Obsah

1 Derivace

Příklad 1.1: Máme auto, jehož ujetá dráha je popsána funkcí $s(t)$. Chceme-li spočítat jeho průměrnou rychlost $\overline{v}$ v časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$, pak $\overline{v} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

Rozdíl $\Delta t = t - t_0$ se nazývá **diference argumentu**, rozdíl $\Delta s(t_0, \Delta t) = s(t) - s(t_0)$ se nazývá **diference funkce** s v bodě t_0 a podíl $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ se nazývá **poměrná diference funkce** s v bodě t_0.

K výpočtu okamžité rychlosti v_0 auta v čase t_0 potřebujeme znát hodnotu limity $v_0 = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

V 17.století se matematici pokoušeli vyřešit tzv. "Problém tečny"- nalezení tečny ke grafu funkce a "Problém plochy"- spočítat obsah plochy pod grafem funkce. Na úspěšném vyřešení těchto problémů se nezávisle na sobě podíleli Isaac Newton (1643-1727)

a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Další rozvoj v této oblasti vedl k získání velkého množství matematických poznatků, které nazýváme "kalkulus".

Definice 1.1 : (derivace) Nechť funkce f je definována na okolí bodu $U(x_0)$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad (= f'|_{x_0}),$$

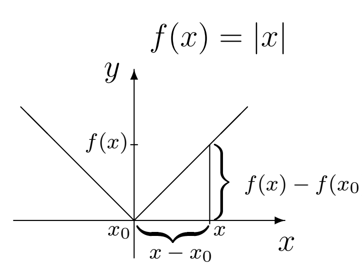
pak se nazývá **derivace** funkce f v bodě x_0. (Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, pak hovoříme o **nevlastní derivaci**.)

Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$, pak se nazývá **derivace zprava**.

Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$, pak se nazývá **derivace zleva** funkce f v bodě x_0.

Funkce f': $x \to f'(x)$, $x \in I$ se nazývá **derivace funkce** f na množině I.

Příklad 1.2: Vypočítáme derivaci funkce $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Dostaneme $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0} = n x_0^{n-1} \Rightarrow \boxed{(x^n)' = n x^{n-1}}$.



Definice 1.2 : Nechť k funkci $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ existují konstanta A a funkce $\omega : U(x_0) \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall\, x \in U(x_0)$:

$$f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \omega(x-x_0) \ \wedge\ \lim_{x\to x_0} \frac{\omega(x-x_0)}{x-x_0} = 0\,,$$

pak řekneme, že funkce f je **diferencovatelná** v bodě x_0 . Položíme $h = x - x_0$. Funkce

$$df(x_0, h) = A \cdot h$$

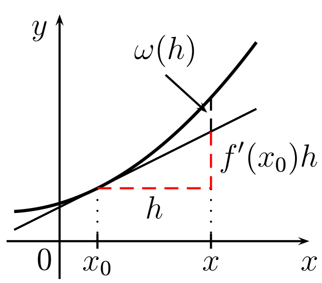
se nazývá **diferenciál** funkce f v bodě x_0.

Věta 1.1 : Funkce f má derivaci v bodě x_0 (je derivovatelná v x_0) právě tehdy, když je diferencovatelná v bodě x_0 . Navíc platí

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h\,.$$

Poznámka 1.1 :

diferenciál funkce f



1. Pro funkci $f(x) = x$ je $f(x) - f(x_0) = 1(x-x_0) + 0 = h$. Tedy $f'(x) = 1$ a $df(x_0, h) = dx(x_0, h) = h$, proto se pro diferenciál funkce f v bodě x_0 zavádí značení

$$\boxed{df(x_0, h) = f'(x_0)\, dx}\,.$$

2. Diferenciál funkce f určuje hlavní (lineární) změnu funkce f v bodě x_0 a používá se pro výpočet přibližných hodnot dané funkce na okolí bodu x_0 pomocí vztahu $f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

   Například pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a body $x = 4{,}1$, $x_0 = 4$ dostaneme $\sqrt{4{,}1} \doteq \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (4{,}1 - 4) = 2{,}025$.

3. Rovnice **tečny ke grafu funkce** f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

4. Pokud $f'(x_0) \neq 0$, pak rovnice **normály ke grafu funkce** f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

Věta 1.2 : (algebra derivací)
Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, pak platí:

i) $(a\,f \pm b\,g)'(x_0) = a\,f'(x_0) \pm b\,g'(x_0)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,,$

ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)\,,$

iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,, \quad g(x_0) \neq 0\,.$

$((2x+1)\cos x\, e^x)' = 2\cos x\, e^x + (2x+1)\,(\cos x\, e^x)' = 2\cos x\, e^x + (2x+1)(-\sin x)\, e^x + (2x+1)\cos x\, e^x\,.$

Věta 1.3 : (Derivace složené a inverzní funkce)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě x_0, $y_0 = f(x_0)$ a funkce g je diferencovatelná v bodě y_0, potom i složená funkce $g(f(x))$ je diferencovatelná v bodě x_0 a platí

$$(g(f(x)))'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)\,.$$

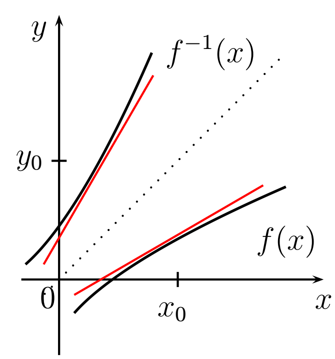
Nechť $f'(x_0) \neq 0$, pak pro derivaci inverzní funkce f^{-1} v bodě $y_0 = f(x_0)$ platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$$

$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$

$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}\,.$

Derivace inverzní funkce



<u>*Příklad 1.3*</u>:

1. $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = (y = x\ln a) = (e^y)' \cdot (x\ln a)' = e^{x\ln a} \cdot \ln a \Rightarrow \boxed{(a^x)' = a^x\, \ln a\,.}$

2. $(\operatorname{arctg} y)'(y_0) = \frac{1}{(\tan x)'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x_0)}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x_0)+\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)}} = $
$= \frac{1}{1+\tan^2(x_0)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y_0))} = \frac{1}{1+(y_0)^2} \Rightarrow$
$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,.}$

Například $1 = (x)' = (e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)' \Rightarrow$

$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}\,.$

Tabulka 1: Přehled derivací základních funkcí

$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x \in (0, \infty)$
$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$
$(x^n)' = n\, x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, \infty)$
$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2 Integrály

2.1 Neurčité integrály

Už víme, že derivace $s'(t)$ funkce $s(t)$ popisující ujetou vzdálenost auta v závislosti na čase t udává jeho rychlost $v(t)$. V této kapitole budeme řešit opačný problém. K dané rychlosti budeme hledat ujetou vzdálenost.

Nechť G, F jsou primitivní funkce k funkci f na množině M, pak $\forall x \in M$ platí: $(G-F)'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Odtud vyplývá, že existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $G(x) - F(x) = C$.

Definice 2.1 : Funkce F se nazývá **primitivní funkce** k funkci f na množině M, jestliže $\forall x \in M: \; F'(x) = f(x)$.

Definice 2.2 : Množina všech primitivních funkcí k funkci f se nazývá **neurčitý integrál** funkce f a značí se

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Konstanta C se nazývá integrační konstanta.

<u>*Příklad 2.1*</u>:

1. Funkce $s(t)$ popisující dráhu auta je primitivní funkcí k funkci $v(t)$ popisující rychlost auta.
2. Funkce $x^3 + 2$, $x^3 - 23$ jsou primitivní k funkci $3x^2$ na $\mathbb{R}$ a pro neurčitý integrál k funkci $3x^2$ platí $\int 3x^2\,dx = x^3 + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$

Znak integrálu

$$\int f(x)\,dx$$

Integrand

Integrální proměnná

Úloha najít primitivní funkci je obrácená k úloze nalézt derivaci dané funkce. Z linearity operace derivování (věta (1.2) i)) plyne i linearita neurčitého integrálu.

Věta 2.1 : Nechť funkce f, g mají primitivní funkce na intervalu I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\int [\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \pm \beta \int g(x)\,dx\,.$$

<u>*Příklad 2.2*</u>: $\int 3\,e^x - 2\,\sin x\,dx = 3\int e^x\,dx - 2\int \sin x\,dx = 3\,e^x + 2\cos x + C\,.$

Ze znalosti derivací základních funkcí lze odvodit následující primitivní funkce.

Tabulka 2: Základní primitivní funkce

$\int e^x\,dx = e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln \mid x \mid + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \neq -1,\ x \in (0, \infty)$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\operatorname{cotgh} x + C$	$x \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{argsinh} x + C = \ln \lvert x + \sqrt{1+x^2} \rvert + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{argcosh} \lvert x \rvert + C = \ln \lvert x + \sqrt{x^2-1} \rvert + C$	$\lvert x \rvert \in (1, \infty)$
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{argtgh} x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{argcotgh} x + C$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Ze vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí (věta (1.2) ii)) plyne následující věta.

Věta 2.2 : (integrace per partes)
Nechť funkce u, v jsou derivovatelné na intervalu I a existuje primitivní funkce k součinu $u \cdot v'$ na I, pak na I platí

$$\int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx\,.$$

Příklad 2.3:

1) Vypočtěte integrál $\int x \cos x\, dx$.

$\int x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u' = \cos x & v = x \\ u = \sin x & v' = 1 \end{bmatrix} = x \sin x - \int \sin x\, dx =$ $x \sin x + \cos x + C$.

Podobně počítáme integrály funkcí $x^n \cos kx$, $x^n \sin kx$, $x^n e^{kx}$, $k, n \in \mathbb{N}$.

2) Vypočtěte integrál $\int \log_a x\, dx$.

$\int \log_a x\, dx = \begin{bmatrix} u' = 1 & v = \log_a x \\ u = x & v' = \frac{1}{x \ln a} \end{bmatrix} = x \log_a x - \int \frac{x}{x \ln a}\, dx =$ $x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$.

Podobně počítáme integrály funkcí $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $\mathrm{arctg}\, ax$, $a \in \mathbb{R}$ ap.

3) Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$.

Obecně označíme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$ a pomocí metody "per partes"dostaneme

$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \begin{bmatrix} u' = 1 & v = \frac{1}{(1+x^2)^n} \\ u = x & v' = \frac{-n\,2x}{(1+x^2)^{n+1}} \end{bmatrix} = \frac{x}{(1+x^2)^n} -$ $\int \frac{x(-n\,2x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} +$ $2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx\right) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\,(I_n - I_{n+1})$.

Odtud vyplývá $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1) I_n\right)$.

Nyní vypočítáme $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \ (n = 1)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{(1+x^2)^1} + (2-1) \int \frac{1}{1+x^2}\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right) + C$.

Věta 2.3 : (integrace substitucí)
Nechť $f\colon D(f) \to H(f)$, $g\colon D(g) \to H(g)$ a $H(f) \subset D(g)$. Jestliže funkce f je derivovatelná na $D(f)$ a existuje primitivní funkce G k funkci g na $D(g)$, potom na $D(f)$ platí

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy = G(f(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Typickými integrály, které lze spočítat pomocí věty o substituci jsou

$$\int \operatorname{tg} x\,dx\,;\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx\,;$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,;$$

$$\int \frac{\operatorname{argsinh} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \text{ap.}$$

Příklad 2.4: Větu 2.3 je vhodné použít v příkladech, kdy se v integrálu vyskytuje funkce f a její diferenciál $f'\,dx$, pak provedeme substituci za funkci f.

$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \begin{pmatrix} y = \sin x \\ dy = \cos x\,dx \end{pmatrix} = \int \frac{1}{y}\,dx = \ln|y| + C = \ln|\sin x| + C\,.$

Obráceně je někdy výhodné proměnnou x nahradit funkcí $x(t)$. V tomto případě však musíme mít zaručenou existenci inverzní funkce $x^{-1}(t)$.

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{pmatrix} x = \cos t & t \in (0,\pi) \\ dx = -\sin t\,dt & t = \arccos x \end{pmatrix} =$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}(-\sin t)\,dt = \int -\frac{\sin t}{|\sin t|}\,dt = \begin{pmatrix} \text{pro } t \in (0,\pi) \\ \text{je } \sin t > 0 \end{pmatrix} = \int -1\,dt = -t + C = -\arccos x + C\,.$

Integrály typu $\int \mathbf{R(x)\,dx}$

Racionální lomené funkce mají tvar

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy.

Nejdříve budeme integrovat základní racionální funkce typu

1. $\int \frac{A}{x-x_1}\,dx\,,$ kde $A,\ x_1 \in \mathbb{R}\,.$

   $\int \frac{-3}{x-4}\,dx = \begin{pmatrix} u = x - 4 \\ du = dx \end{pmatrix} = -3\int \frac{1}{u}\,du = -3\ln|x-4| + C\,.$

2. $\int \frac{A}{(x-x_1)^k}\,dx\,,$ kde $A,\ x_1 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\,.$

   $\int \frac{2}{(1-x)^3}\,dx = \begin{pmatrix} u = 1 - x \\ du = -dx \end{pmatrix} = 2\int \frac{1}{u^3}\,(-du) = -2\,\frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} + C\,.$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx\,,$ kde $A\,,\ B\,,\ p\,,\ q \in \mathbb{R}$ a jmenovatel zlomku má komplexní kořeny.

   $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2x+2-1}{x^2+2x+2}\,dx = \begin{pmatrix} u = x^2 + 2x + 2 \\ du = (2x+2)dx \end{pmatrix} =$

$\int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \begin{pmatrix} v = x+1 \\ dv = dx \end{pmatrix} = \ln|u| + C - \int \frac{1}{v^2+1}\,dv =$
$\ln|x^2+2x+2| - \operatorname{arctg}(x+1) + C\,.$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx\,,$ kde $A,\ B,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a jmenovatel zlomku má komplexní kořeny.

$\int \frac{6x-3}{(x^2+4)^2}\,dx = 3\int \frac{2x-1}{(x^2+4)^2}\,dx = \begin{pmatrix} u = x^2+4 \\ du = 2x\,dx \end{pmatrix} =$

$3\int \frac{1}{u^2}\,du - 3\int \frac{1}{16\left((\frac{x}{2})^2+1\right)^2}\,dx = \begin{pmatrix} v = \frac{x}{2} \\ 2dv = dx \end{pmatrix} =$

$3\,\frac{u^{-1}}{-1} + C - \frac{3}{8}\int \frac{1}{(v^2+1)^2}\,dv =$ (viz příklad (2.1) 3) $= -3\frac{1}{x^2+4} -$
$\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v^2+1} + \operatorname{arctg} v\right)\right) + C = \frac{-3}{x^2+4} - \frac{3}{16}\left(\frac{2x}{x^2+4} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + C\,.$

Rozklad na parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky je inverzní operace k operaci hledání společného jmenovatele.

V případě, kdy stupeň $P(x) \geq$ stupeň $Q(x)$, nejdříve vydělíme polynom $P(x)$ polynomem $Q(x)$ a pak přejdeme k parciálním zlomkům.

Z algebry víme, že polynom $Q(x)$ lze rozložit na součin polynomů nejvýše druhého stupně. Tedy

$$Q(x) = \prod_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (x-x_i)^{k_i}(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}\,,\ k_i, r_j \in \mathbb{N},\ p_j, q_j \in \mathbb{R}\,.$$

Racionální lomenou funkci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň $P(x) <$ stupeň $Q(x)$ rozložíme na součet základních racionálních funkcí:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{1_i}}{x-x_i} + \frac{A_{2_i}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^{k_i}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{1_j}x+C_{1_j}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_{2_j}x+C_{2_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{B_{r_j}x+C_{r_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}}$$

a jednotlivé zlomky integrujeme zvlášť, například:

$$\int \frac{2x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx$$
$$= \int \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\,dx =$$
$$-\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + C\,.$$

Konstanty A, B, C, D vypočítáme z rovnosti

$$2x+2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2\,.$$

Pro $x=1$ je $4 = B\,2 \Rightarrow B = 2\,.$
Pro $x=i$ je $2i+2 = (Ci+D)(i-1)^2 \Rightarrow 2i+2 = 2C - 2iD \Rightarrow$
$C = 1\,, D = -1\,.$
Pro $x=0$ je $2 = A(-1) + 2 - 1 \Rightarrow A = -1\,.$

Základní vztahy pro goniometrické funkce
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ Řešíme přechodem k racionálním lomeným funkcím pomocí následujících substitucí.

1. Pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak $t = \cos x$.
   Pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak $t = \sin x$.
   $\int \sin x \cos^2 x\,dx = \left(\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right) = \int -t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$.
   $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \left(\begin{array}{ll} t = \sin x & t \in \langle -1, 1\rangle \\ dt = \cos x\,dx & \end{array}\right) = \int \frac{1}{\cos x}\frac{dt}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \operatorname{argtgh} t + C = \operatorname{argtgh}(\sin x) + C$.

$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$
$\Rightarrow t^2\cos^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\Rightarrow \cos^2 x(t^2+1) = 1 \Rightarrow$
$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

2. Pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak $t = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ a platí
   $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.
   $\int \frac{1}{\sin^2 x + 1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+1}\,dt = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2+1+t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{(\sqrt{2}t)^2+1}\,dt = \left(\begin{array}{l} u = \sqrt{2}\,t \\ du = \sqrt{2}\,dt \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$

   V některých speciálních případech je vhodné použít základní vztahy pro goniometrické funkce.
   $\int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\operatorname{cotg}^2 x\,dx = \left(\begin{array}{l} u = \operatorname{cotg} x \\ du = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx \end{array}\right) = -\operatorname{cotg} x - \int u^2\,du = -\operatorname{cotg} x - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + C.$

   Metoda snižování stupně.
   $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int [1 + \cos 2x]\,dx$
   $= \left(\begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2\,dx \end{array}\right) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\int \cos u\,du) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

3. V obecném případě používáme univerzální substituci
   $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Potom
   $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
   $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$
   $\left(\begin{array}{l} u = t + \frac{1}{2} \\ du = dt \end{array}\right) = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{du}{\frac{3}{4}\left((\frac{2}{\sqrt{3}}u)^2+1\right)} = \left(\begin{array}{l} v = \frac{2}{\sqrt{3}}u \\ dv = \frac{2}{\sqrt{3}}\,du \end{array}\right) =$
   $\frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} v + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}) + C$.

