následující studii sítě.

8.5.3 Test hustoty sítě

Vznik a vývoj lineárních nestabilit může být také závislý na hustotě výpočetní sítě, a proto následující obrázky 8.12 ukazují vznik a vývoj lineárních nestabilit v závislosti na hustotě výpočetní sítě pro případ $F_{cr} = 3.95 \times 10^5$. Tato studie sítě je provedena úmyslně na velikosti nádoby $Z = 0.5$, která vyžaduje o 50% méně výpočetních uzlů než standardně používaná velikost nádoby $Z = 1$ a tak lze ušetřit výpočetní čas.

Jak ukazují obrázky 8.12, je vznik lineárních nestabilit závislý na hustotě výpočetní sítě. V případě sítě s dělením $R/10$ a $R/15$ je patrné, že vývoj energie ve všech významných módech (1-5) zůstává stabilní po dlouhou dobu výpočetního času a to i navzdory dodatečnému rozrušení rychlostního pole na počátku studie. Jestliže tytéž podmínky studie lineárních nestabilit jsou realizovány na výpočetní síti s vyšší hustotou než $R/20$, vznikají po dodatečném rozrušení rychlostního pole pozorovatelné lineární nestability. Ty se projevují pouze v módu 4, zatímco ostatní módy zůstávají stabilní. Z výše uvedené studie sítě tak vyplývá podstatný závěr, že při podobných testech je nutné použít hustotu sítě vyšší než $R/20$, aby nedocházelo ke zkreslení výsledků v důsledku nepřesnosti vznikající použitím příliš hrubé výpočetní sítě. Použije-li se síť s příliš hrubým dělením, nebude možné správně identifikovat kritickou hranici oddělující stabilní a již nestabilní oblast proudění.

Kapitola 9

Porovnání výsledků simulací s experimenty a teorií

Ověření výsledků numerické simulace je obtížné, neboť realizace experimentů je náročná na vybavení a provoz zkušebního zařízení. Přesto se nabízí možnost porovnat výsledky buď s teorií, nebo s výsledky získanými výpočtem v odlišných výpočetních programech. Nejzajímavější porovnání je srovnání výsledků s experimentálním měřením.

Na začátku je nutné poznamenat, že většina numerických výsledků je zaměřena především na velikost nádoby danou ($H/D=1$). Velikost nádoby všech zde zveřejněných studovaných případů je dána poměrem ($H/D=1.5$). Na začátku numerické studie bylo možné se eventuálně rozhodnout buď pro poměr ($H/D=1$), který by umožnil úplné srovnání s jinou numerickou analýzou, anebo upřednostnit velikost ($H/D=1.5$), která je detailně experimentálně zkoumána v rámci prací ve výzkumném ústavu Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf (Německá spolková republika). Jelikož porovnání s experimentálními výsledky má větší význam, byl nakonec upřednostněn poměr definovaný s ($H/D=1.5$). Přesto je možné nalézt alespoň hrubé srovnání vlastních numerických výsledků s jinými publikovanými numerickými výsledky.

Aby bylo možné vůbec výsledky navzájem porovnat, je nutné použít bezrozměrné parametry. V odborné literatuře neexistuje doposud shoda v tom, jaké bezrozměrné parametry by měly být použity. Z toho důvodu je možné najít hned několik variant. V podstatě nejčastěji se vyskytuje varianta magnetického Taylorova čísla (3.4), nebo Reynoldsova čísla (3.1). Reynoldsovo číslo může být vztaženo k maximální hodnotě azimutální rychlosti a poloměru válcové nádoby Re dané vztahem (3.1) anebo jako úhlová rychlost v potenciálním jádru

Ta_m	Ta_m/Ta_m^{cr}	Re	Re_2
8×10^4	$1.9 Ta_m^{cr}$	849	47814
1×10^5	$2.4 Ta_m^{cr}$	932	50338
3×10^5	$7.1 Ta_m^{cr}$	2137	145590

Tabulka 9.1: Porovnání bezrozměrných parametrů použitých pro oblasti nadkritických magnetických Taylorových čísel.

Ω_{rot} a poloměru válcové nádoby Re_2 . Všechny tyto tři zmíněné parametry budou použity v rámci porovnání výsledků, a proto tabulka 9.1 obsahuje hodnoty těchto parametrů hlavně pro oblast turbulentního proudění.

Tak jako existuje několik variant definic pro Reynoldsovo číslo, tak je možné nalézt také mnoho definic pro magnetické Taylorovo číslo. V rámci této práce se používá pouze definice magnetického Taylorova čísla (3.4) představená v kapitole 'Matematický model'.

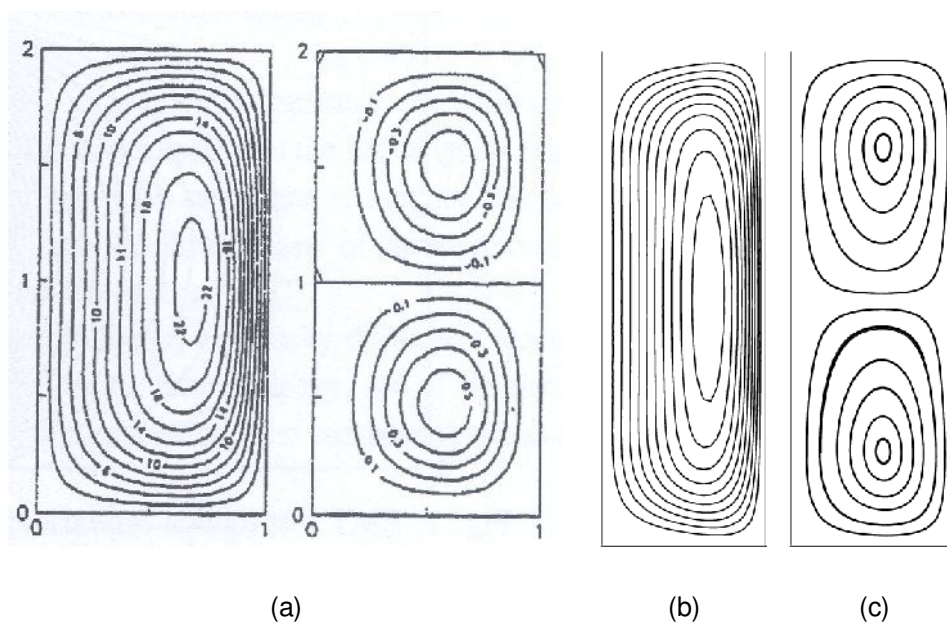
9.1 Hrubá validace výsledků

Jak zde již bylo zmíněno, většina doposud publikovaných numerických výsledků charakterizuje geometrii danou poměrem ($H/D=1$).

I když skutečná studovaná velikost nádoby je poněkud jiná, stále existuje možnost porovnávat výsledky na základě např. fyzikálních jevů, které se objevují pro charakteristickou velikost bezrozměrových parametrů. A tak je dokázán známý fakt, že v případě laminárního proudění se očekává symetrie sekundárního a hlavního azimutálního proudění. Naopak v oblasti nadkritického proudění se posouvají středy sekundárních vírů směrem ke koncům hran nádob atd. Tyto společné fyzikální jevy se objevují nezávisle na velikosti nádoby a tudíž je možné je použít pro kvalitativní srovnání.

Jako referenční výsledky, se kterými jsou zde publikované výsledky konfrontovány, pocházejí od autorů GELFGAT a PRIEDE [26]. Kromě různě veliké nádoby jsou ostatní parametry tj. magnetické Taylorovo číslo apod. stejně definované. Tyto tzv. referenční výsledky byly autory GELFGATEM a PRIEDEM rovněž porovnány s experimenty (tudíž jejich platnost je experimentálně ověřena) a jsou založeny na axisymetrickým prouděním tekutiny. Řešení je tak omezeno pouze na 2D případ. Tyto výsledky jsou porovnány pak s vlastním 3D výpočtem.

