Příklady pro praktickou část

1. Řešte úlohu:

$$(x+1)y' = 1 - y\,.$$

(a) Stanovte obecné řešení a nakreslete systém integrálních čar.

(b) Řešte počáteční úlohu pro danou rovnici s podmínkou $y(0) = 5$.

(c) Napište rovnici systému ortogonálních křivek a vyřešte ji.

2. Je dán integrál $\int\int_\Omega (xy)\, dxdy$,
kde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 2x;\ y \ge 0\}\,.$

(a) Vypočtěte daný integrál substitucí do polárních souřadnic.

(b) Převeďte daný integrál na oba dvojnásobné integrály.

(c) Určete a zdůvodněte hodnotu obou dvojnásobných integrálů z bodu b).

æ

3. Je dána funkce $f = f(x,y)$ předpisem $f(x,y) = \dfrac{1}{\operatorname{arctan} \frac{x}{y}}$ a bod $M = [\sqrt{3}, 1]$.

(a) Stanovte diferenciál funkce f v bodě M.

(b) Stanovte derivaci funkce f v bodě M ve směru vektoru $\vec{v} = (-1, \sqrt{2})^T$.

(c) Stanovte směr a velikost největšího spádu funkce f v bodě $Q = [-1, 1]$.

(d) Stanovte vektor normály a tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě $T = [-1, 1, ?]$.

(e) Stanovte tečnu k hladině funkce f procházející bodem Q.

4. Je dána soustava diferenciálních rovnic $\begin{array}{l} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{array}$.

(a) Stanovte fundamentální systém a fundamentální matici této soustavy.

(b) Stanovte řešení počáteční úlohy s podmínkami $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$.

5. Je dána funkce f předpisem $f(x,y) = 3x^2y + 4y^3 - 6x - 15y$.

(a) Stanovte stacionární body funkce f,

(b) Podle Hessovy matice rozhodněte, ve kterých stacionárních bodech nastává extrém a jaký.

6. Je dána funkce f předpisem: $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$

(a) Stanovte Fourierovu řadu funkce f.

(b) Stanovte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(c) Nakreslete graf součtu $s(x)$ Fourierovy řady a vypočtěte $s(0)$, $s(\pi)$.

7. Je dána řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n$.

(a) Určete obor konvergence M této řady.

(b) Spočtěte $\int_0^x \frac{f(t)}{t}\, dt$ pro $x \in \operatorname{int} M$.

(c) Určete $f(x)$ (sečtěte danou řadu).

Otázky pro teoretickou část

1. Buď $M \subset \mathbb{R}$ omezená množina.

V_1: $f_n \rightrightarrows f$ na M.

V_2: $f_n \to f$ na M.

Který z následujících výroků je pravdivý?

a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.

Případnou pravdivost implikace dokažte. Eventuální nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.

2. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ je mocninná řada.

V_1: Uvedená řada diverguje pro $x = 5$.

V_2: Poloměr konvergence této řady je $R = 1$.

Který z následujících výroků je pravdivý?

a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.

Případnou pravdivost implikace dokažte. Eventuální nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.

3.

V_1: $M \subset \mathbb{R}^2$ je nekonečná množina.

V_2: $(\mathcal{R}) \iint_M 1\, dxdy > 0$.

Který z následujících výroků je pravdivý?

a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.

Případnou pravdivost implikace dokažte, nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.

4. Je dána funkce $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, otevřená.

V_1 : Funkce f má v bodě $x_0 \in \Omega$ totální diferenciál.

V_2 : Funkce f má v bodě x_0 všechny parciální derivace.

Který z následujících výroků je pravdivý?

a) $V_1 \Rightarrow V_2$; b) $V_2 \Rightarrow V_1$; c) $V_1 \Leftrightarrow V_2$.

Případnou pravdivost implikace dokažte. Eventuální nepravdivost implikace ilustrujte na příkladu.

5. Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\sin\frac{1}{x^2+y^2} \qquad \forall\,[x,y] \neq 0\,,\ f(0,0) = 0\,.$$

(a) Rozhodněte, zda funkce f je spojitá v bodě $X_0 = [0,0]$.

(b) Zjistěte, zda existuje totální diferenciál funkce f v bodě X_0 .

(c) Rozhodněte, zda funkce $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v bodě X_0 .