2.2 Určité integrály

Pro jednoduchost si nyní představíme, že rychlost našeho auta je konstantní $v(t) = c$. Ujetá dráha auta $s(t)$ v čase t od počátku měření v čase t_0 je pak dána vztahem $s(t)-s(t_0) = c\cdot(t-t_0)$. Rozdíl $s(t) - s(t_0)$ se zároveň rovná ploše pod grafem funkce v na intervalu $\langle t_0, t\rangle$. Připomeňme, že funkce $s(t)$ je primitivní k funkci $v(t)$. Platí, že i v obecnějším případě lze primitivní funkci využít k výpočtu plochy pod grafem funkce.

Definice 2.3 : Nechť k funkci $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ existuje primitivní funkce $F\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ (v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace). Pak rozdíl $F(b) - F(a)$ nazýváme **Newtonovým určitým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ a píšeme

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Uvedený vztah se nazývá Newtonova-Leibnizova formule a také píšeme $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f$.

Číslo a se nazývá **dolní mez**, číslo b se nazývá **horní mez** Newtonova integrálu.
Množinu všech funkcí, které mají Newtonův integrál na intervalu $\langle a,b\rangle$ značíme $\mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$.

Věta 2.4 : (vlastnosti Newtonova integrálu)

1) Newtonův integrál nezávisí na volbě primitivní funkce.
2) Nechť $f \in \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$, $c \in \langle a,b\rangle$, pak platí
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$
3) Nechť $f, g \in \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak platí
$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(Tedy množina $\mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$ je lineární prostor.)

Příklad 2.5:

$$\int_0^2 2x\,dx = [x^2 + C]_0^2 = [x^2]_0^2 = 4\,.$$

$$\int_0^\pi [3\cos x\, -\, 2\sin x]\,dx = 3\int_0^\pi \cos x\,dx \,+\, 2\int_\pi^0 \sin x\,dx =$$
$$3\,[\sin x]_0^\pi + 2\,[-\cos x]_\pi^0 = 3\,(0-0) - 2\,(1-(-1)) = -4\,.$$

Následující dvě věty vyplývají z vět (2.2) a (2.3).

Věta 2.5 : (per partes v Newtonově integrálu)
Nechť funkce u, v jsou derivovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (v krajních bodech zprava, popř. zleva) a $u \cdot v' \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$, potom také $u' \cdot v \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx .$$

Produkce plynu
Ze zkušeností víme, že nový vrt produkuje asi $f(t) = 0.2\, t\, e^{-0.02t}$ milionů kubických metrů plynu za t měsíců. Pokud chceme odhadnout celkovou produkci $P(t)$ vrtu za jeden rok, pak musíme spočítat integrál

$$P(t) = \int_0^{12} 0.2\, t\, e^{-0.02t}\, dt .$$

Pomocí metody per partes dostaneme

$$\int_0^{12} 0.2\, t\, e^{-0.02t}\, dt = 10\Big(-\left[t\, e^{-0.02t}\right]_0^{12} + \int_0^{12} e^{-0.02t}\, dt\Big) \doteq 12 .$$

<u>*Příklad 2.6*</u>: Vypočtěte integrál $\int_0^1 e^x \sin x\, dx$.

Metodu per partes použijeme dvakrát.

$$\int_0^1 e^x \sin x\, dx = \left[\begin{array}{cc} u' = e^x & v = \sin x \\ u = e^x & v' = \cos x \end{array}\right] = [e^x \sin x]_0^1 -$$

$$\int_0^1 e^x \cos x\, dx = \left[\begin{array}{cc} u' = e^x & v = \cos x \\ u = e^x & v' = -\sin x \end{array}\right] = [e^x \sin x]_0^1 -$$

$[e^x \cos x]_0^1 - \int_0^1 e^x \sin x\, dx$. Odtud vyplývá

$$\int_0^1 e^x \sin x\, dx = \tfrac{1}{2}[e^x(\sin x - \cos x)]_0^1 = \tfrac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \tfrac{1}{2} .$$

Věta 2.6 : (substituce v Newtonově integrálu)
Nechť $f : D(f) \to H(f)$, $g : D(g) \to H(g)$ a $H(f) \subset D(g)$. Jestliže funkce f je derivovatelná na $D(f)$ a existuje primitivní funkce G k funkci g na $D(g)$, potom pro $\langle a, b\rangle \subset D(f)$ platí

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy = G(f(b)) - G(f(a)) .$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \left(\begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x}\, dx \end{array}\right) = \int_{\ln 1}^{\ln e} y\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} .$$

<u>*Příklad 2.7*</u>:

1) $$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left(\begin{array}{cc} x = \sin t & -1 = \sin a \Rightarrow a = -\frac{\pi}{2} \\ dx = \cos t\, dt & 0 = \sin b \Rightarrow b = 0 \end{array}\right)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{|\cos t|}\, dt = \left(\begin{array}{c} \text{pro } t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \text{je } \cos t > 0 \end{array}\right) =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 1\, dt = [t]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{2} .$$

Definice 2.4 : (nevlastní integrál vlivem meze)
Nechť funkce $f \in \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$ pro každé $b > a$. Nechť existuje limita $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, pak se nazývá **nevlastní Newtonův integrál vlivem meze** a píšeme

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Značíme $f \in \mathcal{N}(\langle a,\infty))$ a říkáme, že nevlastní integrál konverguje; v opačném případě diverguje.
Analogicky $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ a definujeme
$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int\limits_c^\infty f(x)\,dx\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$

Integrál $\int\limits_{-\infty}^\infty \sin x \quad dx$ neexistuje, někdy je proto vhodné pracovat s hlavní hodnotou nevlastního integrálu, která je definována vztahem

$$v.p. \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^c f(x)\,dx\,.$$

(v.p. je z francouzského *valeur principale*).

Příklad 2.8:

1) $\int\limits_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b x^\alpha\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} [\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-1)] =$

$$\begin{cases} \infty & \alpha > -1 \text{ diverguje} \\ \frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \text{ konverguje.} \end{cases}$$

2) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} [\ln|x|]_1^b = [\ln x]_1^\infty = \infty$ diverguje.

Definice 2.5 : (nevlastní integrál vlivem funkce)
Nechť $\forall\, t \in (a,b)$ je funkce $f \in \mathcal{N}(\langle a,t\rangle)$ a $f \notin \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$. Nechť existuje limita $\lim\limits_{t\to b-} \int\limits_a^t f(x)\,dx$, pak se nazývá **nevlastní Newtonův integrál vlivem funkce** a píšeme

$$\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Značíme $f \in \mathcal{N}(\langle a,b))$ a říkáme, že nevlastní integrál konverguje, v opačném případě diverguje.
Analogicky $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to a+} \int\limits_t^b f(x)\,dx\,.$

Podobně pro nevlastní integrál vlivem funkce definujme hlavní hodnotu vztahem

$$v.p. \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+} \left(\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx + \int_{b+\delta}^c f(x)\,dx \right).$$

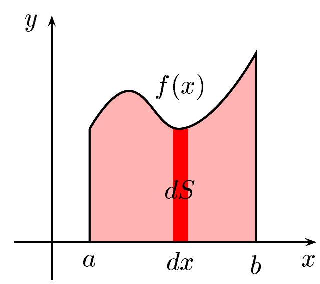
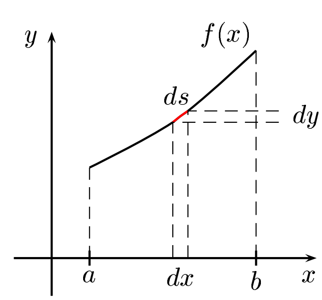
Příklad 2.9:

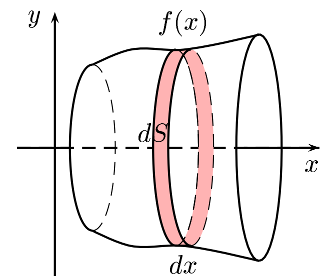
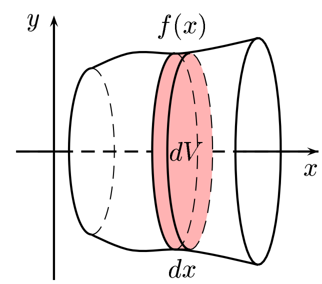
1) $$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 x^\alpha\,dx = \lim_{t\to 0+}\left[\tfrac{1}{\alpha+1}(1-t^{\alpha+1})\right] =$$
$$\begin{cases} \infty & \alpha < -1 \quad \text{diverguje} \\ \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \quad \text{konverguje.} \end{cases}$$

2) $$\int_0^1 \tfrac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+}\left[\,\ln|x|\,\right]_t^1 = [\ln x]_0^1 = \infty \quad \text{diverguje.}$$

2.3 Aplikace v geometrii a fyzice

Při zavedení Riemannova integrálu jsme sčítali "nekonečně mnoho nekonečně malých ploch -tzv. elementů" a dostali jsme vlastně obsah plochy "pod grafem funkce f". Tento postup lze použít i při výpočtu objemu těles, délek křivek, vykonané práce ap.

Popis	Vztah	Obrázek
Plocha pod grafem funkce Plocha S je ohraničena grafem funkce f, přímkami $x=a$, $x=b$ a osou x.	$S = \int_a^b f(x)\,dx$ Element plochy $dS = f(x)\,dx$	
Délka křivky Délka s křivky určené grafem funkce f.	$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ Element délky $ds \doteq \sqrt{(dx)^2+(df)^2} =$ $\sqrt{(dx)^2+f'(x)^2(dx)^2} =$ $\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$	

Povrch rotačního tělesa Velikost S plochy vzniklé rotací grafu funkce f kolem osy x.	$S=2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ Element povrchu $dS \doteq 2\pi f(x)\,ds =$ $2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$	
Objem rotačního tělesa Objem V tělesa vzniklého rotací plochy pod grafem funkce f kolem osy x.	$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ Element objemu $dV = \pi f^2(x)\,dx$	
Statický moment Statické momenty M_x, M_y plochy S o hustotě $\varrho = \varrho(x)$ vzhledem k osám x, y.	$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2(x)\varrho(x)\,dx$ $M_y = \int_a^b xy(x)\varrho(x)\,dx$	Statický moment M tělesa o hmotnosti m vzhledem k ose otáčení o, která je ve vzdálenosti d od těžiště tělesa, je dán vztahem $M = m \cdot d\,.$
Těžiště plochy Těžiště $T = [x_T, y_T]$ plochy S má souřadnice:	$x_T = \frac{M_y}{S}\,, \quad y_T = \frac{M_x}{S}\,.$	S je velikost plochy "pod grafem funkce f" na intervalu $[a,b]$.
Moment setrvačnosti Momenty setrvačnosti I_x, I_y křivky dané grafem funkce f vzhledem k osám x, y. Hmotnost křivky je reprezentována její délkou.	$I_x = \int\limits_a^b f^2(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $I_y = \int\limits_a^b x^2\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$	Moment setrvačnosti I tělesa o hmotnosti m vzhledem k ose otáčení o, která je ve vzdálenosti d od těžiště tělesa, je dán vztahem $I = m \cdot d^2\,.$

3 Diferenciální rovnice

3.1 Motivace

R. P. Feyman: "Existuje jediný způsob formulace fyzikálních zákonů, a to ve tvaru diferenciálních rovnic."

Nejen fyzika, ale i ekologie, biologie nebo chemie popisují své vztahy pomocí diferenciálních rovnic.

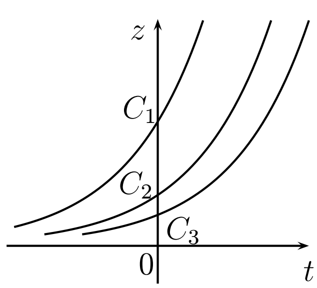
Na účet v bance vložíme v čase $t_0 = 0$ peníze v hodnotě $z(0)$. Při úročení s denním úrokem u máme po t_1 dnech na účtu zůstatek

$$z(t_1) = z(0) + z(0)\,u\,t_1\,.$$

Na účtu tedy přibude $z(t_1) - z(0) = z(0)\,u\,t_1$ a rychlost růstu je $\frac{z(t_1)-z(0)}{t_1-0} = z(0)\,u$. "Okamžitou změnu" účtu dostaneme pro $t_1 \to 0$, potom $\lim\limits_{t_1\to t_0} \frac{z(t_1)-z(0)}{t_1-0} = z'(0)$ a

$$z'(0) = z(0)\,u\,.$$

$z(t) = Ce^{ut}$



Uvedená rovnost platí v libovolném čase t . Tedy

$$z'(t) = z(t)\,u$$

a jejím (obecným) řešením je funkce $z(t) = C\,\mathrm{e}^{ut}$, $C \in \mathbb{R}$. Pro (počáteční) podmínku $z(0) = z_0$ dostaneme $z_0 = C\,\mathrm{e}^0 \Rightarrow C = z_0$ a (partikulární) řešení naší úlohy má tvar

$$z(t) = z_0\,e^{ut}\,.$$

3.2 Diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 3.1 : (diferenciální rovnice 1.řádu)
Rovnice pro neznámou funkci $y = y(x)$, $x \in I$, $I \subset \mathbb{R}$, v níž vystupuje derivace y' a která je zapsána ve tvaru

$$\begin{array}{lll} & F(x,y,y') = 0 & \text{implicitní tvar} \\ \text{nebo} & y' = f(x,y) & \text{explicitní tvar} \end{array} \tag{1}$$

se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu**. Diferencovatelná funkce $y = y(x)$, $x \in I$, která splňuje rovnici (1) pro každé $x \in I$ se nazývá **řešení diferenciální rovnice**.
Podmínka

$$y(x_0) = y_0 \qquad x_0 \in I \tag{2}$$

se nazývá **počáteční podmínka** a úloha (1), (2) se nazývá **počáteční (Cauchyova) úloha**.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá funkce n-reálných proměnných. Funkce $f = f(x,y)$ je funkce dvou reálných proměnných.

Definice 3.2 : (geometrický popis dif. rovnice 1.řádu)
Graf řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (1) se nazývá **integrální křivka diferenciální rovnice**.
Funkce $f(x, y)$ z rovnice $y' = f(x, y)$ určuje **směrové pole** diferenciální rovnice, což je systém tečných vektorů ke grafu řešení. Množina bodů $[x, y]$, pro které je funkce $f(x, y)$ konstantní se nazývá **izoklina**.

Tečné vektory v rovině-xy mají tvar $(1, y')$, resp. $(1, f(x, y))$.

Izoklina je geometrické místo bodů $[x, y]$, ve kterých tečné vektory k integrál. křivkám jsou rovnoběžné. Rovnici izoklin píšeme ve tvaru $f(t, x) = C$ (C je konstanta).

<u>*Příklad 3.1*</u>: Pro diferenciální rovnici $y' = x$ mají rovnice izoklin tvar $x = c$, c je libovolné číslo, což jsou přímky rovnoběžné s osou y.

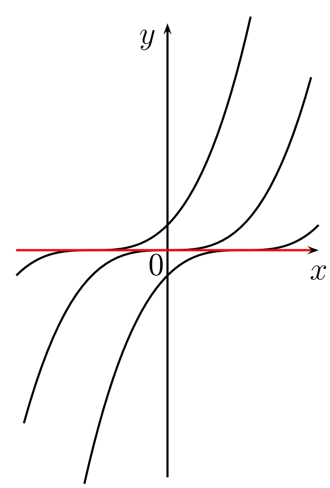
Obecné řešení má tvar $y = \frac{x^2}{2} + C = \varphi(x, C)$. Integrální křivky jsou paraboly. Pro počáteční podmínku $y(0) = 3$ má počáteční úloha (partikulární) řešení tvar $y = \frac{x^2}{2} + 3$.

Geometricky popíšeme obecné řešení diferenciální rovnice 1. řádu jako jednoparametrický systém křivek.

Definice 3.3 : **Obecným řešením** diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ se nazývá funkce $\varphi(x, C)$ závislá na volitelném parametru C taková, že k libovolné bodu $[x_0, y_0] \in D(f)$ ($D(f)$ je definiční obor funkce f) existuje (jediný) parametr C_0 takový, že $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ a funkce $y(x) = \varphi(x, C_0)$ řeší danou diferenciální rovnici na I.
Jestliže každým bodem integrální křivky nějakého řešení $\tilde{y}$ diferenciální rovnice prochází jiná integrální křivka, pak $\tilde{y}$ nazýváme **singulárním řešením** rovnice.

Integrální křivka singulárního řešení tvoří tzv. obálku systému křivek obecného řešení. V bodech integrální křivky singulárního řešení je porušena jednoznačnost řešení počáteční úlohy.

$$y(x) = \frac{1}{27}(x + C)^3$$

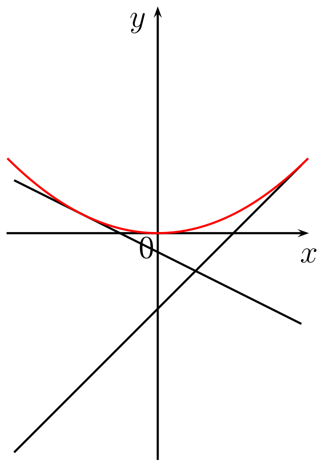


<u>*Příklad 3.2*</u>: Řešením rovnice
$$y' = y^{\frac{2}{3}}$$
je každá funkce tvaru
$$y(x) = \frac{1}{27}(x + C)^3 \qquad (C \text{ je libovolná konstanta}).$$
Nulová funkce $y(x) = 0$ je však také řešením dané rovnice. Je to singulární řešení, neboť libovolným bodem $[x_0, 0]$ prochází integrální křivka řešení tvaru $y(x) = \frac{1}{27}(x - x_0)^3$.