Na obrázku 9.1 je možné vidět azimutální rychlost a proudovou funkci pro axiální proudění.



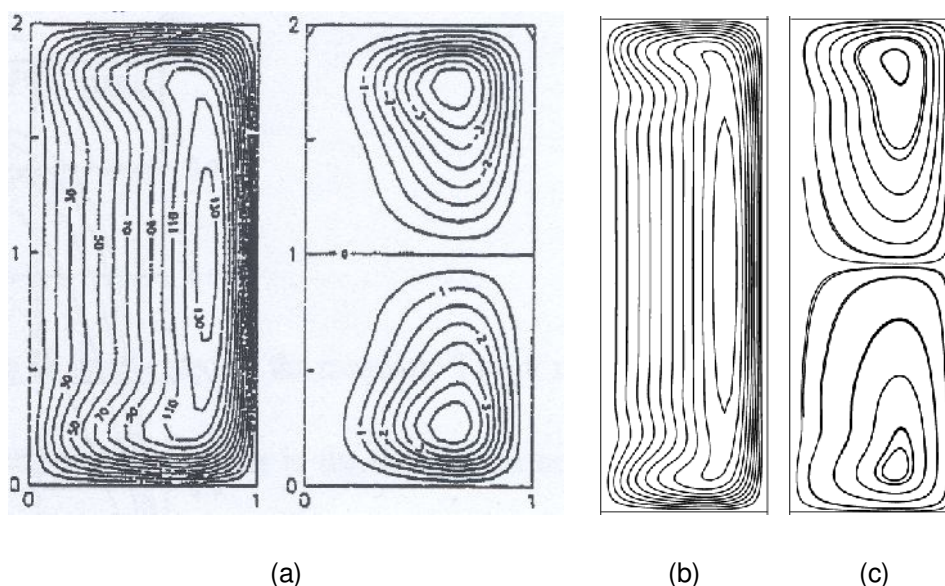
Obrázek 9.1: Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu číslu $Ta_m=1000$.

Vlevo jsou výsledky publikované autory GELFGAT a PRIEDE [26], jež představují rychlostní pole pro podkritickou oblast magnetického Taylorova čísla (resp. $Ta_m=1000$).

Na stejném obrázku vpravo je znázorněno totéž rychlostní pole získané numerickým výpočtem (je znázorněna pouze polovina válcové nádoby, neboť se předpokládá úplná symetrie proudění). Na první pohled je zřejmé, že velikost nádoby je odlišná. Přesto je možné vyjádřit společné charakteristiky proudění, které jsou převážně dány magnetickým Taylorovým číslem. Azimutální proudění, zobrazené pomocí izočár, vytváří hlavní rotační proudění, jehož maximální hodnoty se nacházejí blíže u stěny válcové nádoby. Meridiální proudění zobrazené pomocí proudové funkce ukazuje také na obou obrázcích symetrické rozložení. V obou případech je patrné sekundární proudění ve vertikálním směru tvořené dvěma sekundárními víry. Hrubým srovnáním je možné kvalitativně posoudit výsledky z numerické analýzy prováděné v rámci této práce s výsledky dosaženými jinými autory, kteří měli možnost porovnat své výsledky s experimenty.

Na obrázku 9.2 jsou porovnávána opět rychlostní pole pro případ magnetického Taylorova čísla 1×10^4 . I nadále se jedná o podkritickou oblast proudění, kde se nevyskytují žádné nestability v proudění. Ovšem tato oblast již je tzv. nelineární laminární oblastí. Tato nelineární oblast tvoří mezistupeň mezi laminární lineární oblastí a nadkritickou nestacionární oblastí.

Na dalším obrázku 9.3 jsou porovnávána rychlostní pole pro případ nadkritického Taylo-



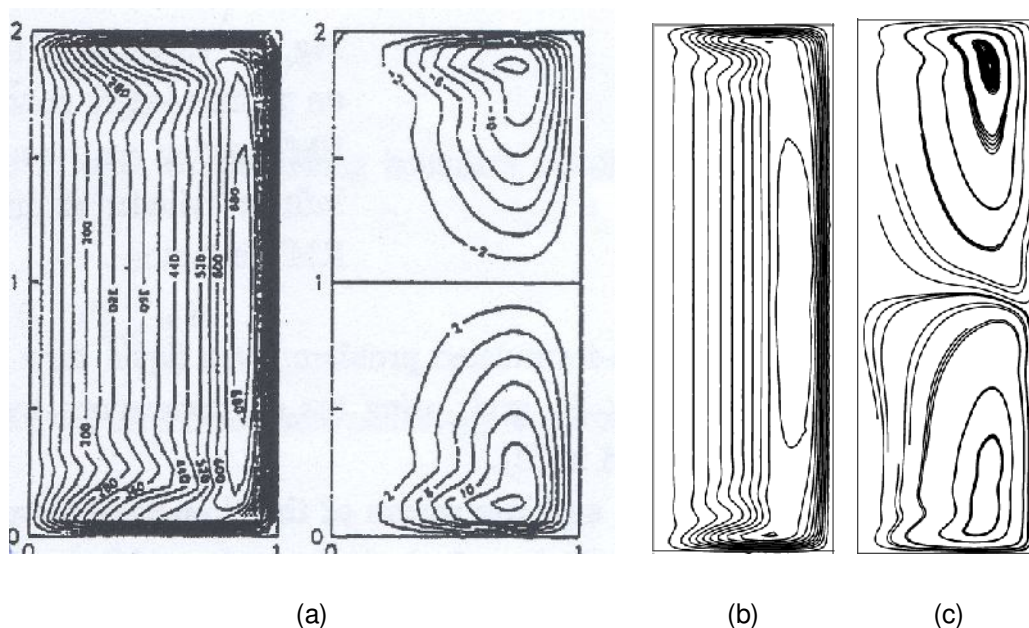
Obrázek 9.2: Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu čísle $Ta_m = 1 \times 10^4$.

rova čísla. Jak zde již bylo mnohokrát řečeno, v nadkritické oblasti se objevují nestability a proudění se stává nesymetrické a nestabilní. K porovnání rychlostních polí se používají časové zprůměrované hodnoty. Právě tyto hodnoty rychlostí jsou zobrazeny na obrázku 9.3. Na levé straně jsou opět výsledky autorů GELFGAT a PRIEDE a na pravé straně jsou zobrazeny výsledky získané numerickým řešením. V obou případech je možné vidět, že na koncích válcové nádoby je zřetelná Ekmanova mezní vrstva. Dále je patrné, že střed sekundárního proudění je soustředěn směrem k rohům válcové nádoby. Tímto způsobem je možné prokázat shodnost výsledků na základě kvalitativního porovnání.

I když rozměry modelu jsou odlišné, fyzikální jevy, které jsou spojeny s určitou hodnotou magnetického Taylorova čísla se musí objevovat ve své charakteristické formě bez vlivu velikosti tvaru. Tímto způsobem, jak zde bylo učiněno, je prokázáno, že všechny typické vlastnosti proudění, které byly identifikovány autory GELFGAT a PRIEDE [26] v závislosti na velikosti Taylorova čísla, je možné rovněž nalézt i ve vlastních výsledcích.

