1. (omezenost, monotónie posloupností)

   Vypočtěte prvních pět členů daných posloupností a rozhodněte o jejich omezenosti a monotónnosti.

   (a) $a_n = (-1)^{n-1}(3 - \frac{2}{n+1})$

   (b) $a_n = (-1)^{n-2}\frac{n+2}{n}$

   (c) $a_n = \frac{n}{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$

   (d) $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{n\sqrt{n^2+1}}$

   (e) $a_n = \frac{4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n+3)}{4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}$

   (f) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{2\cdot n! + (n-1)!}{(n+1)!}$

   (g) $a_n = \frac{4^n}{\sqrt{n+2}\cdot 3^n}$

   (h) $a_n = \frac{2^{n+1}}{n\cdot 3^n}$

   (i) $a_n = \frac{2^n}{(3+(-1)^n)^n}$

   (j) $a_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$

   (k) $a_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+3}$

   (l) $a_n = \frac{\ln n}{n}$.

2. (limity posloupností)

   Stanovte $\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$, $\max\{a_n\}$, $\min\{a_n\}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ daných posloupností.

   (a) $a_n = n+3$

   (b) $a_n = \frac{4}{3n+1}$

   (c) $a_n = (-1)^{n-1}(3 - \frac{2}{n+1})$

   (d) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}$

   (e) $a_n = \frac{5n^2+3}{-n^2+2}$

   (f) $a_n = \frac{3n^3+8}{2n^2+5n+9}$

   (g) $a_n = \frac{-n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

   (h) $a_n = \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}$

   (i) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

   (j) $a_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$

   (k) $a_n = \frac{n}{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$

   (l) $a_n = \frac{5^n}{3^n}$

   (m) $a_n = \frac{2^n}{2+3^n}$

   (n) $a_n = \frac{n}{3^n}$

   (o) $a_n = \frac{n+2}{\ln(n+1)}$

   (p) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

   (q) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n!}{n^{n-1}}$

   (r) $a_n = \frac{2^{n+1}}{n\cdot 3^n}$

   (s) $a_n = \frac{(n+2)^n}{n^n}$

   (t) $a_n = \frac{(n-3)^n}{n^n}$

   (u) $a_n = \sqrt[n]{4}$

   (v) $a_n = \sqrt[n]{n+1}$.

3. (řady funkcí) Rozhodněte o konvergenci těchto řad

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+3+3^2+\cdots+3^n)\cdot 4^{-n}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n^3+n}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n(n+1)}$

   (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^{\frac{3}{2}}}$

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n-1}{4^n}$.

   (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$, určete součet této řady. (Návod: $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.)

   (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n}{4n^2-1}$, určete součet této řady. (Návod: $\frac{4n}{4n^2-1} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}$.)

4. (základní vlastnosti funkcí) Najděte definiční obor, rozhodněte o sudosti, lichosti, omezenosti funkce f.

(a) $f(x) = \sin(x + \pi)$
(b) $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$
(c) $f(x) = \operatorname{tg}(-x)$
(d) $f(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$
(e) $f(x) = |x^2 - 2x + 1|$
(f) $f(x) = 1 + |x^3 - 1|$
(g) $f(x) = e^{-|x|}$
(h) $f(x) = \ln|x|$
(i) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
(j) $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$
(k) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \arccos x$
(l) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}$
(m) $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$
(n) $f(x) = \frac{1}{|x|^3}$.

5. (limity funkcí) Spočítejte následující limity.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}$
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^3)}{6x}$
(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
(e) $\lim_{x\to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$
(f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x}$
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{-x^2}$
(h) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 + 2}$
(i) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$
(j) $\lim_{x\to\infty} \left(-1 + \frac{1}{2x}\right)^{x}$
(k) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^4)}{6x}$
(l) $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot x}{x + 4}$
(m) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x - 1}}{x - 2}$
(n) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3^x}{2^x + e^x}$.

6. (nespojitost) Stanovte body a druh nespojitosti funkcí.

(a) $f(x) = \operatorname{sign} x$
(b) $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$
(c) $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$
(d) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$
(e) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}$
(f) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$
(g) $f(x) = \frac{x}{|x|}$
(h) $f(x) = \frac{2^x - 1}{4^x - 1}$
(i) $f(x) = \frac{x}{\ln|2x|}$
(j) $f(x) = \ln|x - 3|$

(derivace) Spočítejte derivace následujících funkcí.