<u>*Cvičení 3.1*</u>: Dokažte, že obecné řešení tzv. Clairautovy rovnice
$$y'^2 - xy' + y = 0$$
je funkce $y(x) = Cx - C^2$ a singulární řešení má tvar $y(x) = \frac{1}{4}x^2$. Nakreslete integrální křivky.

[Zderivováním a dosazením do původní rovnice ověříme tvrzení.]

$y(x) = Cx - C^2$



Věta 3.1 : Funkce $y = y(x)$, $x \in I$ je řešením počáteční úlohy (1), (2) právě tehdy, když je řešením integrální rovnice

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{3}$$

3.3 Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

Při řešení diferenciálních úloh se budeme snažit najít obecné řešení úlohy (1) a také řešení počáteční úlohy (1), (2).

Metoda přímé integrace.

1. Chceme najít obecné řešení rovnice

   $$y' = f(x), \quad x \in I\,.$$

   Určíme systém primitivních funkcí k funkci f, tj.

   $$y(x) = F(x) + C\,.$$

2. Chceme-li najít řešení počáteční úlohy

   $$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in I,$$

   pak

Nechť $g(\xi) = f(\xi, y(\xi))$ a funkce G je primitivní funkce k funkci g, potom $G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(\xi)\ d\xi$ a platí $(G(x) - G(x_0))' = g(x) = f(x, y(x))\,.$

Poznamenejme, že neexistuje žádná univerzální metoda na řešení všech typů diferenciálních rovnic.

   a) ze systému primitivních funkcí $y(x) = F(x) + C$ vybereme takovou, která splňuje počáteční podmínku

   $$y_0 = F(x_0) + C\,.$$

   (Graf funkce y prochází bodem $[x_0, y_0]\,.$)
   Odtud vypočteme $C = y_0 - F(x_0)$, takže
   $y(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)\,.$

   b) nebo využijeme větu (3.1), potom

   $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi\,.$$

   Tento výsledek lze samozřejmě také psát ve tvaru $y(x) = y_0 + F(x) - F(x_0)$, neboť $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\ d\xi$ (primitivní funkce vyjádřená integrálem s proměnnou horní mezí, viz definice 8.10 v MA1).

<u>*Příklad 3.3*</u>: Řešíme počáteční úlohu

$$y' = x^3 + \sin x, \quad y(0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Z obecného řešení

$$y(x) = \frac{x^4}{4} - \cos x + C$$

vypočteme konstantu C:

$$1 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2\,.$$

Řešení úlohy má tvar: $y(x) = \frac{x^4}{4} - \cos x + 2\,.$

b) Přímou integrací dostaneme:

$$y(x) = 1 + \int_0^x [\xi^3 + \sin \xi]\, d\xi = 1 + \frac{x^4}{4} - \cos x + 1\,.$$

Metoda separace proměnných.

Touto metodou řešíme rovnice typu

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}, \qquad \text{kde } f_1,\ f_2 \text{ jsou dané funkce.}$$

Rovnici můžeme psát ve tvaru $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$, resp.

$$f_2(y)\, dy = f_1(x)\, dx \quad \text{(separace proměnných)}$$

a chápat jako rovnost dvou diferenciálů. Protože $y = y(x)$, pak integrováním dostaneme rovnost

$$\int_{x_0}^{x} f_2(y(\xi))\, y'(\xi)\, d\xi = \int_{x_0}^{x} f_1(\xi)\, d\xi\,,$$

neboli

$$F_2(y(x)) = F_1(x) + C\,,$$

kde F_1, F_2 jsou primitivní funkce k funkcím f_1, f_2.

<u>*Poznámka 3.1*</u>: Vztahu $F_2(y(x)) = F_1(x) + C$ říkáme funkcionální rovnice pro neznámou funkci $y(x)$. Také se nazývá **obecný integrál** dané diferenciální rovnice, neboť její řešení $y(x)$ je obecným řešením diferenciální rovnice. Říkáme také, že obecné řešení je obecným integrálem dáno **implicitně**.

Příklad 3.4: Stanovme obecné řešení (obecný integrál) diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x}{\sin y}\,.$$

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sin y} \;\Rightarrow\; \sin y\; dy = x\; dx$$

a integrováním dostaneme

$$-\cos y = \frac{x^2}{2} + C \qquad \text{obecný integrál}$$

nebo

$$-x^2 - 2\cos y = 2C \qquad \text{implicitní tvar řešení.}$$

Rovnice umožňující přechod k separaci proměnných.

Rovnici tvaru

$$y' = f(ax + by + c) \qquad \text{rovnice s přímkou}$$

převedeme substitucí $u = ax + by + c$ na rovnici se separovatelnými proměnnými.

Příklad 3.5: Příklad

$$dy\,(2x - y + 1) + dx\,(4x - 2y + 6) = 0$$

vyřešíme substitucí $u = 2x - y + 1 \Rightarrow du = 2\,dx - dy \Rightarrow dy = 2\,dx - du$, potom

$$(2\,dx - du)u + dx\,(2u + 4) = 0$$

$$-du\,u + dx\,(4u + 4) = 0$$

$$dx = \tfrac{1}{4}\,\tfrac{u}{u+1}\,du$$

$$x + C = \tfrac{1}{4}\,(u - \ln|u + 1|)$$

$$x + C = \tfrac{1}{4}\,(2x - y + 1 - \ln|2x - y + 2|) \qquad \text{obecný integrál.}$$

Rovnici tvaru

$$y' = f(x, y)\,, \qquad \text{kde} \quad \forall\, t \in \mathbb{R} : f(tx, ty) = f(x, y)$$

převedeme substitucí $u = \frac{y}{x}$ na rovnici se separovatelnými proměnnými.

Příklad 3.6: Příklad
$$y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$
vyřešíme substitucí $u = \frac{y}{x} \Rightarrow u\,x = y \Rightarrow y' = u'\,x + u$, potom

$$u'\,x + u = \mathrm{e}^u + u$$
$$\frac{du}{dx}\,x = \mathrm{e}^u$$
$$\mathrm{e}^{-u}\,du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$-\mathrm{e}^{-u} = \ln|x| + C$$
$$-\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}} = \ln|x| + C \qquad \text{obecný integrál.}$$

3.3.1 Ortogonální systémy integrálních křivek.

Připomeňme, že dvě přímky ve směrnicovém tvaru
$$y = k_1 x + q_1$$
$$y = k_2 x + q_2$$
jsou kolmé, jestliže
$$k_1 \cdot k_2 = -1\,.$$

Z definice (3.2) víme, že integrální křivky rovnice
$$y' = f(x, y)$$
tvoří jednoparametrický systém křivek a že funkce $f(x, y)$ určuje v bodě $[x, y]$ směrnici tečny k jedné z těchto křivek. Potom hodnota $-\frac{1}{f(x,y)}$ určí směrnici přímky kolmé (normály) v tomtéž bodě. Proto obecné řešení (obecný integrál) rovnice
$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$
určí systém integrálních křivek ortogonálních k systému původnímu.

Příklad 3.7:

diferenciální rovnice		"ortogonální" rovnice
$y' = \frac{y}{x}$		$y' = -\frac{x}{y}$
	obecné řešení	
$y(x) = C\,x$		$y^2 + x^2 = C$
systém přímek procházející počátkem		systém kružnic se středem v počátku

Vidíme, že znalost jednoho systému dovoluje určit systém ortogonální. S úlohami tohoto typu se můžeme setkat např. v teorii pole (systém siločar a systém ekvipotenciálních čar).

3.4 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 3.4 : Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,, \quad x \in I \tag{4}$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice 1. řádu**. Funkce $a(x)$ se nazývá **koeficient rovnice** a funkce $b(x)$ **pravá strana rovnice** (4). Rovnice

$$y' = a(x)\,y$$

se nazývá **homogenní diferenciální rovnice**.

Řešení rovnice (4) **metodou variace konstanty**.

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice

$y' = a(x)\,y$	separací proměnných
$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$	$A(x)$ je primitivní
$\ln\lvert y\rvert = A(x) + K$	funkce k funkci $a(x)$
$\lvert y\rvert = \mathrm{e}^{A(x)+K}$	$K \in \mathbb{R}\,,$ položíme $C = \pm\mathrm{e}^K$
$\boxed{y_h = C\,\mathrm{e}^{A(x)}}$	obecné řešení homogenní rovnice
$y = \mathrm{e}^{A(x)}$	se nazývá **fundamentální řešení**

2. Řešení nehomogenní rovnice (4) hledáme ve tvaru:

$$y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} \qquad \text{variace konstanty } C\,.$$

Po dosazení do rovnice (4) dostaneme

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + C(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,a(x) = a(x)\,C(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + b(x)\ .$$

Tedy

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = b(x) \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int \frac{b(x)}{\mathrm{e}^{A(x)}}\,dx$$

a **partikulární řešení** rovnice (4) má tvar

$$\boxed{y_p(x) = \int \frac{b(x)}{\mathrm{e}^{A(x)}}\,dx \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\,.}$$

Základem metody variace konstanty je hledat řešení y ve tvaru součinu dvou funkcí, tedy $y = C\,y_h$. Po dosazení do (4) dostaneme $C'y_h + Cy_h' = aCy_h + b$, což platí, pokud $C\,y_h' = a\,C\,y_h$ a zároveň $C'\,y_h = b$.

3. Pro obecné řešení y nehomogenní rovnice (4) platí

$$y = y_h + y_p\,, \text{ neboli } \quad y = C\,\mathrm{e}^{A(x)} + \int \frac{b(x)}{\mathrm{e}^{A(x)}}\,dx \cdot \mathrm{e}^{A(x)}\,.$$

Obecné řešení rovnice $y' = a(x)y + b(x)$ je součtem obecného řešení příslušné homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

Příklad 3.8: Najděte obecné řešení rovnice $y' = y + \mathrm{e}^{2x}$.

1. Homogenní rovnice $y' = y$ má obecné řešení

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^x \qquad (\mathrm{e}^x \quad \text{fundamentální řešení})\,.$$

2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^x, \quad \text{tj.} \quad y' = C'(x)\mathrm{e}^x + C(x)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Po dosazení do původní rovnice obdržíme

$$C(x)'\mathrm{e}^x + C(x)\,\mathrm{e}^x = C(x)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}\,,$$

tj. $\qquad C(x)'\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \mathrm{e}^x + K\,.$

Bez újmy na obecnosti položíme $K = 0$ ($K\,\mathrm{e}^x$ je homogenní řešení) a dostaneme partikulární řešení

$$y_p(x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}\,.$$

3. Obecné řešení nehomogenní rovnice má tedy tvar

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}\,.$$

3.5 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

Definice 3.5 : Nechť $a_0(x),\, a_1(x),\, \dots,\, a_{n-1}(x),\, f(x),\, x \in I$ jsou reálné funkce. **Lineární diferenciální rovnici n-tého řádu** pro neznámou funkci $y = y(x)$ se nazývá rovnice

$$y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad x \in I\,. \tag{5}$$

Zkráceně píšeme

$$L[y] = f,$$

říkáme, že L je **lineární diferenciální operátor n-tého řádu**. Je-li $f(x) = 0$, pak se rovnice (5) nazývá **homogenní**, jinak **nehomogenní**.
Funkce $y = y(x)$, která splňuje rovnici (5) pro každé $x \in I$ a pro $x_0 \in I$ splňuje počáteční podmínky

$$y(x_0) = y_0\,,\; y'(x_0) = y_1\,,\; \cdots\,,\; y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \tag{6}$$

se nazývá **řešení počáteční úlohy** (5), (6).

Analogii k Peano-Picardově větě zaručující existenci a jednoznačnost řešení pro rovnice 1.řádu je následující věta.

Věta 3.2 : (**o existenci a jednoznačnosti**)
Nechť funkce $a_0,\, a_1,\, \dots\,,\, a_{n-1},\, f$ jsou spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak počáteční úloha (5), (6) má právě jedno řešení definované na celém intervalu I.

Příklad 3.9: Rovnice

$$y'' + 4y = 0$$

je diferenciální rovnice 2. řádu. Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení. Jsou to například funkce

$$y_1(x) = \sin 2x\,, \quad y_2(x) = \cos 2x$$

a jejich libovolná lineární kombinace

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 \qquad \text{obecné řešení}\,.$$

Počáteční podmínky $y(0) = 1,\, y'(0) = 0$ splňuje funkce $y = \cos 2x$. Podle předchozí věty (3.2) je tato funkce určena jednoznačně ($a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 4, f = 0$ jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$).

Dále budeme předpokládat, že a_0, a_1, ..., a_n, f jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $a_n(x) \neq 0$ na I.

Definice 3.6 : Funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in I$ se nazývají **lineárně závislé**, jestliže existují konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ takové, že alespoň jedna je nenulová a platí

$$\forall x \in I: \quad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0 .$$

V opačném případě říkáme, že funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou **lineárně nezávislé**.

Věta 3.3 : Označme $K = \{y(x) : L[y] = 0\}$ množinu všech řešení homogenní rovnice. Potom K je lineární prostor dimenze n.

Množina K se nazývá jádro operátoru L.

Definice 3.7 : Báze prostoru K se nazývá **fundamentální systém** homogenní diferenciální rovnice $L[y] = 0$. Fundamentální systém je tvořen n lineárně nezávislými funkcemi

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ x \in I .$$

Funkce

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x), \quad \text{kde} \quad c_1, c_2, \ldots, c_n$$

jsou libovolné konstanty, se nazývá **obecné řešení homogenní rovnice**.
Volbou konstant $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nebo počátečních podmínek $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\cdots$, $y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ získáme řešení (počáteční) úlohy.

Konstanty c_1, c_2 mohou být i z tělesa komplexních čísel.

Existence a jednoznačnost funkcí y_i plyne z věty (3.2).

Příklad 3.10: Fundamentální systém rovnice $y'' + y = 0$ je tvořen funkcemi

$$y_1(x) = \cos x\,, \quad y_2(x) = \sin x$$

a funkce

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

je obecným řešením dané rovnice.

3.6 Metody řešení rovnic n-tého řádu

3.6.1 Homogenní rovnice

Rovnice

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x\, y' + a_0 y = 0\,,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálné konstanty, se nazývá **Eulerova rovnice**. Je to lineární rovnice se speciálními proměnnými koeficienty a její fundamentální systém tvoří funkce ve tvaru

$$y(x) = x^\lambda, \quad (\text{popř. } x^\lambda \ln x, \ldots, x^\lambda \ln^{k-1} x) \quad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Výklad provedeme na příkladech.

A) (jednoduché kořeny) Pro rovnici

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

chceme stanovit takové hodnoty parametru λ, aby funkce $y(x) = x^\lambda$ byla řešením této rovnice. Protože $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$, $y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$, pak po dosazení do diferenciální rovnice obdržíme

$$x^3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3} - 3x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 6x\lambda x^{\lambda-1} - 6x^\lambda = 0\,,$$

tudíž

$$(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6)\, x^\lambda = 0\,.$$

Tato rovnost je splněna (při $x \neq 0$) pouze pro kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ uvedeného polynomu. Trojice funkcí

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad y_3(x) = x^3$$

je lineárně nezávislá, neboť příslušný Wronskián je nenulový ($W(x) = 2x^3$, $x \neq 0$), a tvoří tedy fundamentální systém Eulerovy rovnice. Obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\, x + C_2\, x^2 + C_3\, x^3\,.$$

B) (vícenásobné kořeny) V případě, že λ je k-násobným kořenem polynomu příslušného Eulerově rovnici, potom k tomuto kořenu máme k lineárně nezávislých řešení tvaru

$$y_1(x) = x^\lambda, \quad y_2(x) = x^\lambda \ln x\,, \quad \ldots \quad y_k(x) = x^\lambda \ln^{k-1} x\,,$$

patřících do fundamentálního systému.

Při řešení rovnice

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

dostaneme:

$y(x) = x^\lambda, y' = \lambda x^{\lambda-1}, y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$ a po dosazení

$$\begin{aligned} x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 3x\,\lambda\,x^{\lambda-1} + x^\lambda &= 0\,, \\ \lambda^2 - \lambda + 3\lambda + 1 &= 0\,, \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0\,, \\ \lambda_{1,2} &= -1\,. \end{aligned}$$

Do fundamentálního systému rovnice tedy patří funkce $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = \frac{1}{x}\ln x$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\frac{1}{x} + C_2\,\frac{1}{x}\ln x\,.$$

C) (komplexní kořeny)

Jsou-li kořeny polynomu Eulerovy rovnice komplexní, mohou být funkce fundamentálního systému (tj. komplexní funkce reálné proměnné)

$$x^{a+ib}, \quad x^{a-ib}, \qquad \text{resp.} \quad x^{a+ib}\ln^k x, \quad x^{a-ib}\ln^k x\,,$$

nahrazeny reálnými funkcemi

$$\begin{array}{lcl} x^a\cos(b\ln x)\,, & \text{resp.} & x^a\cos(b\ln x)\ln^k x\,, \\ x^a\,\sin(b\ln x)\,, & & x^a\,\sin(b\ln x)\ln^k x\,. \end{array}$$

Při řešení rovnice

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

dostaneme:

$$\begin{aligned} x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + x\,\lambda\,x^{\lambda-1} + x^\lambda &= 0\,, \\ \lambda^2 + 1 &= 0\,, \\ \lambda_1 = i \quad \lambda_2 &= -i\,. \end{aligned}$$

Do fundamentálního systému tedy patří funkce $y_1(x) = x^i$, $y_2(x) = x^{-i}$ nebo $y_1(x) = \cos(\ln x)$, $y_2(x) = \sin(\ln x)$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\cos(\ln x) + C_2\,\sin(\ln x)\,.$$

Využijeme-li vztahu $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$ $(a > 0)$ a Eulerovy identity $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x$, pak pro $x > 0$ dostaneme

$$x^{ib} = \cos(b\ln x) + i\,\sin(b\ln x)\,.$$

(Pro $x < 0$ volíme $\ln(-x)$ místo $\ln x$.)