9.2 Validace na základě Davidsonovy teorie

DAVIDSON [59] publikoval teoretické odvození maximální rychlosti v závislosti na velikosti magnetického Taylorova čísla. Z hlediska odvozených empirických vztahů je důležitá infor-

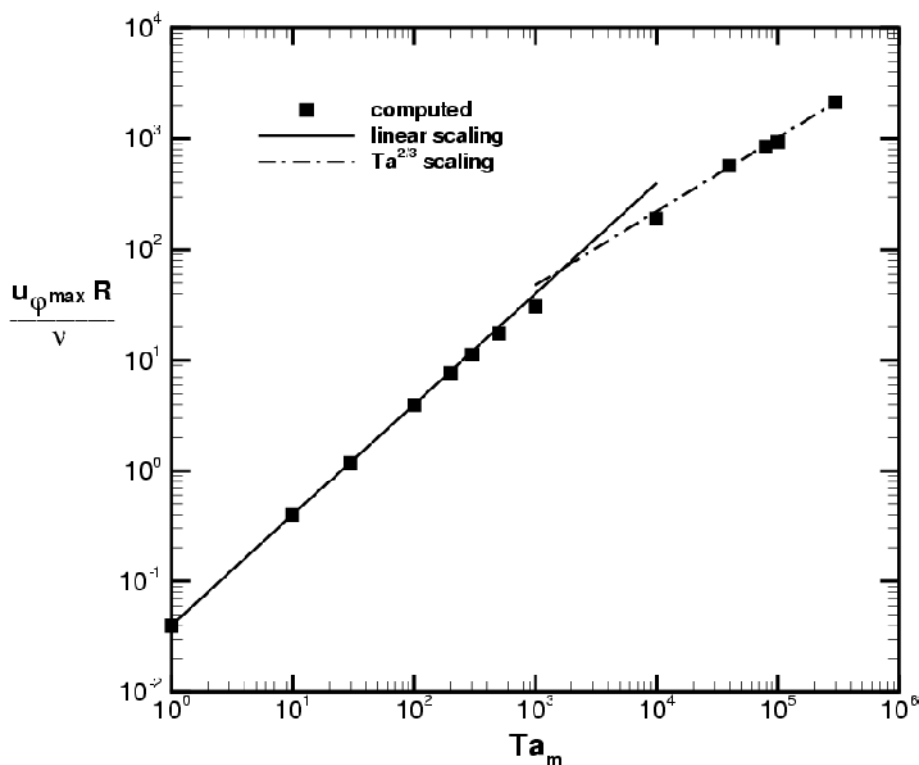


Obrázek 9.3: Azimutální a meridiální proudění (a) numericky vypočteno Gelfat a Priede (b) a (c) vlastní výpočet při magnetickém Taylorovu číslu $Ta_m = 1 \times 10^5$.

mace ohledně charakteru proudění, resp. jde-li o laminární nebo turbulentní proudění. V oblasti laminárního proudění je možné odvodit na základě Davidsonovy teorie, že maximální hodnota azimutální rychlosti je v lineární závislosti k magnetickému Taylorovu číslu.

Na grafu 9.4 je možné pozorovat právě závislost mezi maximální hodnotou azimutální rychlosti a velikostí magnetického Taylorova čísla. Jak je patrné, hodnoty maximální azimutální rychlosti rostou přibližně až do hodnoty 1×10^3 lineárně, což bylo možné na základě teorie očekávat. Na druhé straně je možné definovat oblast nestacionárního turbulentního proudění, ve které je známo, že maximální hodnota azimutální rychlosti roste zhruba dle $2/3$ kritéria. Jak je patrné z obrázku 9.4 i tento vývoj azimutální rychlosti odpovídá teoretickým závěrům.

Numerické ověření této teorie uskutečnili např. GELFGAT a PRIEDE [26], kteří tuto studii provedli za předpokladu axisymetrického proudění. Jejich shoda byla velmi přesná s teorií, jak pro malé oblasti magnetických Taylorových čísel, tak i pro případy nadkritických hodnot. Z grafu 9.4 je možné si povšimnout, že existuje určité rozmezí, která je definována magnetickým Taylorovým číslem větším než 1000 a menším než zhruba kritická hodnota Taylorova čísla Ta_m^{cr} . V tomto rozmezí Taylorových čísel neplatí ani lineární závislost, ani $2/3$ závislost, typická pro většinu nadkritických turbulentních proudění. Závislost maximální hodnoty azimutální rychlosti a magnetického Taylorova čísla právě pro tuto oblast byla detailně identifikována



Obrázek 9.4: Vývoj maximální azimutální rychlosti v závislosti na magnetickém Taylorově čísle a porovnání s teorií prezentovanou DAVIDSONEM [59].

autory MARTHY a MARTIN WITKOWSKI [62], kteří konstatovali, že závislost v této oblasti Ta lze definovat hodnotou, která se nachází mezi hodnotami pro laminární režim, tj. hodnotou 1 a pro turbulentní režim proudění, tj. hodnotou $2/3$.

Na základě DAVIDSONOVY teorie bylo možné validovat výsledky zastoupené maximální hodnotou azimutální rychlosti pro případ jak laminárního, tak i turbulentního proudění.

9.3 Validace v oblasti středu rotace proudění

Základním předpokladem je již známý fakt ohledně charakteru proudění. Proudění uvnitř válcové nádoby je možné dle teorie Davidsona rozdělit na dvě základní podoblasti, jejichž vlastnosti mohou být následovně shrnuty: viskózní oblast v mezní vrstvě stěn válcové nádoby a neviskózní oblast tzv. jádro proudu v blízkosti osy rotace vyjma koncových stěn. Právě pro druhou oblast je možné nalézt v literatuře empirické vztahy, které jsou vztaženy na úhlovou rychlost jádra proudu definovanou jako $\Omega_{rot} = \frac{u_{\varphi}}{r}$. Tyto empirické vztahy jsou většinou

odvozeny z experimentálního pozorování. Společným rysem všech těchto vztahů je tzv. referenční hodnota rychlosti v jádře proudu, která je definovaná vztahem (9.1).

$$\Omega_f = B\sqrt{\left(\frac{\sigma\omega}{\rho}\right)} \quad (9.1)$$

Pomocí této referenční hodnoty je možné vyjádřit některé doposud publikované výsledky a eventuálně provést vzájemné srovnání. Empirické vztahy popisující velikost úhlové rychlosti proudění v jádře proudu, jsou platné jen vždy pro určitou oblast Reynoldsových čísel. Jak je patrné v tabulce 9.1, hodnoty Reynoldsových čísel se pohybují v rozmezí od 4.7×10^4 až do hodnoty 1.5×10^5 . S ohledem na tyto hodnoty je nutné vybrat ty výsledky, které jsou v této oblasti Reynoldsových čísel platné.

$$\Omega_{rot1} = \Omega_f \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\kappa_K} \ln\left(\frac{\Omega_f R^2}{\nu}\right) + 1 \right) \quad (9.2)$$

Vztah (9.2) je empirický vztah pro rychlost v jádře proudu, uveřejněný v publikaci DAVIDSON [60]. Tento empirický vztah je obecně platný pro turbulentní proudění a jeho eventuální horní hranice platnosti nejsou autorem sděleny. Konstanta κ_K definuje tzv. Karmánovu konstantu a její hodnota je 0.4. Tento vztah předpokládá hladké pevné stěny válcové nádoby. V literatuře je možné mimo jiné nalézt také vztah, který zohledňuje drsnost stěn.

$$\Omega_{rot2} = (7.5 \pm 0.4)\Omega_f \quad (9.3)$$

DORININ, DRUNOV a KAPUSTA [77] experimentálně odvodili empirický vztah pro úhlovou rychlost v jádře proudu. Tento vztah má platnost pro rozmezí hodnot Reynoldsova čísla Re_2 1×10^3 až 1×10^5 a empirický vztah lze nalézt ve vztahu (9.3).

$$\Omega_{rot3} = 1.587 \left(\frac{\nu}{R^2} \right) Ta_m^{\frac{2}{3}} \quad (9.4)$$

Jiný vztah je možné nalézt u autorů GORBACHEV a NIKITIN [51] a [16]. Tento vztah je platný v rozsahu Reynoldsových čísel Re_2 3×10^3 až 1×10^5 a je popsán vztahem (9.4). Ovšem je nutné poznamenat, že tento vztah je možné nalézt v originálním vydání v podobné formě, ovšem konstanta 1.587, kterou se vztah násobí je odvozena od definice magnetického Taylorova čísla daného vztahem (3.4).