(a) $f(x) = \arccos(3x + 2)$
(b) $f(x) = 3^{-4x}$
(c) $f(x) = 1 - |x^2 - 2|$
(d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
(e) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2x}$
(f) $f(x) = \cos \frac{x}{x + 1} \cdot \operatorname{tg} 3x$
(g) $f(x) = (3x)^{\operatorname{cotg} x}$
(h) $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|$
(i) $f(x) = \operatorname{argtgh} \sqrt{x}$
(j) $f(x) = \arcsin \sqrt[3]{1 - x^2}$
(k) $f(x) = \frac{1}{|x|^3} \cdot \sin x$

(Taylorův rozvoj) Spočítejte Taylorův polynom T_2 v bodě $x_0 = 0$ a určete zbytek Taylorova polynomu následujících funkcí.

(a) $f(x) = \arccos x$
(b) $f(x) = \sin x$
(c) $f(x) = \cos x$
(d) $f(x) = \ln(1 + x)$
(e) $f(x) = \operatorname{arctg} x$
(f) $f(x) = \ln(1 - x)$
(g) $f(x) = e^{2x}$
(h) $f(x) = \operatorname{cotg} x$
(i) $f(x) = \sqrt{1 + x}$
(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$
(k) $f(x) = \frac{1}{1 + x}$

7. (monotónnost) Stanovte oblasti monotónnosti, stacionární body a extrémy funkce f.

(a) $f(x) = 2 + x - x^2$
(b) $f(x) = 3 - x^3$
(c) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$
(d) $f(x) = xe^{-x}$
(e) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$
(f) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2} - \ln(1+x)$, $x > -1$
(g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
(h) $f(x) = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$
(i) $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$
(j) $f(x) = x + \ln(1+x^2)$
(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
(l) $f(x) = (x-2)e^{|x|}$

8. (křivost)

Určete intervaly konvexnosti, konkávnosti, inflexní tečny a asymptoty funkce f.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$
(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$
(c) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{3x^3}$
(d) $f(x) = x\ e^x$
(e) $f(x) = (x-3)\cdot e^{|x|}$
(f) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$
(g) $f(x) = |x|\cdot e^x$
(h) $f(x) = \ln x - \dfrac{x^3}{3}$
(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$
(j) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$
(k) $f(x) = e^x \cdot |x|^3$
(l) $f(x) = (x+2)^4 \cdot (x-1)$
(m) $f(x) = (1-x^2)^3$
(n) $f(x) = (x-3)^2 \cdot \mathrm{e}^{-|x|}$
(o) $f(x) = (x-2)\cdot e^{|x|}$

9. (Základní primitivní funkce)

Najděte primitivní funkci k funkci f.

(a) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
(b) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$
(c) $f(x) = \dfrac{4}{3+3x^2}$
(d) $f(x) = \dfrac{-5}{2-2x^2}$
(e) $f(x) = \dfrac{1}{3+2x+x^2}$
(f) $f(x) = \dfrac{x^3-5x^2+4x+3}{x^2-5x+6}$
(g) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$
(h) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+12x-15}{x^3-2x^2+5x}$
(i) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2(x-1)}$
(j) $f(x) = \dfrac{-1}{\cos^2 3x}$
(k) $f(x) = e^{2x} + \dfrac{-3}{2^x}$
(l) $f(x) = \dfrac{6}{-3\sinh^2 x}$
(m) $f(x) = \dfrac{1}{3\cosh^2(5x+1)}$
(n) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2-1}}$
(o) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{x^2+4}}$

10. (Primitivní funkce)

Najděte primitivní funkci k funkci f.

(a) $f(x) = x\sin x$
(b) $f(x) = x^2\cos x$
(c) $f(x) = \arcsin x$
(d) $f(x) = \arccos 2x$
(e) $f(x) = x\operatorname{arctg} x$
(f) $f(x) = |\ln x|$
(g) $f(x) = xe^{-x}$
(h) $f(x) = \cos x \sin x$
(i) $f(x) = \cos 3x \cos 2x$
(j) $f(x) = \sin(-3x)\sin 5x$
(k) $f(x) = \dfrac{-3}{\cos 4x}$
(l) $f(x) = \cos^2 x$
(m) $f(x) = \sin^3 2x$
(n) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$
(o) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x + 3}$

11. (určitý integrál) Vypočítejte

(a) $\int_0^1 x(2-x)^{12}\,dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$

(c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

(d) $\int_1^e x\ln x\,dx$

(e) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

(f) $\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}\,dx$

(g) $\int_0^\pi \frac{1}{3+2\sin x}\,dx$

(h) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

(i) $\int_1^e \ln\sqrt{x}\,dx$

(j) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx$

12. (nevlastní integrály) Vypočítejte

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

(c) $\int_0^\infty \operatorname{arctg} x\,dx$

(d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

(e) $\int_{-4}^4 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$

(f) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

(g) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+4x^2}$

(h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

(j) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx$

(k) $\int_0^\infty \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

(l) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx\,.$