Poznamenejme, že $L[y_1 + iy_2] = 0 \Leftrightarrow L[y_1] + iL[y_2] = 0 \Leftrightarrow L[y_1] = 0 \wedge L[y_2] = 0$.

Metoda charakteristické rovnice

Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s **konstantními koeficienty**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ (popř. $x\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$), kde číselný parametr λ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

A) (jednoduché kořeny) Řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.

Potom $y'(x) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}$ a po dosazení do rovnice máme $\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} - 4\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + 3\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$. Hledáme tedy kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0\,,$$

které jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Fundamentální systém rovnice je tedy tvořen funkcemi e^{3x}, e^{x} a obecné řešení rovnice má tvar

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{x}\,.$$

B) (vícenásobný kořen) Chceme vyřešit rovnici

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0\,.$$

Její charakteristická rovnice

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

má trojnásobný ($k=3$) kořen $\lambda = 1$. V tomto případě je fundamentální systém rovnice tvořen funkcemi

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{x}\,, \quad y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{x}\,, \quad y_3(x) = x^2\mathrm{e}^{x}$$

a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,x^2\mathrm{e}^{x}\,.$$

C) (komplexní kořeny) Hledáme obecné řešení rovnice

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Kořeny charakteristického polynomu $\lambda^2 + 4\lambda + 13$ jsou komplexní čísla $\lambda_1 = -2 + 3i, \lambda_2 = -2 - 3i$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi

Z lineární algebry víme, že jestliže komplexní číslo $z = a + ib$ je kořenem polynomu, potom také komplexně sdružené číslo $\bar{z} = a - ib$ je kořenem daného polynomu.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \mathrm{e}^{(-2+3i)x} = \mathrm{e}^{-2x}(\cos 3x + i \sin 3x), \\ y_2(x) &= \mathrm{e}^{(-2-3i)x} = \mathrm{e}^{-2x}(\cos 3x - i \sin 3x), \end{aligned}$$

které lze zapsat jako lineární kombinace funkcí

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(x) &= \mathrm{e}^{-2x} \cos 3x, \\ \hat{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{-2x} \sin 3x\,. \end{aligned}$$

Máme tedy jinou bázi lineárního prostoru $K = \{y : L[y] = 0\}$ a obecné řešení tak můžeme psát ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)\,.$$

Cvičení 3.2: Stanovte obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' - 3y = 0\,.$$

[$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}$.]

Cvičení 3.3: Vyřešte rovnici

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0\,.$$

[$\lambda_{1,2} = 0$ dvojnásobný kořen a $\lambda_{3,4,5} = 1$ trojnásobný kořen, obecné řešení $y(x) = C_1\, 1 + C_2\, x + C_3\, \mathrm{e}^x + C_4\, x\, \mathrm{e}^x + C_5\, x^2 \mathrm{e}^x$.]

Cvičení 3.4: Vyřešte rovnici

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0\,.$$

[$\lambda_{1,2} = 2i$ dvojnásobný kořen a $\lambda_{3,4} = -2i$ dvojnásobný kořen, obecné řešení $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2\, x \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4\, x \sin 2x$.]

3.6.2 Nehomogenní rovnice

Metoda variace konstant

pro řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic $n-$tého řádu

$$L[y] = a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y = f(x)\,.$$

1. Určíme fundamentální systém $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ a obecné řešení

$$y_h(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \cdots + C_n\, y_n(x)$$

homogenní rovnice $L[y] = 0$.

2. Partikulární řešení nehomogenní rovnice $L[y] = f$ hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \cdots + C_n(x)\, y_n(x)\,,$$

kde funkce $C_1(x)\,,\ C_2(x)\,,\ \cdots\,,\ C_n(x)$ získáme jako řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccc}
C_1'y_1 & + & C_2'y_2 & + \cdots + & C_n'y_n & = & 0\,,\\
C_1'y_1' & + & C_2'y_2' & + \cdots + & C_n'y_n' & = & 0\,,\\
\vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots\\
C_1'y_1^{(n-2)} & + & C_2'y_2^{(n-2)} & + \cdots + & C_n'y_n^{(n-2)} & = & 0\,,\\
C_1'y_1^{(n-1)} & + & C_2'y_2^{(n-1)} & + \cdots + & C_n'y_n^{(n-1)} & = & \frac{f(x)}{a_n(x)}\,.
\end{array}$$

Po dosazení obecného tvaru partikulárního řešení $y_p(x)$ do původní rovnice, dostaneme jednu rovnici s n neznámými funkcemi $C_1(x)\,,\cdots\,,C_n(x)\,.$ Prvních $n-1$ rovnic v dané soustavě si tedy můžeme volit. Determinant této soustavy je Wronskián, který je podle věty **??** nenulový. Uvedená soustava má tedy řešení

3. Obecné řešení původní nehomogenní diferenciální rovnice je součtem homogenního a partikulárního řešení

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

<u>*Příklad 3.11*</u>: Stanovme obecné řešení rovnice

$$(1+x^2)\, y'' - 2x\, y' + 2y = 2\,.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice (viz metoda snižování řádu příklad (**??**))

$$y_h(x) = C_1\, x + C_2\,(x^2-1)\,.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = C_1(x)\,x + C_2(x)(x^2-1)\,.$$
Po zderivování: $y_p' = C_1'\,x + C_2'\,(x^2-1) + C_1 + 2x\,C_2\,.$ Položíme $C_1'\,x + C_2'(x^2-1) = 0$ a znovu derivujeme $y_p'' = C_1' + 2\,C_2' + 2x\,C_2\,.$ Po dosazení do dané rovnice obdržíme $(1+x^2)(C_1'+2\,C_2'+2x\,C_2) - 2x\,(C_1+2x\,C_2) + 2(C_1\,x + C_2(x^2-1)) = 2\,,$ odtud po úpravě dostaneme $(1+x^2)(C_1' + 2x\,C_2') = 2\,.$

Dostáváme soustavu algebraických rovnic pro neznámé funkce C_1', C_2':
$$\begin{aligned} C_1'x + C_2'(x^2-1) &= 0\,,\\ C_1' \;\; + 2x\,C_2' &= \tfrac{2}{x^2+1}\,. \end{aligned}$$
Odtud
$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 \\ \frac{2}{x^2+1} & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \tfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow C_1(x) = \tfrac{-2x}{1+x^2} + K_1\,,$$
(bez újmy na obecnosti pokládáme : $K_1 = 0$) .
$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{2}{x^2+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \tfrac{2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow C_2(x) = \tfrac{-1}{1+x^2} + (K_2\!=\!0)\,.$$
Partikulární řešení dostáváme ve tvaru
$$y_p(x) = \frac{-2x}{1+x^2}\,x + \frac{-1}{1+x^2}\,(x^2-1) = \frac{-3x^2+1}{1+x^2}\,.$$

Jestliže y_h je řešením homogenní rovnice $L[y_h] = 0$, pak také $L[C\,y_h] = 0\,, \forall C \in \mathbb{R}$. Jestliže tedy máme správně řešení homogenní rovnice, potom v metodě variace konstant musí vypadnout členy z nederivovanými funkcemi C_1, C_2 .

3. Obecné řešení úlohy je tedy funkce
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,x + C_2\,(x^2-1) + \frac{-3x^2+1}{1+x^2}\,.$$

<u>*Cvičení 3.5*</u>: Metodou variace konstant vyřešte počáteční úlohu $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\,.$

[Obecné řešení $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\,x\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$, řešení poč. úlohy $y(x) = \mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$.]

3.6.3 Fyzikální aplikace

Kirchhoffův zákon v tzv. RLC obvodu

Nechť $i(t)$ je proud v elektrickém obvodu v závislosti na čase t,
u_R je napětí na odporu $R > 0$,
u_L je napětí na cívce s indukcí $L > 0$,
u_C je napětí na kondenzátoru s kapacitou $C > 0$,
$u(t) = U_0 \sin \omega t$ je napětí na svorkách zdroje,

potom platí $u_R + u_L + u_C = u(t)$, nebo-li

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau = u(t)\,, \quad t \geq t_0\,.$$

Rovnice elektrického obvodu a jednoduchého mechanického systému se z matematického pohledu neliší, a proto hovoříme o **rovnici kmitů** (elektrických, mechanických). Funkce $F_0 \cos \omega_0 t$ na pravé straně představuje **vnější buzení**, přičemž F_0 je amplituda a ω_0 frekvence vnějšího periodického buzení. K jednoznačnému určení těchto funkcí musíme navíc znát počáteční hodnoty $y(t_0), y'(t_0)$, resp. $i(t_0), \frac{di(t_0)}{dt}$.

Řešení příslušné počáteční úlohy se nazývá **odezva systému** na počáteční stav a na vnější buzení.

Hledáme-li funkci $i = i(t)$ splňující tento zákon, pak derivováním obdržíme diferenciální rovnici 2. řádu pro neznámou funkci i:

$$L\,\frac{d^2 i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega U_0 \cos \omega t\,.$$

Rovnice mechanického systému

Uvažujeme jednoduchý mechanický systém pohybující se po nerovném povrchu. Vertikální pohyb se řídí Newtonovým pohybovým zákonem

$$my''(t) = -ky(t) - \gamma y'(t) + F(t)\,,$$

kde $y = y(t)$ je časově závislá výchylka tělesa od klidové polohy,
$m > 0$ je hmotnost systému,
$k > 0$ je tuhost pružiny,
$\gamma \geq 0$ je koeficient tlumení.

Vnější síla F může mít tvar

1. $F(t) = -[k\varphi(t) + \gamma\dot{\varphi}(t)]$ (buzení vlivem nerovností terénu),
2. $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$ (periodické vnější buzení).

3.7 Okrajové úlohy pro rovnice 2. řádu

Okrajovou úlohou nazveme lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)\,, \tag{7}$$

kde $a_2(x) \neq 0\,, a_1(x)\,, a_0(x)\,, f(x)$ jsou funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) &= \gamma_1 \qquad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}\,, \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) &= \gamma_2 \qquad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Podle tvaru okrajových podmínek také dělíme okrajové úlohy na následující typy.

Dirichletova okrajová úloha

Při této úloze hledáme funkci $y = y(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ tak, aby platilo

$$\begin{aligned} &a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad x \in (a, b)\,, \\ &y(a) = \gamma_1,\ y(b) = \gamma_2\,. \end{aligned}$$

kde γ_1, γ_2 jsou daná reálná čísla.

Neumannova okrajová úloha

John Von Neumann (1903-1957).

teoreticky vybudoval ideu samočinného počítače s programem uloženým ve vnitřní paměti a některé části teorie automatů a kybernetiky.

Nyní hledáme funkci $y = y(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ tak, aby platilo

$$\begin{aligned} &a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad x \in (a, b)\,, \\ &y'(a) = \gamma_1,\ y'(b) = \gamma_2\,. \end{aligned}$$

Příklad 3.12:

a) Dirichletova úloha

$$\begin{aligned} &y'' + y = 0\,, \qquad x \in (0, \pi)\,, \\ &y(0) = 0\,,\ \ y(\pi) = 0\,. \end{aligned}$$

Obecným řešením úlohy je $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ a z okrajových podmínek dostaneme

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\,, \\ 0 &= C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi\,, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &C_1 = 0\,, \\ &C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Řešením okrajové úlohy je funkce $y(x) = C_2 \sin x$.

b) Neumannova úloha

$$y'' + y = 0\,, \qquad x \in (0, b)\,,$$
$$y'(0) = \gamma_1\,, \quad y'(b) = \gamma_2\,,$$

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma_1 = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0, \\ \gamma_2 = -C_1 \sin b + C_2 \cos b, \end{array}$$

$$C_2 = \gamma_1, \quad \gamma_2 - \gamma_1 \cos b = -C_1 \sin b\,.$$

Protože $\gamma_1,\ \gamma_2,\ b$ jsou daná čísla, mohou nastat následující situace

1. $\sin b \neq 0$, potom $C_1 = \frac{\gamma_1 \cos b - \gamma_2}{\sin b}$ a úloha má tedy jediné řešení

$$y(x) = \frac{\gamma_1 \cos b - \gamma_2}{\sin b} \cos x + \gamma_1 \sin x.$$

2. $\sin b = 0,\ \gamma_2 - \gamma_1 \cos b = 0$, potom má úloha nekonečně mnoho řešení tvaru

$$y(x) = C_1 \cos x + \gamma_1 \sin x,$$

kde C_1 je libovolné reálné číslo.

3. $\sin b = 0,\ \gamma_2 - \gamma_1 \cos b \neq 0$, pak neexistuje řešení dané úlohy. Například

$$y'' + y = 0,\ y'(0) = 1,\ y'(\pi) = 2$$

nemá žádné řešení. Zde $b = \pi,\ \gamma_1 = 1\,,\ \gamma_2 = 2\,.$

Vidíme, že otázky řešitelnosti okrajových úloh jsou mnohem složitější než u počátečních úloh, kde stačila spojitost koeficientů k jednoznačnosti řešení.

Obecně pro operátorovou rovnici $L[y] = \lambda y$ hledáme vlastní číslo a vlastní funkci, které splňují danou rovnici.

Okrajová úloha s parametrem

neboli **Sturmova-Liouvilleova úloha** je speciálním případem okrajové úlohy (7). Nyní hledáme parametr λ a nenulovou funkci $y(x) \neq 0,\ x \in \langle a, b\rangle$, tak, aby platilo

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \lambda y \qquad x \in (a, b)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) = 0\,,$$
$$\alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0\,.$$

Ta hodnota parametru λ, pro kterou existuje nenulové řešení $y(x)$ této úlohy, se nazývá **vlastní číslo úlohy** a funkce $y(x)$ se nazývá **vlastní funkce úlohy** odpovídající vlastnímu číslu λ.

<u>*Příklad 3.13*</u>: Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$-y'' = \lambda y\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0\,.$$

Pro $\lambda < 0$ a pro $\lambda = 0$ vyplývá z tvaru obecného řešení, že úloha má pouze nulové řešení (prověřte!).
Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty $C_1,\ C_2$

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 0 &= C_1 \cos\sqrt{\lambda}\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi. \end{aligned}$$

Odtud

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

Aby mohlo být $C_2 \neq 0$ (zajímá nás nenulové řešení!), musí nastat rovnost

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0,\ \text{tj. } \sqrt{\lambda}\pi = k\pi,$$

kde $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Pro hodnoty $\lambda = \lambda_k = k^2 : (1, 4, 9, 16, \ldots)$ má okrajová úloha nenulové řešení

$$y_k(x) = C_2 \sin kx.$$

Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel**

$$\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

$$\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}.$$

3.8 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Motivace: Systém lovec-kořist

Nechť funkce y_1 popisuje počet lovců (např. lišek) a funkce y_2 počet kořisti (např. zajíců). Velice zjednodušeně si můžeme představit, že rychlost přibývání lovců (tj. y_1') je přímo úměrná počtu kořisti, neboli $y_1' = k_1\, y_2\,,\ k_1 \in \mathbb{R}^+$. Zároveň rychlost úbytku kořisti (tj. $-y_2'$) závisí přímo úměrně na počtu lovců, tedy platí $-y_2' = k_2\, y_1\,,\ k_2 \in \mathbb{R}^+$. Dostáváme tak soustavu dvou diferenciálních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} y_1' &= k_1\, y_2\,, \\ -y_2' &= k_2\, y_1\,. \end{aligned}$$

Řešením soustavy jsou například funkce $y_1 = \sqrt{k_1}\sin(\sqrt{k_1k_2}x)$, $y_2 = \sqrt{k_2}\cos(\sqrt{k_1k_2}x)$.

Obecnou **soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu** píšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{aligned}$$

kde $a_{ij}(x),\ \ b_i(x),\ \ i,j = 1,\ldots,n$ jsou funkce definované na nějakém intervalu I. Jestliže označíme

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x), & a_{12}(x), & \ldots, & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x), & a_{22}(x), & \ldots, & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x), & a_{n2}(x), & \ldots, & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \vec{b}(x) &= (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T, \\ \vec{y}(x) &= (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^T, \end{aligned}$$

můžeme soustavu psát v **maticovém tvaru**

$$\vec{y}\,' = \mathbb{A}(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x).$$

Podobně jako v definici (3.5) formulujeme **počáteční úlohu**.

$$\vec{y}\,'(x) = \mathbb{A}(x)\,\vec{y}(x) + \vec{b}(x)\,, \tag{9}$$

$$\vec{y}(x_0) = \vec{x}_0\,, \qquad x_0 \in I,\ \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

Vektorovou funkci $\vec{y} = \vec{y}(x)$ řešící počáteční úlohu můžeme geometricky interpretovat jako parametrické rovnice křivky, fyzikálně pak jako polohový vektor pohybujícího se bodu ve fázovém prostoru. Hovoříme o **fázové křivce** nebo **trajektorii soustavy**.

Vektorová funkce $\vec{y} = \vec{y}(x)$ splňující rovnici (9) a počáteční podmínky (10) se nazývá **řešení počáteční úlohy**.

Matice $\mathbb{A}(x)$ se nazývá **matice soustavy**, vektor $\vec{b}(x)$ se nazývá **vektor pravých stran**. Je-li $\vec{b}(x) = \vec{0}$, potom se soustava (9) nazývá **homogenní**.