Ta_m	Ta_m	$\Omega_{rotreal}$	Ω_{rot1}	Ω_{rot2}	Ω_{rot3}
$8 \cdot 10^4$	$1.9 Ta_m^{cr}$	0.5419	0.658	1.07-1.2	1.108
$1 \cdot 10^5$	$2.4 Ta_m^{cr}$	0.5705	0.746	1.2 - 1.3	1.3
$3 \cdot 10^5$	$7.1 Ta_m^{cr}$	1.65	1.38	2.08-2.31	2.7

Tabulka 9.2: Vyhodnocení rychlosti v potenciálním jádře proudění a porovnání této rychlosti s hodnotou danou empirickým vztahem.

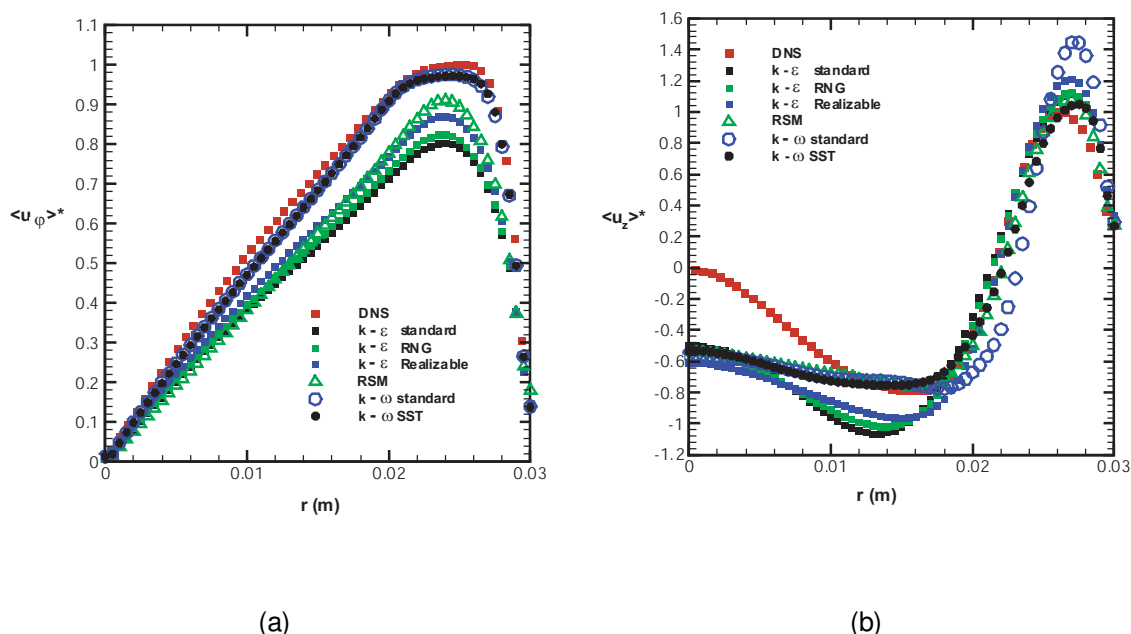
V tabulce 9.2 jsou shrnuty výsledky úhlové rychlosti v jádře proudu. Výsledky označené jako $\Omega_{rotreal}$ jsou dány přímo z 3D numerického řešení. Jak je však patrné z tabulky 9.2, výsledky Ω_{rotx} se již značně liší dle autorů. Davidsonův vztah pro rychlost rotace v jádře označené jako Ω_{rot1} se přiblížil nejvíce k výsledkům, které byly skutečně nalezeny. Procentuální rozdíl mezi numericky získanými výsledky a teoretickými výsledky pro případ $7.1 Ta_m^{cr}$ je přibližně 16 procent. Naopak výsledky autorů DORONIN Ω_{rot2} a GORBATCHEV Ω_{rot3} se již značně odlišují od výsledků numericky získaných. Maximální procentuální odchylka v rámci zde porovnávaných empirických vztahů je 38 procent. Experimentálně získané empirické vztahy autory DORONINEN resp. GORBATCHEVEM, které byly publikovány na začátku 70. let minulého století, jsou relativně staré a jejich přesnost je do značné míry dána přesností tehdejších měřících metod. To může být eventuálně jeden z mnoha důvodů, proč se výsledky mezi sebou tak znatelně rozcházejí. Bohužel doposud neexistují nové experimentální výsledky, kterých by bylo možné použít přímo pro srovnání zde publikovaných výsledků.

9.4 Validace versus komerční software

Výpočet, který je realizován pro oblast nadkritických hodnot magnetického Taylorova čísla pomocí DNS je porovnán s výsledky získanými řešením RANS modelů užitím komerčního softwaru FLUENT 6.0 [1]. Výpočet ve Fluentu je realizován za předpokladu osově symetrického proudění spolu s účinkem rotujícího magnetického pole, který je vyjádřen pomocí Lorentzových sil. Tyto externí síly jsou předem naprogramovány pomocí základních příkazů C a C++ a následně připojeny k výpočetnímu programu Fluent pomocí UDF rozhraní. Společnou hodnotou, která se sleduje, je průměrná hodnota azimutální resp. meridiální rychlosti.

Na základě získaných výsledků pomocí programu Fluent je možné porovnat rychlostní profil azimutální a vertikální rychlosti a to vždy pro určitou pozici. Na obrázku 9.5 je možné vidět srovnání rychlostních polí a to na pozici $z = 2/3H$. Bezrozměrné hodnoty azimutální

a vertikální rychlosti jsou vyjádřeny jako poměr skutečné hodnoty rychlosti vztažené na maximální hodnotu rychlosti získanou z DNS výpočtu.



Obrázek 9.5: Porovnání rychlostního pole DNS a RANS pro případ Taylorova čísla $2.4Ta_m^{cr}$ (a) porovnání azimutální rychlosti ve 2/3 výšky nádoby (b) porovnání vertikální složky rychlosti ve 2/3 výšky nádoby.

Jak je patrné z obrázku 9.5, nejbližší jsou výsledky dosažené výpočtem realizovaným modelem $k-\omega$ SST a to jak z hlediska porovnání azimutální, tak i vertikální rychlosti. Ostatní modely vykazují větší či menší rozdíly. Toto hodnocení je také platné pro jiné případy rychlostních polí v rámci odlišných pozic uvnitř válcové nádoby.