Poznámka 3.2: Každá soustava n diferenciálních rovnic 1.řádu $\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y} + \vec{b}(x)$, kde

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}, \ \vec{b}(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \ \vec{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

je ekvivalentní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y_1^{(n)} + p_{(n-1)} y_1^{(n-1)} + \dots + p_1 y_1' + p_0 y_1 = f(x)\,.$$

Připomeňme, že všechna řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$ lze zapsat ve tvaru $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, kde funkce $y_1, y_2, \cdots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (viz definice (3.7) a věta (3.3)). Podobně lze ukázat, že všechna řešení homogenní soustavy $\vec{y}\,' = \mathbb{A}(x)\vec{y}$ se dají vyjádřit jako lineární kombinace jednoho (zvoleného) fundamentálního systému.

Na soustavy diferenciálních rovnic používáme stejné metody jako pro rovnici jedinou. Použití těchto metod je však složitější, zvláště když matice $\mathbb{A}$ nemá speciální tvar (diagonální, trojúhelníkový, Jordanův).

3.9 Metody řešení soustavy diferenciálních rovnic

Metoda převodu na jednu rovnici n-tého řádu (eliminační metoda)

Převodem na rovnici 2. řádu najdeme řešení homogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2\,, \\ y_2' &= y_1 + y_2\,. \end{aligned}$$

Z 2. rovnice vyjádříme $y_1 = y_2' - y_2$, zderivujeme $y_1' = y_2'' - y_2'$ a obě rovnice dosadíme do 1. rovnice. Dostaneme

$$y_2'' - y_2' = 4(y_2' - y_2) - 2y_2 \Rightarrow y_2'' - 5y_2' + 6y_2 = 0\,.$$

Obecně soustavu $\vec{y}\,'(x) = \mathbb{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ převádíme na jednu rovnici n-tého řádu derivováním, například první rovnice, a postupnou eliminací ostatních neznámých funkcí.

Obecné řešení této rovnice má tvar $y_2(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$, potom $y_1(x) = (C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x})' - (C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}) = 2C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$. Obecným vektorem řešení soustavy je vektorová funkce

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \\ C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}}_{\vec{y}_1} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}}_{\vec{y}_2}\,.$$

Říkáme, že vektorové funkce $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$ tvoří **fundamentální systém** soustavy a matice $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$ se nazývá **fundamentální matice** soustavy.
Označíme-li vektor konstant $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, pak řešení soustavy můžeme psát ve tvaru $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbb{Y} \cdot \vec{C}$.

Všimněme si, že čísla $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ jsou vlastní čísla matice soustavy $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a vektory $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou jim odpovídající vlastní vektory. Obecné řešení soustavy tedy můžeme psát ve tvaru $\vec{y}(x) = C_1\vec{h}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\vec{h}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. Tento poznatek zobecníme v následujícím paragrafu.

Metoda fundamentálního systému a fundamentální matice

Nyní máme homogenní soustavu n diferenciálních rovnic s **konstantními** koeficienty

$$\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y}\,, \quad x \in I\,. \tag{11}$$

Řešení soustavy (11) hledáme ve tvaru $\vec{y} = \vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\vec{h}$ je konstantní vektor. Po dosazení do (11) dostaneme $\lambda\vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathbb{A}\vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x}$, nebo-li

$$(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \vec{0}\,, \qquad \text{kde } \mathbb{I} \text{ je jednotková matice.}$$

Tudíž λ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ a $\vec{h}$ je odpovídající vlastní vektor. Různá násobnost vlastního čísla vede k následujícím možnostem.

V případě, že máme n různých vlastních čísel matice $\mathbb{A}$, pak každé je jednonásobné.

a) Nechť λ_i, $i = 1, \ldots, n$ jsou **navzájem různá vlastní čísla** (obecně komplexní) matice $\mathbb{A}$ a $\vec{h}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ jsou odpovídající lineárně nezávislé vlastní vektory. Potom vektorové funkce

$$\vec{y}_i(x) = \vec{h}_i\mathrm{e}^{\lambda_i x}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

jsou lineárně nezávislá řešení homogenní soustavy $\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y}$ a tvoří **fundamentální systém** dané homogenní soustavy. Matice $\mathbb{Y}(x)$ (řádu n), jejíž sloupce jsou tvořeny fundamentálním systémem, tj.

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\vec{h}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \vec{h}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \dots, \vec{h}_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}\right)$$

se nazývá **fundamentální maticí** soustavy (11).

Obecné řešení soustavy (11) definujeme jako vektorový násobek fundamentální matice

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}\,,$$

resp. v rozepsané podobě

$$\vec{y}(x) = C_1 \vec{h}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \vec{h}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \vec{h}_n \mathrm{e}^{\lambda_n x},$$

kde $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$ je libovolný konstantní vektor.

Příklad 3.14: Určíme fundamentální matici a obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' &= 14y_1 - 6y_2 - 6y_3\,. \end{aligned}$$

Zde máme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 14 & -6 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & -1 \\ -14 & 6 & \lambda + 6 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice A jsou:
$\lambda_1 = 0$, $\vec{h}_1 = (0, 1, -1)^T$ (řešení soustavy $-\mathbb{A}\vec{h} = \vec{0}$),
$\lambda_2 = 1$, $\vec{h}_2 = (1, 0, 2)^T$ (řešení soustavy $(\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \vec{0}$),
$\lambda_3 = -1$, $\vec{h}_3 = (1, -1, 4)^T$ (řešení soustavy $(-\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \vec{0}$).
Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ 1 & 0 & -\mathrm{e}^{-x} \\ -1 & 2\mathrm{e}^x & 4\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \vec{h}_1 + C_2 \vec{h}_2 \mathrm{e}^x + C_3 \vec{h}_3 \mathrm{e}^{-x}.$$

b) Nechť λ_i je r_i-**násobným vlastním číslem** matice $\mathbb{A}$.

V tomto případě je situace složitější v závislosti na počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ příslušných vlastnímu číslu λ. Abychom se vyhnuli použití Jordanova tvaru matice $\mathbb{A}$, musíme se spokojit s konstatováním, že ve fundamentálním systému, fundamentální matici a v obecném řešení vystupují lineární kombinace funkcí typu (viz také metodu charakteristické rovnice pro diferenciální rovnici n-tého řádu)

$$\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad x\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad x^2\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad \dots \quad , x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad k \le r_i \,.$$

Vektorové funkce, které ve fundamentálním systému přísluší vlastnímu číslu λ_i budeme hledat ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} P_{i1}(x) \\ P_{i2}(x) \\ \vdots \\ P_{in}(x) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_i x} \,,$$

kde koeficienty polynomů $P_{ij}(x)$ stupně nejvýše r_i–1 určíme z požadavku, aby funkce $\vec{y}(x)$ byla řešením soustavy a abychom dostali chybějící lineárně nezávislá řešení. Sestrojíme pak fundamentální matici $\mathbb{Y}(x)$ a obecné řešení vyjádříme ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} \,, \quad \vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T \,.$$

<u>*Příklad 3.15*</u>: Stanovme obecné řešení, fundamentální systém a fundamentální matici soustavy $\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y}$ tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= \ 2y_1 - y_2 \,, \\ y_2' &= \ y_1 \,. \end{aligned}$$

Matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dané soustavy má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 1$ a jeden vlastní vektor $\vec{h} = (1,1)^T$. Odpovídající řešení $\vec{y}(x) = \vec{h}\mathrm{e}^x$ nestačí k určení obecného řešení. Budeme jej proto hledat ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ b_1 + b_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x \,.$$

Dosazením do soustavy $\vec{y}\,' = \mathbb{A}\vec{y}$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ b_1 + b_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ b_1 + b_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x$$

neboli

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 x + a_2 &= 2a_1 + 2a_2 x - b_1 - b_2 x\,, \\ b_1 + b_2 x + b_2 &= a_1 + a_2 x\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$b_2 = a_2\,, \quad b_1 = a_1 - a_2\,;$$

takže obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ (a_1 - a_2) + a_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + a_2 \begin{pmatrix} x \\ -1 + x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x.$$

Fundamentální matici sestavíme z funkcí fundamentálního systému, tj.

$$\mathbb{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (-1+x)\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

a snadno prověříme, že platí $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$.

Pozorování: obecné řešení lze upravit na tvar

$$\vec{y}(x) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + a_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^x = a_1 \vec{h} \mathrm{e}^x + a_2 (\vec{v} + x\vec{h})\ \mathrm{e}^x,$$

kde $\vec{h} = (1,1)^T$ je vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ odpovídající dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = 1$ a $\vec{v}$ je nenulové řešení nehomogenní soustavy $(\mathbb{A} - \lambda_{1,2}\mathbb{I})\vec{v} = \vec{h}$.

K vícenásobnému vlastnímu číslu může patřit více lineárně nezávislých vlastních vektorů, popřípadě "řetězec vektorů".

Příklad 3.16: Najdeme obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}$$

Kořeny charakteristické rovnice

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^3 = 0$$

jsou

$$\lambda_{1,2,3} = 1\,.$$

Vlastní číslo $\lambda = 1$ je trojnásobné. Obecné řešení proto hledáme ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ b_1 + b_2x + b_3x^2 \\ c_1 + c_2x + c_3x^2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x \,.$$

Dosazením do původní soustavy a po vydělení e^x dostaneme

$$\begin{aligned} a_2 + 2a_3x + a_1 + a_2x + a_3x^2 &= a_1 + a_2x + a_3x^2 \\ b_2 + 2b_3x + b_1 + b_2x + b_3x^2 &= b_1 + b_2x + b_3x^2 + c_1 + c_2x + c_3x^2 \\ c_2 + 2c_3x + c_1 + c_2x + c_3x^2 &= c_1 + c_2x + c_3x^2 \,. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\begin{array}{lll} a_3 = a_3 & 2a_3 + a_2 = a_2 & a_2 + a_1 = a_1 \\ b_3 = b_3 + c_3 & 2b_3 + b_2 = b_2 + c_2 & b_2 + b_1 = b_1 + c_1 \\ c_3 = c_3 & 2c_3 + c_2 = c_2 & c_2 + c_1 = c_1 \,, \end{array}$$

neboli $a_2 = a_3 = 0, a_1 \in \mathbb{R}\,, b_2 = c_1, b_3 = 0, b_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 = c_3 = 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Obecné řešení má tedy tvar

Vlastnímu číslu $\lambda = 1$ přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\vec{h}_1 = (1,0,0)^T$, $\vec{h}_2 = (0,1,0)^T$ a s vektorem $\vec{h}_2$ tvoří řetězec vektor $\vec{v} = (0,0,1)^T$.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 + c_1x \\ c_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + b_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + c_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^x.$$

Příklad 3.17: Stanovme obecné řešení a fundamentální matici soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \,, \\ y_2' &= -y_2 + 4y_3 \,, \\ y_3' &= y_1 - 4y_3 \,. \end{aligned}$$

Kořeny charakteristické rovnice

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -4 \\ -1 & 0 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

jsou

$$\lambda_{1,2} = -3, \; \lambda_3 = 0.$$

Vlastnímu číslu $\lambda_3 = 0$ přísluší vektor $\vec{h}_3 = (1, 1, \frac{1}{4})^T$ a dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -3$ přísluší jeden vlastní vektor $\vec{h}_1 = (1, -2, 1)^T$. Obecné řešení hledáme proto ve tvaru

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ b_1 + b_2 x \\ c_1 + c_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{0 \cdot x} .$$

Dosazením do soustavy určíme vztahy mezi $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, tj.

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_2 + b_1 &= 0 , & 2a_1 + b_2 &= 0 , \\ 2b_1 - b_2 + 4c_1 &= 0 , & 2b_2 + 4c_2 &= 0 , \\ -c_1 - c_2 + a_1 &= 0 , & -c_2 + a_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Pomocí a_1, a_2 vyjádříme ostatní koeficienty:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - 2a_2 , & b_2 &= -2a_2 , \\ c_1 &= a_1 - a_2 , & c_2 &= a_2 . \end{aligned}$$

Takže obecné řešení soustavy má tvar

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ (a_2 - 2a_1) - 2a_2 x \\ (a_1 - a_2) + a_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x \\ -1 + x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ &= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + a_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ &= a_1 \vec{h}_1 \mathrm{e}^{-3x} + a_2 (\vec{v} + x \vec{h}_1) \mathrm{e}^{-3x} + a_3 \vec{h}_3 , \end{aligned}$$

kde $(\lambda_{1,2}\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h}_1 = \vec{0}, (\lambda_{1,2}\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{v} = \vec{h}_1, (\lambda_3\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h}_3 = \vec{0}$. Fundamentální matice soustavy má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} & x\mathrm{e}^{-3x} & 1 \\ -2\mathrm{e}^{-3x} & (1 - 2x)\mathrm{e}^{-3x} & 1 \\ \mathrm{e}^{-3x} & (-1 + x)\mathrm{e}^{-3x} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} ,$$

a proto

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{a} , \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T .$$

Metoda variace konstant

Nyní máme nehomogenní soustavu diferenciálních rovnic

$$\vec{y}\,' = \mathbb{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)\,, \quad x \in I \tag{9}$$

a metodou **variace konstant** nalezneme její řešení.

1. Nejdříve vyřešíme homogenní soustavu $\vec{y}\,' = \mathbb{A}(x)\vec{y}$. Řešení homogenní soustavy má tvar

$$\vec{y}_h(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}\,,$$

kde $\mathbb{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy a $\vec{C}$ je vektor konstant.

2. Partikulární řešení rovnice (9) hledáme ve tvaru

$$\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}(x)\,,$$

kde $\vec{C}(x)$ je vektor funkcí. Po dosazení do soustavy (9) máme

$$\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)\,.$$

Protože $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$, tak platí

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}(x)\,\vec{C}'(x) &= \vec{b}(x) \\ \vec{C}'(x) &= \mathbb{Y}^{-1}(x)\vec{b}(x)\ . \end{aligned}$$

Přímou integrací určíme

$$\vec{C}(x) = \int \mathbb{Y}^{-1}(\xi)\vec{b}(\xi)\; d\xi$$

a partikulární řešení soustavy (9) dostaneme ve tvaru $y_p(x) = \mathbb{Y}(x) \int \mathbb{Y}^{-1}(\xi)\vec{b}(\xi)\; d\xi\,.$

3. Obecné řešení nehomogenní soustavy má proto tvar

$$\vec{y}(x) = \vec{y}(x)_h + \vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x)\left(\vec{C} + \int \mathbb{Y}^{-1}(\xi)\vec{b}(\xi)\; d\xi\right)\,,$$

kde $\vec{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ je libovolný konstantní vektor.

Příklad 3.18: Metodou variace konstant řešíme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2 + \mathrm{e}^x\,, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + \mathrm{e}^x\,. \end{aligned}$$

1. Najdeme fundamentální matici homogenní soustavy

$$\mathbb{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

2. Protože

$$\mathbb{Y}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-3x} & -2\mathrm{e}^{-3x} \\ -\mathrm{e}^{-2x} & 2\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix},$$

tak partikulární řešení soustavy má tvar

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-\xi} \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{x} \\ -\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}.$$

Pokud nechceme počítat inverzní matici k fundamentální, pak vektor $\vec{C}(x)$ získáme vyřešením soustavy $\mathbb{Y}(x)\,\vec{C}'(x) = \vec{b}(x)$, neboli

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3x}C_1' + \mathrm{e}^{2x}C_2' &= \mathrm{e}^{x} \\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x}C_1' + \mathrm{e}^{2x}C_2' &= \mathrm{e}^{x}\,. \end{aligned}$$

3. Obecným řešením úlohy je vektorová funkce

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{x} \\ -\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix},$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty.

4 Posloupnosti a řady funkcí

Motivace Při řešení počáteční úlohy

$$y'(x) = y(x)\,, \qquad y(0) = 1$$

můžeme formálním derivováním dostat

$$y''(x) = y'(x)\,, \cdots, y^{(n+1)}(x) = y^{(n)}(x)\,, \cdots \Rightarrow y^{(n)}(0) = 1\,.$$

Taylorův rozvoj funkce y v bodě 0 tedy bude mít tvar

$$y(x) = y(0) + y'(0)(x-0) + \cdots \frac{y^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Rovnici $y' = y$ řeší exponenciální funkce e^x, jejíž Taylorův rozvoj je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Řešení úlohy jsme dostali ve tvaru tzv. mocninné řady, kterou budeme zkoumat v této kapitole.

4.1 Posloupnosti funkcí

Př. $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $M = \mathbb{R}$.

Definice 4.1 : Předpokládejme, že funkce $f_1, f_2, f_3, \ldots$ jsou definovány na množině $M \subset \mathbb{R}$. Potom zobrazení $F : n \to f_n\,,\ n \in \mathbb{N}$ se nazývá **posloupnost funkcí na množině** M. Značíme $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, zkráceně $\{f_n\}$.

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je **omezená na množině** M, existuje-li konstanta $K > 0$ taková, že pro všechna $x \in M$ a pro všechna $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$|f_n(x)| \leq K\,.$$

Posloupnost $f_n(x) = \cos nx$ je omezená na množině $M = \mathbb{R}$ konstantou $K \geq 1$.

Definice 4.2 : Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje v bodě** $x_0 \in M$, když číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje bodově na množině** M, když pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje. Množinu M pak nazýváme **oborem bodové konvergence** a na M je definována funkce $f = f(x)$ vztahem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, \quad x \in M\,.$$

Funkce f se nazývá **bodová limitní funkce** posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$, značíme $f_n \to f$.

Příklad 4.1: Posloupnost $f_n(x) = \frac{x}{n}$ konverguje bodově k funkci $f = 0$ na množině $M = \mathbb{R}$.

Posloupnost $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $M = \langle 0, 1\rangle$ má bodovou limitu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1)\,, \\ 1 & x = 1\,. \end{cases}$$

Definice 4.3 : Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje stejnoměrně na množině** M k funkci $f = f(x)$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$. Funkci f nazýváme **stejnoměrnou limitou**.