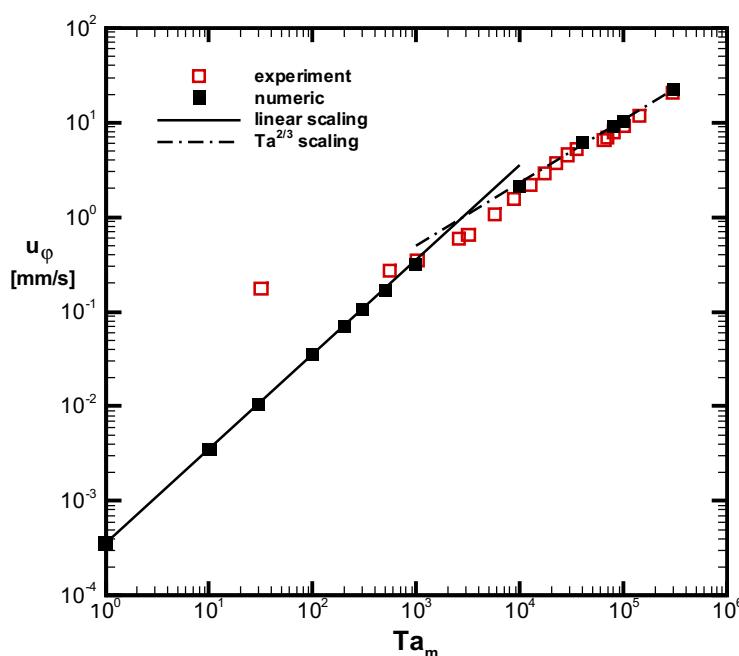
K vyhodnocení je nutné poznamenat, že je-li proudění definováno malým Reynoldsovým číslem, nemůže být proudění považováno za plně vyvinuté turbulentní proudění a tudíž také použití např. $k-\varepsilon$ nebo RSM (Reynolds stress modelu) je neopodstatněné. Tyto modely totiž předpokládají vyvinutou alespoň lokální isotropní turbulenci. Přes tuto výhradu lze konstatovat (jak je taky patrné z obrázku 9.5), že nejbližší se k výsledkům přiblížil model $k-\omega$. Jak je možné si povšimnout, lepších výsledků se dosáhne, použije-li se variace $k-\omega$ tzv. $k-\omega$ SST, který mnohem přesněji predikuje rozložení rychlosti ve viskózní oblasti a v oblasti mezní vrstvy. Mimoto, porovnáním vertikálního rychlostního pole se ukázalo, že existuje zřetelná oblast, kde nevyhovuje ani jediný zde použitý model RANS.

Na základě srovnání rychlostních polí mezi DNS a RANS modely je možné shrnout ná-

sledující zhodnocení. Nejvhodnějším model pro řešení nestacionárního transientního (ještě nevyvinutá turbulence) magneticky indukovaného proudění v nádobě konečných rozměrů je $k-\omega$ SST. Toto hodnocení je zaručeně platné však jen pro oblast Reynoldsových čísel 1000 - 5000. Pravděpodobně u vyšších hodnot Re může být hodnocení odlišné.

9.5 Validace numerických výsledků s experimentem

Nejdůležitější část je porovnání výsledků z numerické analýzy přímo s výsledky experimentálně získanými. Na základě porovnání numerických výsledků s experimenty je možné usoudit, zdali dosažené výsledky mohou správně simulovat reálné procesy.



Obrázek 9.6: Porovnání výsledků numerické simulace s experimentálně získanými daty. Graf znázorňuje hodnotu azimutální rychlosti pro specifickou pozici.

Experimentální data, která jsou zde použita pro validaci výsledků, byla získána z literatury [3] a [27]. Tato data byla získána měřením průměrné hodnoty azimutální rychlosti ve válcové nádobě o stejných geometrických rozměrech, jako jsou zde prezentované výsledky. Také materiál In-Ga-Sn je totožný. Tyto předchozí výsledky byly porovnány s výsledky vypočtenými

a prezentovanými na obrázku 9.6. Horizontální osa popisuje magnetické Taylorovo číslo, které je totožně definováno jak pro experiment, tak i pro numerickou analýzu. Na vertikální ose je znázorněna průměrná azimutální rychlost uvedená v jednotkách mm/s.

Obrázek 9.6 dokazuje velmi dobrou shodu experimentů s výsledky numerické analýzy ovšem mimo oblast velmi nízkých rychlostí (odpovídá magnetickému Taylorovu číslu 30 až 1000). V této oblasti je vzájemná difference neakceptovatelná. Poněvadž výsledky numerické analýzy jsou ve shodě s teorií DAVIDSONA, bude pravděpodobně příčina neshody v experimentálním výsledku. Přestože nebylo možné porovnat numerické výsledky s výsledky z experimentů pro oblast laminárního proudění, je shoda v oblasti nadkritického proudění a rovněž tak v oblasti laminárního nelineárního režimu proudění velmi dobrá. Pouze už jen pro doplnění lze odvodit vynikající shodu mezi experimentální a numerickou studií, která v případě Taylorova čísla 3×10^5 dosahuje zhruba 3 procent.

Závěr

Bezkontaktní metoda ovlivnění proudění je ve velké míře používána tam, kde není možné z technického, bezpečnostního nebo ekonomického důvodu použít kontaktní způsob. Právě v oblasti metalurgie je bezkontaktní míchání taveniny a čerpání taveniny z pecí hojně používanou metodou. V rámci předložené monografie byly prezentovány výsledky nejen teoretického výzkumu, ale bylo ukázáno i praktické využití induktorů v pecích při odlévání hliníku nebo slitin hliníku. Pro tento účel sestavený výpočetní program NS-FEM3D našel uplatnění nejen v oblasti výzkumu účinku magnetického pole v taveninách, ale lze ho rovněž použít i na obecné výpočty. Program obsahuje matematický model popisující nestlačitelné, nestacionární 3D turbulentní proudění s vlivem magnetického pole a volné konvekce. Jeho výhodou je možnost kdykoliv program rozšířit a doplnit o nové moduly. Tím je možné rozšířit program o nové matematické modely. Na výpočetním programu se dodnes pracuje a to především v oblasti vývoje turbulentních modelů. Tvorba vlastního výpočetního programu sice nabízí možnost plně kontrolovat výpočet a mít úplný přehled o všech použitých numerických postupech, jedná se ale současně i o postup časově velmi náročný. Vývoj programu zabere roky a jeho testování a validace může být ještě náročnější. Z tohoto důvodu je ekonomičtější použít již hotové komerční programy, které mohou v některých případech nabídnout rychlý způsob řešení technického problému užitím numerických metod. Volně na internetu je možné stáhnout celou řadu výpočetních programů včetně zdrojového kódu od těch nejjednodušších až po složité výpočetní programy. Velkou překážkou jejich užití je většinou nedostatečný popis a složitější nastavení. Mnohdy je potřeba program přeložit přímo na lokální stanici nebo dokonce doprogramovat části programu s ohledem na lokální podmínky prostředí a nastavení. Na rozdíl od již otestovaných komerčních programů toto vyžaduje časovou přípravu a určité zkušenosti v této oblasti. Výjimku tvoří například program OpenFOAM, který se stále častěji i v průmyslovém měřítku používá na uskutečnění numerických studií.

Výhodou CFD stále zůstává možnost testovat myšlenky a změny před tím, než jsou implementovány do výroby či stavby prototypu. Sestavit výpočetní síť nebo vytvořit prototyp modelu k experimentálnímu odzkoušení představuje dvě zcela odlišně nákladné operace. Zatímco výpočetní síť může vzniknout během několika minut až hodin dle rozsahu a složitosti, sestavení prototypu představuje dlouhodobější přípravu a aktivity. Navíc výpočetní síť ani samotný výpočet nevyžaduje materiálové náklady (vyjma výpočetní kapacity, která je ovšem univerzální). I v budoucnu bude CFD hrát stále významnější roli při návrhu a optimalizaci zařízení. V případě magnetohydrodynamiky je použití CFD navíc motivováno skutečností, že experimentální pokusy jsou časově, technicky a finančně velmi náročné. Mnohdy vyžadují drahé zařízení s velmi náročným provozem. CFD tak představuje optimální způsob testování

před samotnou výrobou a implementací.

Předložená monografie shrnula významné výsledky dosažené za poslední období v oblasti magnetohydrodynamiky s využitím domácího výpočetního programu NS-FEM3D. Většina prezentovaných výsledků byla uskutečněna autorem. Velká část monografie se věnuje otázce verifikace vzniklého výpočetního programu a validaci výsledků numerických simulací s experimenty. Součástí byl i popis autorova vlastního výpočetního programu NS-FEM3D, který byl již použit na celou řadu řešení technických problémů a to nejen v oblasti magnetohydrodynamiky. Vývoj tohoto programu probíhal více jak 15 let a probíhá dodnes. Prezentované závěry studií jsou obecně platné a lze je využít v širokém rozsahu aplikací magnetického pole. Současně s tím je rovněž významné i použití postupů k numerickému řešení účinku magnetického pole na taveniny. I přes všechny technické výhody elektromagnetického míchání a čerpání taveniny je však tato metoda stále energeticky náročná. Otázka snížení energetické náročnosti v případě použití magnetického pole v technických problémech představuje tak zajímavý potenciál pro budoucí inovaci.

Literatura

- [1] Fluent 6.0 Documentation. Technical report, Fluent Inc., December 2001.
- [2] Baggag A., Atkins H., and Keyes H. Parallel implementation of the discontinuous Galerkin method. *In: Proceedings of Parallel CFD '99*, pages 233–240, 1999.
- [3] Cramer A., Varshney K., and Gerbeth G. New possibilities for velocity measurements and model experiments in liquid metal processing. 2004. XXI ICTAM, 15-21 August, Warsaw, Poland.
- [4] Richardson A.T. On the stability of a magnetically driven rotating fluid flow. *J. Fluid Mech.*, 63(3):593–605, 1974.
- [5] Wegner B., Maltsev A., Schneider C., Sadiki A., Dreizler A., and Janicka J. Assessment of unsteady RANS in predicting swirl flow instability based on LES and experiments. *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 25:528–536, 2004.
- [6] Launder B.E. and Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3:269–289, 1974.
- [7] Vives C. Hydrodynamics, thermal and crystallographical effects of an electromagnetically driven rotating flow in solidifying aluminium alloy melts. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33(12):2585–2598, 1990.
- [8] Speziale Ch.G., Gatski T.B., and Mhuiris N.M.G. A critical comparison of turbulence models for homogeneous shear flows in a rotating frame. *Phys. Fluids A*, 2(9):1678–1684, September 1990.
- [9] Shtanko D.A. *Zh. Tekh. Fiz.*, 3(7):1085–1090, 1933.
- [10] Wilcox D.C. Turbulence Modelling for CFD. *DCW Industries and Griffin Printing, Glendale, CA*, 1993.

- [11] Hurle D.T.J. Crystal pulling from the melt. *Springer-Verlag Berlin-Heidelberg*, 1993.
- [12] Dalhberg E. On the action of a rotating magnetic field on a conducting liquid. Rep. AE-447, AB Atomenergi, Studswik, Sweden, 1972.
- [13] Takeuchi E., Masafumi Z., Takehiko T., and Mizoguchi S. *Applied MHD in the process of continuous casting*. ed. J. Szekeley, JV Evans, K. Blazek, N El-Kaddah. Miner. Met. Mater. Soc. USA. Warrendale, FL: The Metals Soc., 1992.
- [14] Gallaire F. and Chomaz J.M. Instability mechanisms in swirling flow. *Physics of fluids*, 15(9):2622–2637, 2003.
- [15] Müller G., Neumann G., and Weber W. Natural convection in vertical Bridgman configurations. *J. Crystal Growth*, 70:78–93, 1984.
- [16] Nikitin N.V. Gorbachev L.P. and Ustinov A.R. MHD rotation for conducting fluids in a cylindrical vessel of finite dimensions. *Magnetohydrodynamics*, 4:32–43, 1974.
- [17] Görtler H. Instabilität der laminarer Grenzschichten an Konkaven Wänden gegenüber gewissen dreidimensionalen Strömungen. *ZAMM*, 21:250–252, 1941.
- [18] Kürth H. Stahl und Eisen. (39,19,512), 1917.
- [19] Moffatt H.K. On fluid flow induced by a rotating magnetic field. *J. Fluid. Mech.*, 22(3):521–528, 1965.
- [20] Moffatt H.K. *Metallurgical Applications of Magnetohydrodynamics. In Processes and Metallurgical Applications of MHFD*. ed. MRE Proctor, Cambridge, UK: Metal Soc. UK, 1984.
- [21] Grants I. and Gerbeth G. Stability of axially flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical cavity. *J. Fluid Mech.*, 431:407–426, 2001.
- [22] Grants I. and Gerbeth G. Linear three-dimensional instability of a magnetically driven rotating flow. *J. Fluid Mech.*, 463:229–239, 2002.
- [23] Grants I. and Gerbeth G. Experimental study of non-normal transition to turbulence in a rotating magnetic field driven flow. *Physics of fluids*, 15(10):2803–2809, 2003.
- [24] Grants I. and Gerbeth G. Stability of melt flow due to a traveling magnetic field in a closed ampoule. *Journal of Crystal Growth*, 269, 2004.

- [25] Birat J. and Chone J. Electromagnetic stirring in billet, bloom and slab casters. *Proc. Int. Iron Steel Cong. 4th, London*, pages 269–281, 1983.
- [26] Priede J. and Gelfgat Yu.M. Numerical simulation of the MHD flow produced by a rotating magnetic field in a cylindrical cavity in finite length. *Magnetohydrodynamics*, 33(2), 1997.
- [27] Stiller J., Cramer A., Fraňa K., and Varshney K. Stirring with rotating magnetic fields - numerical and experimental results. *FLOWCOMAG Dresden*, April 1-2, 2004.
- [28] Stiller J. and Fraňa K. Direct numerical simulation of the flow driven by a rotating magnetic field. *GAMM-75th Annual Scientific Conference Dresden*, pages 159–160, March 21-27 2004.
- [29] Stiller J. and Fraňa K. Direct numerical simulation of the flow driven by a rotating magnetic field. *XXI ICTAM Warsaw, Poland*, August 15-21 2004.
- [30] Stiller J., Fraňa K., and Cramer A. Transitional and weakly turbulent flow in a rotating magnetic field. *Physics of Fluids*, 18:074105, 2006.
- [31] Stiller J., Fraňa K., Grundmann R., Fladrich U., and Nagel W.E. A parallel PSPG finite element method for direct simulation of incompressible flow. *SFB-Preprint SFB609-05-2004, TU Dresden*, 2004.
- [32] Stiller J. and Nagel W.E. MG - a toolbox for parallel grid adaption and implementing unstructured multigrid solver. In: *E.H.D'Hollander et al. (Eds.): Parallel Computing matrices and vectors*, pages 391–399, 2001.
- [33] Mullin J.B. and Hulme K.F. The use of electromagnetic stirring in zone refining. *J. Electronics and Control*, 4:764–772, 1958.
- [34] Roplekar J.K. and Dantzig J.A. A study of solidification with a rotating magnetic field. Report, November 2000.
- [35] Fraňa K. and Stiller J. A hybrid urans/les approach used for simulation of turbulent flows. *Progress in Turbulence III, Editors J. Peinke, M. Oberlack, A. Talamelli, Springer proceedings in physics, ISBN 978-3-642-02224-1, ISSN 0930-8989*, pages 139–142, 2008.
- [36] Fraňa K. and Stiller J. A numerical study of flows driven by a rotating magnetic field in a square container. *European Journal of Mechanics / Fluids B*, 2008.