Poslední příklad ilustruje situaci, kdy posloupnost funkcí spojitých konverguje bodově k funkci nespojité.
Proto bodovou konvergenci "vylepšíme".

Pokud posloupnost konverguje stejnoměrně, pak zřejmě konverguje i bodově.

Uvedeme ekvivalentní definice konvergence posloupnosti funkcí.

Bodová konvergence na M: $\forall\, x \in M\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon, x)\ \ \forall\, n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

Stejnoměrná konvergence na M: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)\,\forall\, x \in M\,\forall\, n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Příklad 4.2: (pokračování příkladu (4.1))

Posloupnost $\{x^n\}$ na $\langle 0, 1\rangle$ nekonverguje stejnoměrně. Platí totiž

$$\sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |x^n - f(x)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Zvolíme-li $\delta \in (0, 1)$, potom na intervalu $\langle\, 0, \delta\,\rangle$ posloupnost $\{x^n\}$ konverguje stejnoměrně, neboť pro $x \in \langle 0, \delta\rangle$ je $f(x) = 0$ a

$$\sup_{x\in\langle 0,\delta\rangle} |x^n| = \delta^n \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty\,.$$

Zároveň platí $\lim\limits_{x\to 1_-} x^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = 0\,.$

Jinými slovy:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1_-} x^n(x) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1\,.$$
$$\lim_{x\to 1_-} \lim_{n\to\infty} x^n(x) = \lim_{x\to 1_-} 0 = 0\,.$$

Vidíme, že limity nelze zaměnit.

Příklad 4.3: Nechť $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}$$

a protože

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0\,, \qquad \text{tak} \quad f_n \rightrightarrows 0\,.$$

Zároveň

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cos(0) = +\infty\,,$$

ale

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(0))' = f'(x) = 0\,.$$

Vidíme, že derivace limitní funkce není limitou posloupnosti derivací. Říkáme, že danou posloupnost $\{f_n\}$ nelze "derivovat člen po členu".

<u>*Příklad 4.4*</u>: Nechť $f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \; x \in \langle 0,1\rangle$. Potom

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \langle 0,1\rangle\,.$$

Zároveň pro integrály členů posloupnosti platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

avšak

$$\int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0\,.$$

Opět vidíme, že nelze zaměnit pořadí limitování a integrování, tj. limita posloupnosti integrálů není rovna integrálu z limity. Říkáme, že danou posloupnost nelze "integrovat člen po členu".

Věta 4.1 : (Postačující podmínka spojitosti, diferencovatelnosti a integrovatelnosti limitní funkce, záměnnosti limit)

a) Je-li $\{f_n\}$ posloupnost spojitých funkcí na intervalu I, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f, potom funkce $f = f(x)$ je také spojitá na I.

b) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ Riemannovsky integrovatelných funkcí ($f_n \in \mathcal{R}(I),\; I = \langle a,b\rangle$) konverguje stejnoměrně na I k funkci $f(x)$, potom $f \in \mathcal{R}(I)$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

c) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ konverguje v nějakém bodě $x_0 \in I = \langle a,b\rangle$, f_n jsou diferencovatelné funkce na I a posloupnost derivací $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na I, potom i posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na I, limitní funkce $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ je diferencovatelná funkce na I a platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]' = f'(x)\,.$$

d) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to a+} f_n(x) = c_n$. Pak existují vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a jsou si rovny.

4.2 Funkční řady

Definice 4.4 : Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině M. Potom výraz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

se nazývá **nekonečná řada funkcí na množině** M. Funkce

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

se nazývá **n-tý částečný součet řady** a $\{s_n(x)\}$ je **posloupnost částečných součtů řady**.
Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)\,, \quad x \in M\,,$$

potom funkce $s(x)$, $x \in M$, se nazývá **součet řady** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Říkáme, že **řada konverguje** k funkci $s(x)$ a množina M se nazývá **obor konvergence řady** .
Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$, potom říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ **konverguje absolutně** .

Výraz

$$1+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},$$

je řadou funkcí $1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots$ definovaných na $\mathbb{R}$. Pro každé pevné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme číselnou řadu, která konverguje, neboť podle d'Alembertova kritéria je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \ (< 1)$.

Z absolutní konvergence řady plyne (neabsolutní) konvergence řady (viz věta 5.11, MA1).

Příklad 4.5: Řada

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots$$

je geometrickou řadou s kvocientem $q = \frac{1}{1+x^2} < 1\,,\ x \neq 0\,,$ a tedy konverguje pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$ (pro $x = 0$ je sice $q = 1$, ale řada se skládá ze samých nul). Její součet je

$$s(x) = \frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{1+x^2}} = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Tedy součet řady spojitých funkcí existuje, ale *není* to spojitá funkce.

K tomu, aby součet $s(x)$ řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, kde $f_n(x)$ jsou spojité funkce, byl spojitý, potřebujeme podle věty (4.1), aby posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}$ konvergovala k součtu $s(x)$ stejnoměrně.

Německý matematik Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

se významně podílel na budování teorie funkcí komplexní proměnné pomocí mocninných řad. Věřil, že matematika nesmí ztrácet kontakt s ostatními vědami a přispěl k rozvoji matematické fyziky, optiky a astronomie.

Věta 4.2 : (Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence řady funkcí)
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ je řada funkcí na množině M a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je číselná řada s nezápornými členy $b_n \geq 0$. Nechť dále platí

$$|f_n(x)| \leq b_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in M$$

a řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně a absolutně na M (tj. konverguje stejnoměrně na M také řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$).
Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ se nazývá **majoranta** řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Příklad 4.6: Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ konverguje podle vět (4.1) a (4.2) stejnoměrně ke spojité funkci, neboť její majoranta $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

4.3 Mocninné řady

Definice 4.5 : Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n , \quad x \in \mathbb{R},$$

se nazývá **mocninná řada se středem v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$.

Z věty (4.3) vyplývá, že existuje číslo $R \geq 0$ takové, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ konverguje absolutně pro x splňující nerovnost $|x - x_0| < R$ a diverguje pro x splňující nerovnost $|x - x_0| > R$.

Věta 4.3 :
1. Konverguje-li mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ v bodě $x_1 \neq x_0$, potom konverguje absolutně v každém bodě x otevřeného intervalu určeného nerovností
$$|x - x_0| < |x_1 - x_0| .$$
2. Diverguje-li mocninná řada v bodě x_2, potom diverguje v každém bodě x splňujícím nerovnost
$$|x - x_0| > |x_2 - x_0| .$$

Definice 4.6 : (Poloměr konvergence)
Číslo $R \geq 0$ s výše uvedenou vlastností se nazývá **poloměr konvergence** mocninné řady.
V případě, že mocninná řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, klademe $R = +\infty$.

O konvergenci či divergenci mocninné řady v krajních bodech $x_0 - R$ a $x_0 + R$ nelze obecně nic říci. V těchto bodech řada buď konverguje, nebo diverguje v závislosti na posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad 4.7: a) Máme řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Pro pevné $x \in \mathbb{R}$ zkoumáme absolutní konvergenci této řady pomocí podílového kritéria (věta 5.6 MA1). Protože

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \ (< 1)\,,$$

tak daná řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. $R = +\infty$.

b) Máme řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Nyní použijeme limitní odmocninové kritérium (věta 5.6 MA1). Protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = |x|\,,$$

tedy daná řada konverguje pro všechna x splňující $|x| < 1$, diverguje pro všechna x splňující $|x| > 1$ a poloměr konvergence $R = 1$.

V krajních bodech oboru konvergence musíme vyšetřit danou řadu samostatně. Pro $x = -1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro $x = 1$ dostaneme harmonickou řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje.

Výpočet poloměru konvergence mocninné řady

Z odmocninového (Cauchyova) kritéria lze odvodit pro poloměr konvergence vzorec:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Použijeme-li odmocninové kritérium, pak obecně chceme, aby platilo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0| < 1$.

Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, pak z podílového (d'Alembertova) kritéria dostaneme

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}\,.$$

Podobně z podílového kritéria plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x-x_0| < 1$.

Pro $x \in (-1,1)$ je $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Pro $n-$tý částečný součet této řady platí $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Potom $|s_n(x) - s(x)| = |\frac{-x^{n+1}}{1-x}|$ a $\sup\limits_{|x|<1} |\frac{-x^{n+1}}{1-x}| = +\infty$.

Odtud plyne, že řada $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$ nekonverguje stejnoměrně na intervalu $(-1,1)$.

Věta 4.4 : (Stejnoměrná konvergence mocninné řady) Nechť $R \in (0,\infty)$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ a $0 < \varepsilon < R$, potom mocninná řada konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $\langle x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon \rangle$.

Věta 4.5 : (o derivaci a integraci mocninné řady) Mocninné řady

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}[a_n(x-x_0)^n], \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_n (t-x_0)^n dt$$

mají stejný poloměr konvergence R jako řada

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

a platí $s'(x) = g(x)$, $F'(x) = s(x)$ pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Příklady analytických funkcí jsou $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

Každá mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu, *ale ne každá* Taylorova řada funkce f konverguje k funkci f. Například funkce $f(x) = |x|$ má v bodě $x_0 = 1$ všechny derivace a její Taylorova řada je $1(x-1)^0 + 1(x-1)^1 = x$, což není původní funkce (pro $x < 0$).

Úloha nalézt Taylorovu řadu funkce f se nazývá **rozvoj funkce f v mocninnou řadu**.

Důsledek 4.1: Mocninnou řadu lze uvnitř oboru konvergence derivovat a integrovat člen po členu, tj. derivace součtu se rovná součtu derivací a integrál součtu se rovná součtu integrálů.

Příklad 4.8: Pomocí předchozí věty (4.5) najdeme součet řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Jejím derivováním dostaneme geometrickou řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Zpětně po integrování platí $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|$ pro $x \in (-1,1)$.

Definice 4.7 : Nechť funkce $f = f(x)$ má derivace všech řádů v bodě x_0. Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n ,$$

se nazývá **Taylorova řada** funkce f. Jestliže se navíc součet Taylorovy řady rovná funkci f, pak se funkce f nazývá **analytická funkce** na oboru konvergence.

Taylorova metoda řešení počátečních úloh

Předpokládejme, že řešení $y(x)$ počáteční úlohy má v bodě x_0 derivace všech řádů. Řešení pak hledáme ve tvaru

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

a hodnoty $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dots$ určíme z diferenciální rovnice a z počátečních podmínek.

Mocninné řady se používají v teorii aproximací, při konstrukci primitivních funkcí, při řešení diferenciálních rovnic a velmi často v teorii funkcí komplexní proměnné.

Příklad 4.9: Řešíme počáteční úlohu

$$y'' = xy, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 3\,.$$

Z počátečních podmínek plyne

$$y(x) = 4 + 3(x - 0) + \frac{y''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \dots\,.$$

Z rovnice dostaneme postupným derivováním:

$$\begin{aligned}
&y''(x) = x\,y(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y''(0) = 0\,y(0) = 0\,, \\
&y'''(x) = y(x) + x\,y'(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y'''(0) = y(0) + 0\cdot y'(0) = 1\cdot 4\,, \\
&y^{IV}(x) = y'(x) + y'(x) + x\,y''(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{IV}(0) = 2y'(0) + 0\cdot y''(0) = 2\cdot 3\,, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&y^{(n)}(x) = (n-2)y^{(n-3)}(x) + x\,y^{(n-2)}(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{(n)}(0) = (n-2)y^{(n-3)}(0)\,.
\end{aligned}$$

Obecně

$$\begin{aligned}
&y^{(3n)}(0) = (3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1\cdot 4\,, \\
&y^{(3n+1)}(0) = (3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2\cdot 3\,, \\
&y^{(3n+2)}(0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do předpokládaného tvaru řešení dostaneme:

$$\begin{aligned}
y(x) &= 4 + 3x + \tfrac{4}{3!}x^3 + \tfrac{3}{4!}x^4 + \dots \\
&= 4 + 3x + \sum_{n=1}^{\infty} 4\tfrac{(3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!}x^{3n} + 3\tfrac{(3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2}{(3n+1)!}x^{3n+1}.
\end{aligned}$$

Poznámka 4.1: Aby výše uvedený formální postup byl oprávněný, musíme dokázat konvergenci vypočtené Taylorovy řady. To však může být daleko komplikovanější než celý předcházející výpočet.

Metoda neurčitých koeficientů
(pro řešení diferenciálních rovnic)

Tato metoda se používá ke stanovení fundamentálního systému lineární diferenciální rovnice. Předpokládáme, že řešení $y(x)$ je ve tvaru mocninné řady se středem v bodě 0, tedy

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots .$$

Formálním derivováním "člen po členu" dostáváme

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{atd.}$$

Po dosazení do rovnice a využití počátečních podmínek vypočítáme koeficienty a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$.

<u>*Příklad 4.10*</u>: Řešíme počáteční úlohu

$$y'' = xy\,, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,.$$

Po dosazení za $y(x), y''(x)$ obdržíme:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}] x^n + 2a_2 = 0\,.$$

Odtud plyne:

$2a_2 = 0\,,\quad a_3 = \frac{a_0}{3\cdot 2}\,,\quad a_4 = \frac{a_1}{4\cdot 3}\,,\quad a_5 = \frac{a_2}{5\cdot 4} = 0\,,$
$a_6 = \frac{a_3}{6\cdot 5} = \frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}\,,\quad a_7 = \frac{a_4}{7\cdot 6} = \frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}\,,\quad$ atd.

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\left(1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \dots + \frac{x^{3n}}{2.3.5.6\dots(3n-1)3n} + \dots\right) \\ &\quad + a_1\left(x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{3.4.6.7\dots 3n(3n+1)} + \dots\right). \end{aligned}$$

Z počátečních podmínek obdržíme

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 1.$$

Je možné ukázat, že výše uvedená mocninná řada má poloměr konvergence $R = +\infty$, tj. řešení počáteční úlohy je definováno na celém $\mathbb{R}$.

Obecné řešení rovnice $y'' = xy$ můžeme tedy psát ve tvaru $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, kde
$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \dots ,$
$y_2(x) = x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots .$
Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá řešení dané rovnice, která tvoří fundamentální systém.

4.4 Trigonometrické Fourierovy řady

Dosud jsme funkce hledali ve tvaru mocninné řady, vyjadřovali jsme je v "bázi polynomů" 1, x, x^2, $\ldots$. Nyní zavedeme novou "bázi trigonometrických funkcí" $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$

Definice 4.8 : (Fourierova řada podle základního systému)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle -\pi, \pi \rangle)$. **Trigonometrická řada**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

jejíž koeficienty jsou určeny vzorci

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi \, d\xi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin k\xi \, d\xi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

se nazývá **Fourierova řada funkce f podle (základního) trigonometrického systému** $\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \ldots\right\}$.
Koeficientům a_k, b_k určeným uvedenými vzorci se říká **Fourierovy koeficienty** funkce f a příslušné Fourierově řadě se také říká **Fourierův rozvoj** funkce f.

Poznámka 4.2: Chceme formálně vyjádřit funkci f ve tvaru $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Po vynásobení funkcí $\sin nx$ a integrování dostaneme $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin nx \, dx + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sin nx \, dx$.
Zároveň pro $k = n$ je $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 \, dx = \pi$, jinak ale platí $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = 0$ a $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx = 0$. Odtud plynou vztahy pro a_k, b_k.

Říkáme, že funkce $\cos kx$, $\sin nx$ jsou ortogonální.

Fourierovy řady (pokud konvergují) představují "analytické" vyjádření 2π-periodických funkcí získaných měřením periodických dějů (kmitů, signálů, apod.).

Příklad 4.11: Stanovíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$, $x \in \langle -\pi, \pi)$ podle *základního* trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Vypočteme koeficienty a_k, b_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi \cos k\xi \; d\xi = 0\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi \sin k\xi \; d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \xi \sin k\xi \; d\xi = (-1)^{k-1}\frac{2}{k},\; k = 1, \ldots\,.$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$f(x) \sim 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k} + \ldots\right]$$

Integrál liché funkce na symetrickém intervalu je nulový.

Integrál sudé funkce na symetrickém intervalu $\langle -a, a\rangle$ se rovná dvojnásobku daného integrálu na polovičním intervalu $\langle 0, a\rangle$.

Příklad 4.12: Vypočítáme Fourierovu řadu 2π-periodického prodloužení funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi)$ podle základního trigonometrického systému.

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \, d\xi = \tfrac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \cos k\xi \; d\xi = \tfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \xi^2 \cos k\xi \; d\xi = 4\,\tfrac{(-1)^k}{k^2}\,,$$

$$b_k = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \sin k\xi \; d\xi = 0\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ \ldots\right].$$

V příkladu 4.11 je $f(-\pi) = -\pi$, ale součet řady v bodě $-\pi$ je nula.

Protože periodické prodloužení funkce f je spojitá funkce a má po částech spojitou derivaci, platí podle věty (**??**) rovnost $s(\pi) = f(\pi) \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos\pi - \frac{\cos 2\pi}{2^2} + \frac{\cos 3\pi}{3^2} - \ldots\right] = \pi^2$. Tedy

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

V příkladu 4.11 je $f(\pi_+) = -\pi$, $f(\pi_-) = \pi$, tedy $\frac{f(-\pi_+)+f(-\pi_-)}{2} = 0$, což odpovídá součtu Fourierovy řady.

Cvičení 4.1: Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\pi \le x \le 0, \\ x\,, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

podle základního trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

[$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right) + \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right)$.]

5 Skalární funkce více reálných proměnných

5.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

Symbolem $\mathbb{R}^n$ označujeme **množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel**, tj. $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Množinu $\mathbb{R}^n$ chápeme buď jako množinu bodů, nebo jako **vektorový prostor**, pokud v této množině zavedeme algebraické operace splňující axiómy lineárního prostoru. Vektory značíme $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, čísla x_i, $i = 1, \ldots, n$ se nazývají **složky (souřadnice)** vektoru (bodu).