- [37] Fraňa K., Stiller J., and Unger J. Výpočet aerodynamiky profilu NACA 0012 programem MG. *Colloquium FLUID DYNAMICS 2001, Institute of Thermomechanics AS CR*, October 24-25, 2001.
- [38] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. Direct numerical simulation of the transitional and turbulent flow driven by a rotating magnetic field. *Colloquium FLUID DYNAMICS 2003, Institute of Thermomechanics AS CR*, pages 21–24, 2003.
- [39] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. DNS of transitional and turbulent flow driven by a rotating magnetic field. *Astronomische Nachrichten (Astronomical Notes)*, 324(3):77–78, 2003.
- [40] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. Linear finite element method for incompressible flow. XXII. mezinárodní vědecká konference kateder a pracovišť mechaniky tekutin a termomechaniky, červen 2003.
- [41] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. Transitional and turbulent flows driven by a rotating magnetic field. *Journal of Magnetohydrodynamics*, 2/3:187–198, 2006.
- [42] Fraňa K. and Honzejek V. Comments about a self-developed finite-element code used in incompressible. *2st WSEAS International Conference on Finite Differences - Finite Elements –Finite Volumes – Boundary Elements (F – and –B'09)*, ISBN 978-960-474-089-5, ISSN 1790-2769, 2009.
- [43] Fraňa K. and Honzejek V. V european conference on computational fluid dynamics, eccomas cfd 2010. *J. C. F. Pereira and A. Sequeira (Eds)*, pages Lisbon, Portugal, 14–17 June 2010, 2010.
- [44] Fraňa K. and Honzejek V. A numerical study of incompressible flows using the finite element approach. *Recent advances in applied mathematics and computational and informational science*, pages Houston, U.S.A., April 30 – May 2 (2009).
- [45] Fraňa K., Honzejek V., and Horakova K. A numerical simulation of the magnetically driven flows in a square container using the delayed detached eddy simulation. *Computational Fluid Dynamics 2010: Proceedings of the Sixth International Conference on Computational Fluid Dynamics, ICCFD6, by Alexander Kuzmin Springer; 1st Edition. edition*, pages St Petersburg, Russia, on July 12–16, 2010.
- [46] Fraňa K. *Magnetohydrodynamické toky a dominantní struktury*. Ph.D. thesis, Technická Univerzita v Liberci, 2004.

- [47] Spitzer K.H. and Pesteanu O. Application of traveling magnetic fields in metallurgy. The 3rd International Symposium on Elektromagnetic Processing of Materials, Nagoya, Japan, 2000.
- [48] Martin Witkowski L. and Walker J.S. Nonaxisymmetric flow in a finite-length cylinder with a rotating magnetic field. *Physics of Fluids*, 11(7), 1999.
- [49] Martin Witkowski L., Marty P., and Walker J.S. Liquid-metal flow in a finite-length cylinder with a high-frequency rotating magnetic field. *J.Fluid Mech.*, 436:131–143, 2001.
- [50] Launder and Dandham. *Closure strategies for turbulent and transitional flows*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom, first edition, 2002.
- [51] Gorbachev L.P. and Nikitin N.V. Motion of an electrically conducting liquid between two disk in crossed electric and magnetic fields. *Magnetohydrodynamics*, 9:133–136, 1973.
- [52] Gorbachev L.P., Nikitin N.V., and Ustinov A.L. Magnetohydrodynamic rotation of an electrically conductive liquid in a cylindrical vessel of finite dimensions. *Magnetohydrodynamics*, 4:32–42, October-December 1974.
- [53] Chong M.S., Perry A.E., and Cantwell B.J. A general classification of 3-dimensional flow-fields. *Phys. Fluids A-Fluid Dynamics*, 2:765–777, 1990.
- [54] Ramachandran N., Mazuruk K., and Volz M.P. Use of traveling magnetic fields to control melt convection. *J. Jpn. Soc. Microgravity Appl.*, 17(2):98–103, 2000.
- [55] Fraňa K., Stiller J., and Grundmann R. Taylor-Görtler vortices in the flow driven by a rotating magnetic field in a cylindrical container. *Journal of Visualization*, 8(4):323–330, 2005.
- [56] Widlund O. and Talläck G. Modeling of anisotropic turbulent transport in simulations of liquid metal flows in magnetic field. *The 3rd International Symposium on Electromagnetic Processing of Materials*, pages 97–102, 2000. Nagoya, Japan, ISIJ.
- [57] Dold P. and Benz K.W. Rotating magnetic field: Fluid flow and crystal growth application. *Progress in Crystal growth and Characterization of Materials*, pages 7–38, 1999.
- [58] Parikh P. Application of a scalable, parallel, unstructured-grid-based Navier-Stokes solver. *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA-2001-2584, June 11-14 2001.

- [59] Davidson P.A. Swirling flow in an axisymmetric cavity of arbitrary profile, driven by a rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 245:669–699, 1992.
- [60] Davidson P.A. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [61] Davidson P.A. and Hunt J.C.R. Swirling recirculation flow in a liquid-metal column generated by a rotating magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 18:67–106, 1987.
- [62] Marthy Ph. and Martin Witkowski L. On the stability of rotating magnetic MHD flows. *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamics and Electroconducting Flows*, pages 327–343, 1999.
- [63] Spalart P.R. Detached-eddy simulation. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 41:181–202, 2009.
- [64] Spalart P.R., Deck S., Shur M.L., Squires K.D., Strelets M. Kh., and Travin A. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Comput. Fluid Dyn.*, 20:181–195, 2006.
- [65] Spalart P.R. and Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aerospaciale*, pages 5–21, 1994.
- [66] Menter F. R. Two-Equation Eddy viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- [67] Mößner R. and Gerbeth G. Buoyant melt flows under the influence of steady and rotating magnetic fields. *Journal of crystal growth*, 197:341–354, 1999.
- [68] Rubinstein R. and Zhou Y. Turbulence modeling for the axially rotating pipe from the viewpoint of analytical closures. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 17:299–312, 2004.
- [69] Barz R.U., Gerbeth G., Wunderwald U., Buhrig E., and Gelfgat Yu.M. Modelling of the isothermal melt flow due to rotating magnetic fields in crystal growth. *Journal of Crystal Growth*, 180:410–421, 1997.
- [70] Jarkilic S., Hanjalic K., and Tropea C. Modelling rotating and swirling turbulent flows: A perpetuating challenge. *AIAA*, 2002.
- [71] Yuan S.P., So, and R.M.C. Turbulent rotating flow calculations: an assessment of two-equation anisotropic and Reynolds stress models. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 212(Part G):193–212, 1998.

- [72] Cebeci T. *Stability and transition: Theory and application*. Springer-Verlag, first edition, 2004.
- [73] Robinson T. and Larsson K. An experimental investigation of a magnetically driven rotating liquid-metal flow. *J.Fluid Mech.*, 60(4):641–664, 1973.
- [74] Kaiser Th. and Benz K.W. Taylor vortex instabilities induced by a rotating magnetic field: A numerical approach. *Physics of Fluids*, 10(5):1104–1109, 1998.
- [75] Ghia U., Ghia K., and Shi C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J.Comp.Phys.*, 48:387–411, 1982.
- [76] Pionelli U. *Introduction to turbulence modelling.*, chapter Large-Eddy and direct simulation of turbulent flows. Lecture Series 2002-02. von Karman Institute of Fluid Dynamics, March 18-22 2002.
- [77] Doronin V.J., Drunov V.V., and Kapusta A.B. Measurement of the characteristics of the magnetohydrodynamic flow of mercury in a closed cylindrical vessel. *Magnetohydrodynamic*, 9:412–414, 1973.
- [78] Jones W.P. and Launder B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.
- [79] Saric W.S. Görtler vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26:379–409, 1994.
- [80] Gelfgat A. Y. On three-instability of a traveling magnetic field driven flow in a cylindrical container. *Journal of Crystal Growth*, 279:276–288, 2005.
- [81] Lai Y.G. Predictive capabilities of turbulence models for a confined swirling flow. *AIAA Journal*, 34(8):1743–1745, 1996.