Definice 5.1 : Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, potom pomocí následujících vztahů definujeme

1. **skalární součin** vektorů $\vec{x}, \vec{y}$
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,$$
2. **normu vektoru** $\vec{x}$
$$\|\vec{x}\,\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\,,$$
3. **vzdálenost** bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ("délka vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ ")
$$\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,.$$

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin se nazývá **eukleidovský prostor**.
Pro skalární součin se také používá značení $(\vec{x}, \vec{y}\,)$.

Z uvedených definic bezprostředně plyne:

1. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

   a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$,

   b) $(\vec{x} + \vec{y}\,) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$,

   c) $(\alpha\vec{x}\,) \cdot \vec{y} = \alpha\vec{x} \cdot \vec{y}$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$,

   d) $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ pro $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Vektor $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ se nazývá **nulový vektor**.

2. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí:

   a) $\|\vec{x}\,\| > 0$ pro $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\|\vec{0}\,\| = 0$,

   b) $\|\alpha\vec{x}\,\| = |\alpha|\; \|\vec{x}\,\|$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$,

   c) $\|\vec{x} + \vec{y}\,\| \leq \|\vec{x}\,\| + \|\vec{y}\,\|$ (trojúhelníková nerovnost).

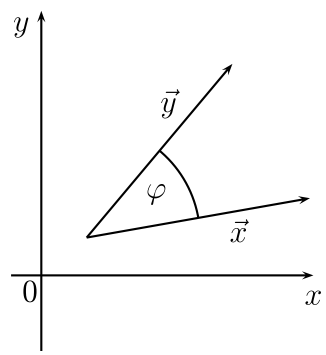
3. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ platí:

   a) $\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) \geq 0\,; \quad \rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = 0,$ právě když $\vec{x} = \vec{y},$

   b) $\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = \rho(\vec{y}, \vec{x}\,),$

   c) $\rho(\vec{x}, \vec{z}\,) \leq \rho(\vec{x}, \vec{y}\,) + \rho(\vec{y}, \vec{z}\,)\,.$

4. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost
$$|\vec{x} \cdot \vec{y}\,| \leq \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|$$
tj.
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$



5. Pro nenulové $\vec{x}, \vec{y}$ existuje číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, které se nazývá **úhlem vektorů** $\vec{x}, \vec{y}$, takové, že
$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|}\,,$$
neboť $|\vec{x} \cdot \vec{y}\,| \leq \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|} \leq 1$ a odtud vyplývá $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\| \cos\varphi$ pro jisté $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$.

   Cvičení 5.1: Dokažte ekvivalenci trojúhelníkové nerovnosti a Schwarzovy nerovnosti.

   [$\|\vec{x}\,\|^2 + 2\|\vec{x}\,\|\,\|\vec{y}\,\| + \|\vec{y}\,\|^2 = (\|\vec{x}\,\| + \|\vec{y}\,\|)^2 \geq \|\vec{x} + \vec{y}\,\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}\,) = (\vec{x}, \vec{x}\,) + (\vec{x}, \vec{y}\,) + (\vec{y}, \vec{x}\,) + (\vec{y}, \vec{y}\,) = \|\vec{x}\,\|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}\,) + \|\vec{y}\,\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{x}\,\|\,\|\vec{y}\,\| \geq |(\vec{x}, \vec{y}\,)|$.]

Z geometrického pohledu je okolí bodu vlastně koule, jejíž povrch je tvořen **sférou** $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$. Podobně nazýváme **kvádrem** množinu $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i;\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$.

Jestliže nadefinujeme otevřené množiny, potom hovoříme o topologii daného prostoru.

Definice 5.2 : (okolí, otevřená množina v $\mathbb{R}^n$)
Množinu $U(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$ nazveme **okolí bodu $\mathbf{x}_0$**.
Množinu $P(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$ nazveme **prstencové okolí bodu $\mathbf{x}_0$**.
Řekneme, že bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ je **vnitřním bodem** množiny Ω, jestliže existuje okolí $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ takové, že $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.
Množinu vnitřních bodů množiny Ω značíme $\mathrm{int}\Omega$ a nazýváme **vnitřkem** množiny Ω.
Množina Ω se nazývá **otevřená**, když $\Omega = \mathrm{int}\Omega$ (je tvořena pouze vnitřními body).
Množina Ω se nazývá **souvislá**, jestliže její libovolné dva body lze spojit křivkou a Ω je **oblast**, jestliže je otevřená a souvislá.

Definice 5.3 : (uzavřená množina)
Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **hromadný bod** množiny Ω, jestliže každé jeho prstencové okolí $P(\mathbf{x}_0)$ obsahuje alespoň jeden bod $\mathbf{x} \in \Omega$.
Takový bod množiny Ω, který není jejím hromadným bodem, se nazývá **izolovaný bod** množiny Ω.
Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je hraničním bodem Ω, když každé jeho okolí $U(\mathbf{x}_0)$ obsahuje jak body $\mathbf{x} \in \Omega$, tak body $\mathbf{y} \notin \Omega$.
Hranice množiny Ω je tvořena jejími hraničními body. Značíme ji $\partial\Omega$.
Uzávěr množiny Ω je množina $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.
Řekneme, že množina Ω je **uzavřená**, jestliže $\Omega = \overline{\Omega}$.
Řekneme, že množina Ω je **omezená**, jestliže
$\exists K \in \mathbb{R}\, \forall \mathbf{x} \in \Omega : \ \|\mathbf{x}\| < K$.

Okolí hromadného bodu obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny Ω.
Okolo izolovaného bodu existuje okolí, které celé neleží v Ω.
Část okolí hraničního bodu leží v množině, část vně množiny Ω.

Uzavřená množina se rovná svému uzávěru, obsahuje svou hranici.

Omezená množina leží v kouli o poloměru K.

Definice 5.4 : (posloupnost v $\mathbb{R}^n$)
Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ přiřazující každému $k \in \mathbb{N}$ bod (vektor) $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **posloupnost (bodů, vektorů)** v $\mathbb{R}^n$. Značíme $f = \{\mathbf{x}_k\}$.

Definice 5.5 : (konvergentní posloupnost)
Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ je **konvergentní** v $\mathbb{R}^n$, jestliže

$$\exists\, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : k > k_0 \ \Rightarrow\ \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon .$$

Píšeme $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, resp. $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$ pro $k \to +\infty$.

Protože máme eukleidovský vektorový prostor $\mathbb{R}^n$, hovoříme o konvergenci vzhledem k eukleidovské normě. Analogicky definujeme konvergenci vzhledem k jiné normě či jiné metrice.

Věta 5.1 : (konvergence po složkách)
Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}$ je konvergentní v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když posloupnosti všech složek $\{x_{ki}\}$ jsou konvergentní v $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{ki} \to x_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Důkaz: plyne ze vztahů

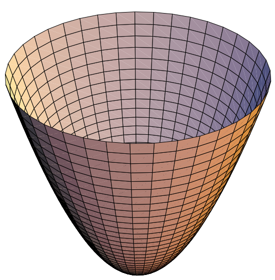
$$|x_{ki} - x_{0i}| \le \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{0i})^2} .$$

Poznamenejme, že uzavřená množina obsahuje limity všech konvergentních posloupností prvků této množiny, tj. platí: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená ($\Omega = \overline{\Omega}$) právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost prvků z Ω má limitu v Ω.

5.2 Základní vlastnosti funkcí v $\mathbb{R}^n$

Definičním oborem $D(f)$ funkce f je tedy množina Ω.

Definice 5.6 : (funkce n-proměnných)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{R}$ přiřazující každému **argumentu $\mathbf{x} \in \Omega$ funkční hodnotu** $f(\mathbf{x})$ se nazývá **reálná funkce n reálných proměnných** definovaná na Ω.
Značíme $f : \mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$, $f = f(\mathbf{x})$. ,
Množina
$$G = \{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in \Omega\}$$
se nazývá **graf funkce** f.
Množina
$$H_C = \{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) = C\}, \; C \in \mathbb{R},$$
se nazývá **hladina (vrstevnice) funkce** f. (Je to množina bodů definičního oboru, v nichž funkce f nabývá stejné funkční hodnoty).



Příklad 5.1: Grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je *paraboloid* a její hladiny jsou kružnice o poloměru $\sqrt{C}$.

Definice 5.7 : (limita funkce n-proměnných)
Nechť je dána funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathbf{x}_0$ je hromadný bod množiny Ω. Jestliže $\exists L \in \mathbb{R}$ takové, že

Jednotlivé podmínky v definici limity jsou ekvivalentní.
Také se nazývají Heineho, Cauchyho, popř. topologická definice limity.

1. $\forall \{\mathbf{x}_k\},\ \mathbf{x}_k \in \Omega,\ \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 : \ \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \ \Rightarrow \ f(\mathbf{x}_k) \to L$,
2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\, \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$,
3. $\forall\, U(L) \subset \mathbb{R}\ \exists\, P(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R} : \ f(\Omega \cap P(\mathbf{x}_0)) \subset U(L)$,

pak řekneme, že funkce f má v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu L (vlastní) a píšeme
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

Cvičení 5.2: Modifikujte Cauchyho definici limity pro
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \infty} f(\mathbf{x}) = L.$$

[$\forall K > 0\, \exists \delta(K) > 0\, \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) > K$,
$\forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ \|\mathbf{x}\| > K \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$,]

Příklad 5.2:

Vypočítáme limitu funkce $f(x,y) = x^3 - y^3$ v bodě $[1,2]$.

Nechť $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ jsou libovolné posloupnosti reálných čísel takové, že $x_k \to 1$ a $y_k \to 2$.

Pak $x_k^3 \to 1$, $y_k^3 \to 8 \Rightarrow f(x_k,y_k) = x_k^3 - y_k^3 \to 1 - 8 = -7$. Tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2])} (x^3 - y^3) = -7$.

Využíváme větu 4.6 z MA1 o algebře limit funkcí jedné reálné proměnné.

Příklad 5.3: Stanovme $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y}{x}$.

Zvolíme posloupnost $\{x_k, y_k\} = \{\frac{1}{k}, \frac{c}{k}\}$, $c \in \mathbb{R}$, pak dostaneme $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{c}{k}}{\frac{1}{k}} = c$. Vidíme, že daná funkce nemá v bodě $[0,0]$ limitu. (Číslo c můžeme volit libovolně, tedy neexistuje číslo L, ke kterému se blíží funkční hodnoty funkce f.)

Položíme-li $y = cx$, pak v limitě dostaneme $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y}{x} = c$. K limitnímu bodu se blížíme po přímkách. Pozor tato metoda je vhodná pouze k důkazu neexistence limity, nikoli její existence.

Věta 5.2 : (jednoznačnost limity, algebra limit)

1. Má-li funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu (vlastní), potom je tato limita jediná.

2. Existují-li $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_f$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L_g$, potom platí $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}) = L_f \pm L_g$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = L_f \cdot L_g$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L_f}{L_g}$, $L_g \neq 0$.

Definice 5.8 : (částečné limity, vícenásobné limity v $\mathbb{R}^2$) Mějme funkci $f = f(x,y)$ definovanou v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Existuje-li pro každé pevné y

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y),$$

nazývá se **částečná (parciální) limita** funkce f v proměnné x. Existuje-li

$$L_1 = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

nazývá se **dvojnásobnou limitou** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Analogicky definujeme pro pevné x

$$\psi(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad \text{a} \quad L_2 = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

<u>*Příklad 5.4*</u>: Pro funkci $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ najdeme dvojnásobné limity v bodě $[0,0]$.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Limitu funkce f budeme hledat "po přímkách" $y = kx$, potom

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{k^2x^2+x^2} = \frac{k}{k^2+1}\,,$$

tudíž hledaná limita neexistuje.

<u>*Příklad 5.5*</u>: Hledáme limity funkce f, kde

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0 & x=0,\ y=0\,, \end{array}\right.$$

v okolí bodu $[0,0]$.

Existence a rovnost dvojnásobných limit nezaručí existenci limity funkce v bodě a obráceně z existence limity nevyplývá existence dvojnásobných limit.
Přesto, jestliže existuje (dvojná) limita a "vnitřní limity", pak existují dvojnásobné limity.

Z odhadu $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|+|y|$ plyne $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)=0$, ale limity $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$ neexistují, tudíž neexistují ani dvojnásobné limity.

Věta 5.3 : (vztah dvojné limity a dvojnásobných limit)
Nechť funkce $f = f(x,y)$ je definovaná (aspoň) v prstencovém okolí $P([x_0,y_0])$ bodu $[x_0,y_0]$ a existuje limita

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Nechť dále existují částečné limity

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y), \quad [x_0,y]\in P([x_0,y_0]),$$

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x), \quad [x,y_0]\in P([x_0,y_0]).$$

Potom existují dvojnásobné limity

$$L_1 = \lim_{y\to y_0}\varphi(y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

$$L_2 = \lim_{x\to x_0}\psi(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

a platí $L_1 = L_2 = L$. (Tedy existence $L, \varphi(x), \psi(x)$ je postačující podmínkou pro existenci L_1, L_2 a jejich rovnost L.)

Definice 5.9 : (Spojitost)
Funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je **spojitá** v hromadném bodě $\mathbf{x}_0$ množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá na množině** Ω, je-li spojitá v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$. Bod $\mathbf{x}_0$ je **bodem nespojitosti** funkce, není-li v něm funkce f spojitá.

Funkce f je spojitá, když pro každou posloupnost $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$, posloupnost funkčních hodnot $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ konverguje k číslu $f(\mathbf{x}_0)$. V izolovaném bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se funkce f považuje za spojitou, je-li v tomto bodě definována.
Jestliže v bodě nespojitosti existuje vlastní limita funkce f, pak říkáme, že nespojitost je odstranitelná.

Věta 5.4 : (vlastnosti spojitých funkcí)

1. Součet, rozdíl, součin, podíl (s výjimkou nulových hodnot jmenovatele) spojitých funkcí je funkce spojitá.

2. Je-li f definovaná v nějakém okolí $\mathbf{x}_0$, spojitá v bodě $\mathbf{x}_0$ a $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, potom existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$, v němž
$$\operatorname{sgn} f(\mathbf{x}) = \operatorname{sgn} f(\mathbf{x}_0) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)\,.$$

3. (O mezihodnotě). Je-li f spojitá na souvislé množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a když pro $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ je $f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$, potom pro každé číslo $\overline{y}$ ležící mezi čísly $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)$ existuje aspoň jedno $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ takové, že $f(\mathbf{x}_0) = \overline{y}$.

4. (Weierstrass). Je-li funkce f spojitá na **kompaktní** (tzn. omezené a uzavřené) množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, potom je na Ω omezená a existují body $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M \in \Omega$ takové, že
$$f(\mathbf{x}_m) = \inf_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x})\ ; \quad f(\mathbf{x}_M) = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x})$$
(těmto číslům se říká minimum, resp. maximum funkce na množině Ω).

5. Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, potom je na Ω stejnoměrně spojitá, tj. pro každé dvě posloupnosti $\{\mathbf{x}_m\}\,, \{\mathbf{x}_k\}$ z Ω takové, že $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| \to 0$, platí $|f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_k)| \to 0\,$.

Porovnejte větu 5.4 s větou 6.6 z MA1.

<u>*Příklad 5.6*</u>:

1. Funkce $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ je spojitá v každém bodě $[x,y] \neq (0,0)$, ale v bodě $(0,0)$ spojitá není, a navíc nespojitost není odstranitelná.

2. Funkce $f(x,y) = \{ \begin{array}{ll} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x} & xy \neq 0\,, \\ 0 & xy = 0\,, \end{array}$

   je spojitá v bodě $[0,0]$, avšak v každém okolí tohoto bodu existují body nespojitosti (body souřadnicových os).

3. Funkce $f(x,y) = \{ \begin{array}{ll} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0\,, \\ 0 & x^2+y^2 = 0\,, \end{array}$

   je spojitá v bodě $[0,0]$, což dokážeme přechodem k polárním souřadnicím. Položíme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, potom
   $$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{r^3\cos\varphi(\sin\varphi)^2}{r^2} = 0\,.$$

Při přechodu k polárním souřadnicím platí následující ekvivalence $[x,y] \to [0,0] \Leftrightarrow \|[x,y]-[0,0]\| \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \to 0 \Leftrightarrow r \to 0_+$. Pomocí tohoto přechodu lze tedy dokázat existence limity funkce.

5.3 Derivace a diferenciál

Definice 5.10 : (derivace podle vektoru, parciální derivace)
Mějme funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a existuje okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.
Je dán (pevný) vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s})|_{t=0} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}\,,$$

pak se nazývá **derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle vektoru $\vec{\mathbf{s}}$** (nebo také **variace funkce** f v bodě $\mathbf{x}_0$) ,
je-li $\vec{s}$ jednotkový vektor, tj. $\|\vec{s}\| = 1$, pak se tato limita nazývá **derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ ve směru $\vec{\mathbf{s}}$.**
Jestliže $\vec{s} = \vec{e}_i$ (jednotkový vektor ve směru osy x_i), potom

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$$

a hovoříme o **parciální derivaci funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle** x_i a o funkci f říkáme, že je **derivovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$ podle proměnné** x_i.

Příklad 5.7: Uvažujeme funkci $f(x,y) = xy^2$, vektor $\vec{s} = (s_1, s_2) = (1,2)$ a bod $[x_0, y_0] = [1,1]$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{s}} &= \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_0+ts_1, y_0+ts_2)-f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{(1+t)(1+t\cdot 2)^2-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1+4t+4t^2+t+4t^2+4t^3-1}{t} = 5\,, \\
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}_1} = \tfrac{\partial f(1,1)}{\partial x} &= \lim_{t\to 0} \tfrac{f(1+t\cdot 1, 1+t\cdot 0)-f(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{(1+t)(1+t\cdot 0)^2-1}{t} = 1\,, \\
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}_2} = \tfrac{\partial f(1,1)}{\partial y} &= \lim_{t\to 0} \tfrac{f(1+t\cdot 0, 1+t\cdot 1)-f(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{(1+t\cdot 0)(1+t\cdot 1)^2-1}{t} = 2\,.
\end{aligned}$$

Z definice (5.9) pro funkci dvou proměnných plyne

$$\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}\,, \qquad \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}\,.$$

Obecně platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0i}+t\,,\ x_{0i+1}, \ldots, x_{0n}) - f(x_{01}, \ldots, x_{0n})}{t}\,.$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že parciální derivace počítáme derivováním podle příslušné proměnné (ostatní proměnné se chovají jako konstanty). Například

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = y^2\,, \qquad \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy\,.$$

Geometrický význam derivace ve směru

Máme funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}$, vnitřní bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, vektor $\vec{s}$ s jednotkovou normou $\|\vec{s}\| = 1$ a úsečku $p : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\vec{s}$, $t \in I$, $I = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, $p \subset \Omega$.

Položíme $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s})$, potom graf funkce $g : I \to \mathbb{R}$ je dán průnikem grafu funkce f a roviny ϱ, která obsahuje úsečku p a je kolmá k rovině-xy.

Platí

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+t\vec{s})-f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}\,.$$

Hodnota derivace funkce f ve směru $\vec{s}$ je tudíž rovna směrnici tečny $\tau \in \varrho$ ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$. Tato směrnice se rovná tangens úhlu tečny τ a přímky p (prodloužení úsečky p).

Definice 5.11 : (diference, totální diferenciál)
Je dán vnitřní bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pro libovolné $\mathbf{x} \in \Omega$ označíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ $(= \Delta\mathbf{x} = d\mathbf{x}\,,\ h_i = dx_i)$ nazveme **diferencí argumentu**.

1. Funkci proměnné $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$
$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$
nazveme **diferencí funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ vzhledem k $\vec{\mathbf{h}}$** (tzv. **totální diference**).

2. Funkce f se nazývá **diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$**, existuje-li okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$, vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots A_n)$, a funkce $\omega(\vec{h})$ (proměnné $\vec{h}$) splňující podmínku
$$\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$
tak, že $\forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ platí
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \vec{A} \cdot \vec{h} + \omega(\vec{h})\,.$$
Funkce f je **diferencovatelná na** Ω, je-li diferencovatelná v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

3. U diferencovatelné funkce se lineární forma $\vec{A} \cdot \vec{h}$ nazývá **(totálním) diferenciálem** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ a značí se
$$df = df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{A} \cdot \vec{h}\,, \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n$$
a vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ se nazývá **totální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$** nebo také **gradient** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$. Užívá se označení
$$\vec{A} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0)\,.$$
Diferenciál pak zapisujeme ve tvaru
$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} = f'(\mathbf{x}_0)\, d\mathbf{x}\,.$$

Pro funkci $f(x,y) = x^2 + 3y$ je $\vec{h} = (x - x_0, y - y_0)$ a $\Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = x^2 - x_0^2 + 3y - 3y_0 = (x + x_0)(x - x_0) + 3(y - y_0) = (2x_0 + x - x_0)(x - x_0) + 3(y - y_0) = (2x_0, 3)(x - x_0, y - y_0) + (x - x_0)^2$.
Tedy $\vec{A} = \operatorname{grad} f = (2x_0, 3)$ a $\omega(\vec{h}) = (x - x_0)^2$, neboť $\lim\limits_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{(x-x_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$.

Diferenciál df se rovná skalárnímu součinu gradientu $\operatorname{grad} f$ a diference argumentu $\vec{h}$.

<u>*Příklad 5.8*</u>: Určíme diferenciál funkce $f(x,y) = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$. Platí
$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) =$$
$$(x_0 + h_1)(y_0 + h_2)^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 h_1 + 2x_0 y_0 h_2 + 2y_0 h_1 h_2 + x_0 h_2^2 + h_1 h_2^2.$$

Odtud $A_1 = y_0^2$, $A_2 = 2x_0y_0$, $\omega(\vec{h}) = 2y_0h_1h_2 + x_0h_2^2 + h_1h_2^2$.

Zbývá dokázat $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, tedy $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{2y_0h_1h_2+x_0h_2^2+h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$

$$\left[\begin{array}{l} h_1 = r\cos\varphi \\ h_2 = r\sin\varphi \end{array}\right] = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{2y_0r^2\cos\varphi\sin\varphi + x_0r^2\sin^2\varphi + r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r} = 0.$$

Diferenciál funkce $f = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ má tvar $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = (y_0^2, 2x_0y_0)\cdot\vec{h} = y_0^2h_1 + 2x_0y_0h_2$.

5.4 Vlastnosti diferencovatelných funkcí

Věta 5.5 : (vlastnosti diferencovatelné funkce)
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, potom

1. je v bodě $\mathbf{x}_0$ spojitá,
2. existuje v bodě $\mathbf{x}_0$ derivace funkce f podle libovolného vektoru $\vec{s}$ (tedy existují i všechny parciální derivace) a platí
$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{s},$$
3. pokud v $\mathbb{R}^n$ uvažujeme kartézský souřadnicový systém a za bázi volíme jednotkové vektory ve směru os systému, pak
$$A_i = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, \quad \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}_0}.$$

Pro funkci $f(x,y) = xy^2$, bod $[x_0, y_0] = [1,1]$ a směr $\vec{s} = (1,2)$ z příkladu (5.7) máme $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = (y_0^2, 2x_0y_0)\cdot\vec{s} = (1,2)\cdot(1,2) = 5$.

Důsledek 5.1: věty (5.5) Diferenciál funkce f v bodě $\mathbf{x}$ (v kartézském souřadnicovém vyjádření) můžeme psát ve tvaru

$$df(\mathbf{x}, \vec{h}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}dx_n, \quad \vec{h} = d\mathbf{x}.$$

Například diferenciál funkce $f(x,y) = xy^2$ má tvar

$$df(\mathbf{x}, (dx, dy)) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}dx + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}dy = y^2\,dx + 2xy\,dy.$$

Příklad 5.9: Uvedeme funkci, která má v bodě $[0,0]$ parciální derivace, ale není v tomto bodě spojitá :

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & xy = 0. \\ 1 & xy \neq 0. \end{array}\right.$$

Potom $\lim\limits_{[x,y]\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje, avšak existují limity

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{f(0+h_1,0)-f(0,0)}{h_1} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0\,,$$

$$\lim_{h_2\to 0} \frac{f(0,0+h_2)-f(0,0)}{h_2} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0\,.$$

<u>*Příklad 5.10*</u>: Funkce, která má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, ale je v bodě $[0,0]$ nespojitá:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2>0\,, \\ 0 & x^2+y^2=0\,. \end{cases}$$

Podobně jako v předcházejícím příkladě z definice vypočteme $f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\,,\ f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,;$ avšak $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ neexistuje, neboť $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}\,.$

<u>*Příklad 5.11*</u>: Funkce, která má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, je spojitá v $\mathbb{R}^2$ (viz příklad (5.6),3.), ale není diferencovatelná v bodě $[0,0]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2>0\,, \\ 0 & x^2+y^2=0\,. \end{cases}$$

Potom platí

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = f_x(0,0) = 0\,, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = f_y(0,0) = 0$$

(na osách je funkce f nulová).
Pokud by funkce f byla diferencovatelná v počátku, pak pro vektor $\vec{h}$ s dostatečně malou normou musí platit

$f([0,0]+(h_1,h_2)) - f(0,0) = 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2 + \frac{h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \omega(\vec{h})$

a $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0\,.$

Avšak limita $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim\limits_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}$ neexistuje, tedy funkce f není diferencovatelná v počátku.

Věta 5.6 : (algebra diferenciálu a gradientu)
Nechť funkce f, g jsou diferencovatelné na množině Ω a pro body $\mathbf{x} \in \Omega$ označíme $df = df(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathrm{grad} f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$, $dg = dg(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathrm{grad} g(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$, potom na Ω platí

$$\begin{aligned} &d(cf) = c\,df\,, && \mathrm{grad}(cf) = c\,\mathrm{grad} f\,,\\ &d(f \pm g) = df \pm dg\,, && \mathrm{grad}(f \pm g) = \mathrm{grad} f \pm \mathrm{grad} g\,,\\ &d(fg) = g\,df + f dg\,, && \mathrm{grad}(fg) = g\,\mathrm{grad} f + f \mathrm{grad} g\,,\\ &d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f dg}{g^2}\,, && \mathrm{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\mathrm{grad} f - f \mathrm{grad} g}{g^2}\,, \quad g(\mathbf{x}) \neq 0\,. \end{aligned}$$

Důkaz: Je podobný jako u funkcí jedné proměnné. (MA1, věta 7.3)

Věta 5.7 : (diferenciál a derivace složené funkce)
Nechť funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ jsou diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$ a funkce $f(u, v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Potom složená funkce $f(u(x, y), v(x, y))$ je diferencovatelná v $[x_0, y_0]$ a platí (v bodě $[x_0, y_0]$)

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)\\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy\,. \end{aligned}$$

Celou větu (5.7) lze formulovat a dokázat pro složenou funkci $f(\vec{u}(\mathbf{x})) = f(u_1, \ldots, u_m)$. Potom
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,.$$

Také hovoříme o "řetězovém pravidlu".

Příklad 5.12: Funkce $u(x, y) = -2xy$, $v(x, y) = x + y$ jsou diferencovatelné na $\mathbb{R}^2$ a funkce $f(u, v) = u + v^2$ je také diferencovatelná na $\mathbb{R}^2$.

Pro diferenciál složené funkce $f(u(x, y), v(x, y))$ tedy na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\begin{aligned} df &= 1\,du + 2v\,dv\\ &= 1\,[(-2y)\,dx - 2x\,dy] + 2(x + y)(dx + dy)\\ &= 2x\,dx + 2y\,dy\,. \end{aligned}$$

Zároveň $f(u(x, y), v(x, y)) = -2xy + (x + y)^2 = x^2 + y^2$, tedy $df = 2x\,dx + 2y\,dy$.

Příklad 5.13: (derivace paraboloidu podél kružnice)

Nechť $f(x,y) = x^2+y^2$ a $x(r,t) = r\cos t\,,\ y(r,t) = r\sin t\,.$

Potom $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{dt} = 2x(-r\sin t) + 2y(r\cos t) = 2r^2(-\cos t\sin t + \sin t\cos t) = 0\,.$

Při přechodu k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi$ má jednotkový vektor ve "směru r" tvar $\vec{\tilde e}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ a pro jednotkový vektor ve "směru φ" platí $\vec{\tilde e}_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi)\,.$

Matice přechodu M od báze $\vec e_1, \vec e_2$ k bázi $\vec{\tilde e}_1, \vec{\tilde e}_2$ má tedy tvar $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$

Nyní vyjádříme gradient funkce $f = f(x,y)$ v novém souřadném systému, tedy

$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,\ \frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right).$

Zároveň z diferenciálu složené funkce plyne $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$ a $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\varphi.$

Porovnáním dostaneme pro gradient funkce f v polárních souřadnicích

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right).$$

Věta 5.8 : (vlastnosti gradientu)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}$.

i) Položíme-li $\vec z = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$, tedy $\|\vec z\| = 1$, potom platí $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec z} = \max\limits_{\|\vec s\|=1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec s}$, $\vec s$ je libovolný vektor (změna funkce ve směru gradientu je největší).

ii) Vektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) (\neq \vec o)$ je kolmý k tečné varietě (přímka, rovina, ...) hladiny $H = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ v bodě $\mathbf{x}_0$.

Důkaz:

i) Z věty (5.5) plyne $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec s} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec s$. Z Cauchy – Schwarzovy nerovnosti dostaneme pro $\|\vec s\| = 1$ vztah

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec s} \le \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \cdot \|\vec s\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|\,.$$

Zároveň pro vektor $\vec z$ platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec z}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|} = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|\,.$$

Odtud plyne první tvrzení věty.

ii) Pro jednoduchost volíme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Hladinu $H = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = C)\}$ popíšeme parametricky $x = x(t), y = y(t)$. Tedy $f(x(t), y(t)) = C$. Funkci f budeme nyní derivovat podle proměnné t (podél hladiny H). Potom platí

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \operatorname{grad} f \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right) = 0\,.$$

Odtud je vidět, že tečný vektor $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ k hladině je kolmý ke $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

<u>*Příklad 5.14*</u>: Máme k funkci $f(x,y)=x^3-y^2$, bodu $B=[1,2]$ a vektoru $\vec{v}=(3,4)$ určit směr největšího růstu v bodě B a derivaci podle vektoru $\vec{v}$.

Směr největšího růstu funkce f v bodě B je dán vektorem $\mathrm{grad} f(1,2)=(3x^2\,,\,-2y)_{[1,2]}=(3,-4)$.

Pro derivace podle vektoru $\vec{v}$ platí

$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \vec{v}}=\mathrm{grad} f(1,2)\cdot\vec{v}=(3,-4)\cdot(3,4)=0\,.$

Vidíme, že vektor $\vec{v}=(3,4)$ je tečný vektor k hladině

$H=\{[x,y]:x^3-y^2=-3\}$ v bodě $B=[1,2]\,.$

Definice 5.12 : (tečné lineární variety)
Graf lineární funkce $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dané předpisem

$$u(\mathbf{x})=\vec{a}\cdot\mathbf{x}+d=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+d\,,\quad \text{kde } \vec{a}\in\mathbb{R}^n,\ d\in\mathbb{R}\,.$$

se nazývá **nadrovina** v $\mathbb{R}^{n+1}$ a prochází-li bodem $[\mathbf{x}_0,u_0]$, pak lze vyjádřit pomocí rovnice

$$u-u_0=\vec{a}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=a_1(x_1-x_{01})+\cdots+a_n(x_n-x_{0n})\,.$$

Nechť funkce $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)\neq\vec{o}$, potom

1. **tečná nadrovina k hladině** $H=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n: f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)\}$ funkce f procházející bodem $\mathbf{x}_0$ má rovnici
$$\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=0\,.$$

2. **tečná nadrovina ke grafu funkce** $u=f(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ v bodě grafu $[\mathbf{x}_0,u_0]\in\mathbb{R}^{n+1}$, kde $u_0=f(\mathbf{x}_0)$, je dána rovnicí
$$u-u_0=\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\,.$$

Libovolný vektor $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ tečné nadroviny k hladině je kolmý k vektoru $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)$.

Pro $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má tečná nadrovina k hladině (tj. přímka) tvar $f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)=0$ a tečná nadrovina ke grafu funkce (tj. rovina) má tvar $u-u_0=f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)$.

<u>*Poznámka 5.1*</u>: Graf funkce $u=f(\mathbf{x})$ je vlastně nulovou hladinou funkce $g(\mathbf{x},u)=f(\mathbf{x})-u=0$.
Tečná nadrovina k hladině funkce g v bodě $[\mathbf{x}_0,u_0]$ má tedy tvar $\mathrm{grad} g(\mathbf{x}_0)\cdot([\mathbf{x},u]-[\mathbf{x}_0,u_0])=0$ a odtud dostaneme $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)-1(u-u_0)=0$.

<u>*Příklad 5.15*</u>: Je dána funkce $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Hladiny této funkce jsou kulové plochy, které leží v $\mathbb{R}^3$; graf

funkce f leží v $\mathbb{R}^4$. Hladina procházející bodem $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = u_0\,, \quad u_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\,.$

Tečná rovina k této hladině v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici

$$a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0) = 0\,, \quad \vec{a} = \operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)\,,$$

tj.

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0\,.$$

Tečná nadrovina ke grafu této funkce leží v $\mathbb{R}^4$ a má rovnici

$$u - u_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0)\,.$$

Cvičení 5.3: Ke grafu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v $\mathbb{R}^2$ určete rovnici tečné roviny (v $\mathbb{R}^3$) v bodě $B = [1, 2, ?]$. [$B = [1, 2, f(1, 2)] = [1, 2, 5]$, $\operatorname{grad} f(1, 2) = (2x, 2y)_{[1,2]} = (2, 4) \Rightarrow$ tečná rovina je $u - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$.]

Definice 5.13 : (směr růstu, poklesu)
Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $(\|\vec{s}\| = 1)$ se nazývá **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, jestliže

$$\exists\, \delta > 0 : \ f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) > (<) f(\mathbf{x}_0), \quad \forall\, t \in (0, \delta)\,,$$

tj. ve směru $\vec{s}$ se hodnota funkce f zvětšuje (zmenšuje).

Věta 5.9 : (směr růstu, poklesu diferencovatelné funkce)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, je **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, jestliže

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} > 0 \qquad (\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} < 0)\,.$$

(Tedy vektory $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ a $\vec{s}$ svírají ostrý (tupý) úhel.)

Příklad 5.16: Určete, zda vektor $\vec{s} = (1, 3)$ je směrem růstu(poklesu) funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $B = [1, 1]$. Protože $\operatorname{grad} f(1, 1) \cdot \vec{s} = (2, 2) \cdot (1, 3) = 8 > 0$, tak vektor $\vec{s}$ je směrem růstu funkce f v bodě B .

Reference

[1] Čížek, Kubr, Míková: Sbírka příkladů z matematické analýzy I., skripta ZČU Plzeň 1997

[2] Čížek, Kubr, Míková: Seminář z matematické analýzy I., skripta ZČU Plzeň 1995

[3] Drábek, Míka: Matematická analýza I., skripta ZČU Plzeň 1996

[4] Schwabik, Šarmanová: Malý průvodce historií integrálu, Prometheus, Praha 1996