Rejstřík

- amplituda, 147, 154, 157
- analytický vztah, 14
- axiální rychlost, 125
- azimutální proudění, 116
- azimutální rychlost, 94, 103, 108, 115, 121, 151
- Bödewadtova mezní vrstva, 16
- Besselova funkce, 37
- bezkontaktní, 21
- bezrozměrné parametry, 166
- Bridgman, 10
- celková energie proudu, 152
- chyba řešení, 59
- chyba výpočtu, 62
- Couettovo proudění, 148
- délkové měřítko, 96, 97
- Davidson, 134, 170
- DDES, 51, 131
- deformace, 115
- DES, 50, 131
- Dirichletova okrajová podmínka, 34, 60
- disipace, 112
- diskretizační techniky, 151
- DNS, 4, 44, 54, 121, 123, 128, 129
- dominantní frekvence, 11
- dominantní struktury, 105, 113
- dominantní vír, 145
- dynamika struktur, 113
- efektivita výpočtu, 58
- Ekmanova mezní vrstva, 100, 169
- elektrická vodivost, 2, 18, 19, 31
- elektrický odpor, 19
- elektrický potenciál, 31, 32
- elementy, 157
- energetická náročnost, 2, 9
- energetická spektra, 98
- energetické spektrum, 106
- experimentální, 10
- experimentální výsledky, 3
- explicitní schéma, 97
- FLUENT/ANSYS, 173
- flukuační odchylka, 117
- flukuační složka, 111
- fluktuace, 160
- fluktuace proudění, 2
- fluktuace proudu, 128
- fluktuace teploty, 2, 11
- FORTTRAN 90/95, 74
- Fourierova transformace, 147, 151, 160
- frekvence magnetického pole, 19
- fyzikální jevy, 109
- gradient rychlosti, 121
- Hartmannovo číslo, 26
- hliník, 19, 177
- hliníkové slitiny, 10, 21
- hodnoty

- časově středované hodnoty, 101
- homogenizace, 9
- homogenní struktura, 2
- hranice lineární stability, 164
- hustota sítě, 121, 157
- hybridní modely, 49
- hybridní turbulentní model, 131
- identifikace, 109, 117
- imaginární část, 147
- indukovaný proud, 15
- induktor, 177
- interakce, 113
- interval
 - časový interval, 104
- isoplocha, 109
- iterační techniky, 24
- izotropní turbulence, 98
- jádro proudu, 14, 137, 173
- Jacobi, 87
- $k-\omega$, 119, 121, 123, 129, 174
- $k-\omega$ SST, 121, 124, 125, 129, 131, 174
- $k-\varepsilon$, 174
- $k-\varepsilon$ Standard, 121, 123, 128, 129
- Karmanova konstanta, 172
- kinematická viskozita, 120, 153
- kinetická energie, 120, 121, 124, 128, 153
- Kolgomorovské měřítko, 98
- komora
 - čerpací komora, 23
- koncové stěny, 110
- konvergence, 60
- kriteriální číslo, 141
- kritická frekvence, 157
- kritická hodnota, 94, 97, 149, 151, 154, 157, 162, 165
- kritické číslo, 110, 157
- kritický mód, 150, 154, 165
- krok
 - časový krok, 97
- krystalizace, 2, 11–13
- kvalita materiálu, 9
- laminární proudění, 15, 26, 92, 167, 171
- laminární režim, 15, 16
- Large Eddy Simulation, 96
- legenda, 121
- LES, 131
- lineární nestability, 145, 147, 148
- lineární stabilita, 17
- Lorentzovy síly, 8, 15, 20, 25, 27, 29, 33, 35, 118
- low-Re $k-\varepsilon$, 97
- míchání taveniny, 21, 177
- mísení taveniny, 2
- měřítka
 - časové měřítko, 96, 97
- magnetická indukce, 11, 12, 141
- magnetická permeabilita materiálu, 30
- magnetické pole, 2, 9, 14, 62, 131, 177
- matematický model, 97, 131, 177
- materiál
 - čistota materiálu, 9
- Maxwellova rovnice, 30, 31, 33
- Message Passing Interface, 55
- Metal Transfer Induction, 23
- metalurgie, 9, 177
- mezní vrstva, 105, 114, 145
- MG knihovna, 55
- moment rotace, 152
- monokrystal, 9
- nádoba

- šířka nádoby, 118, 136
nadkritické proudění, 17
Navier-Stokesovy rovnice, 27, 34, 55, 146, 153
nestability, 13, 98, 145, 146, 151, 153, 158, 162, 165, 168
nestabilní proudění, 157
nestacionární jevy, 94, 120, 131
nestacionární proudění, 112
nestrukturovaná výpočetní síť, 102
NS-FEM3D, 30, 52, 58, 65, 74, 86, 97, 118, 131, 177
numerická simulace, 131
numerické metody, 151

odchylka, 133
okrajové podmínky, 147
OpenFOAM, 177
oscilace, 93, 116, 141, 150, 157, 159, 162
osově nesymetrická nádoba, 118
osově symetrické proudění, 151

přenos hmoty, 2
přenos tepla, 2
přesnost, 154
přesnost výpočtu, 61
přirozená konvekce, 2, 11, 12
paralelní výpočet, 57
pec, 23
pevná stěna, 127, 131
podmínka stability, 147
Poiseuillovo proudění, 58
poloměr nádoby, 14, 100, 120, 160, 166
polovodič, 3
polovodiče, 10
pozice, 106
průtočné množství, 21
produkce, 112, 139
proudová funkce, 93, 168
Q kritérium, 85, 110
Q' kritérium, 111
Q-kritérium, 140

radiální rychlost, 125
RANS, 97, 131, 174
reálná část, 147
referenční hodnota, 123
Reynolds stress modelu, 174
Reynoldsova napětí, 126, 128
Reynoldsovo číslo, 17, 25, 48, 108, 117, 131, 146, 149, 166, 172
Reynoldsovo napětí, 120
RNG $k - \varepsilon$, 119
rotující magnetické pole, 3, 9, 10, 12, 15, 17, 30, 88, 99, 131, 142, 150, 153, 154
rozpad struktur, 110
rychlost
 úhlová rychlost, 26
rychlostní gradienty, 136
rychlostní pole, 134, 141, 147
rychlostní profil, 103, 124, 136

sekundární proudění, 4, 10, 16, 17, 94, 101, 113, 123, 136, 167
skin efekt, 18
slitina hliníku, 177
slitina materiálu, 19
smykové napětí, 109
Spalart-Allmaras, 49, 75, 86, 131
spektrální metody, 154
spektrum, 11
stabilizace proudění, 92
startovací textový soubor, 86, 91

- statické magnetické pole, 15
struktury, 10, 12, 140
Subgrid model, 96
tavenina
 čerpání taveniny, 21, 177
Taylor-Görtlerovy nestability, 16, 95
Taylorovo číslo, 4, 14, 16, 17, 26, 93, 98, 103, 112, 117, 131, 132, 154, 166
technologický proces, 150
Tecplot, 86
teplotní gradienty, 2
tlakové pole, 147
tlumící efekt, 16
translační magnetické pole, 9, 30, 38, 141, 150, 153
transport hmoty, 120
transport tepla, 120
tuhnutí materiálu, 141
turbulence, 26, 46, 96
turbulentní disipace, 120
turbulentní kinetická energie, 46, 129, 136
turbulentní model, 119, 121, 126
turbulentní proudění, 4, 14–16, 131, 132, 167
turbulentní vírová viskozita, 47, 49
turbulentní viskozita, 139
turbulentní vlastnosti proudu, 126
Twin Stream Induction, 21
ustálené proudění, 121, 129, 147, 152
válcová nádoba, 10, 16, 96, 116, 141, 172
výška nádoby, 14, 120
výpočetní čas, 131, 151
výpočetní elementy, 121
výpočetní program, 131
výpočetní síť, 86, 87, 132, 151, 153, 157, 161, 165, 177
výpočetní stanice, 4
vývoj
 časový vývoj, 147
víko nádoby, 110
validace výsledků, 92, 166
vektorové pole, 145
vektorové znázornění, 93
velikost nádoby, 151, 153, 167
verifikace programu, 58, 92
vertikální osa, 132
vertikální proudění, 131
vertikální stěna, 129
vizualizace, 109, 112, 140
vlnové číslo, 98, 109, 147
zdrojový kód, 85