Obsah

1 Derivace

V 17.století se matematici pokoušeli vyřešit tzv. ”Problém tečny”- nalezení tečny ke grafu funkce a ”Problém plochy”- spočítat obsah plochy pod grafem funkce. Na úspěšném vyřešení těchto problémů se nezávisle na sobě podíleli Isaac Newton (1643-1727)

a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Další rozvoj v této oblasti vedl k získání velkého množství matematických poznatků, které nazýváme ”kalkulus”.

Příklad 1.1: Máme auto, jehož ujetá dráha je popsána funkcí $s(t)$. Chceme-li spočítat jeho průměrnou rychlost $\overline{v}$ v časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$, pak $\overline{v} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

Rozdíl $\Delta t = t - t_0$ se nazývá **diference argumentu**, rozdíl $\Delta s(t_0, \Delta t) = s(t) - s(t_0)$ se nazývá **diference funkce** s v bodě t_0 a podíl $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ se nazývá **poměrná diference funkce** s v bodě t_0.

K výpočtu okamžité rychlosti v_0 auta v čase t_0 potřebujeme

znát hodnotu limity $v_0 = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

Definice 1.1 : (derivace) Nechť funkce f je definována na okolí bodu $U(x_0)$. Jestliže existuje limita

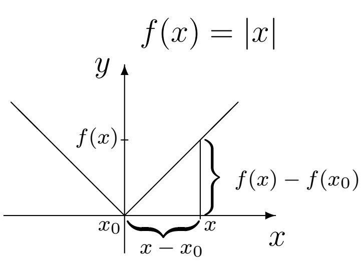
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad (= f'|_{x_0}),$$

pak se nazývá **derivace** funkce f v bodě x_0. (Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, pak hovoříme o **nevlastní derivaci**.)

Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$, pak se nazývá **derivace zprava**.

Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$, pak se nazývá **derivace zleva** funkce f v bodě x_0.

Funkce $f'\colon x \to f'(x)$, $x \in I$ se nazývá **derivace funkce** f na množině I.



Příklad 1.2: Vypočítáme derivaci funkce $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Dostaneme $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0} = nx_0^{n-1} \Rightarrow \boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$.

Definice 1.2 : Nechť k funkci $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ existují konstanta A a funkce $\omega : U(x_0) \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall\, x \in U(x_0)$:

$$f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \omega(x - x_0) \ \wedge \ \lim_{x \to x_0} \frac{\omega(x-x_0)}{x-x_0} = 0\,,$$

pak řekneme, že funkce f je **diferencovatelná** v bodě x_0 . Položíme $h = x - x_0$. Funkce

$$df(x_0, h) = A \cdot h$$

se nazývá **diferenciál** funkce f v bodě x_0.

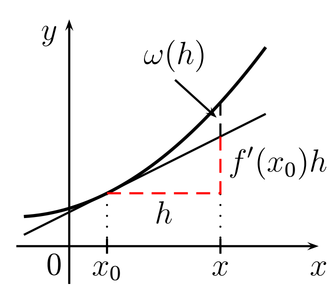
Věta 1.1 : Funkce f má derivaci v bodě x_0 (je derivovatelná v x_0) právě tehdy, když je diferencovatelná v bodě x_0 . Navíc platí

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h\,.$$

<u>*Poznámka 1.1*</u> :

1. Pro funkci $f(x) = x$ je $f(x) - f(x_0) = 1(x - x_0) + 0 = h$. Tedy $f'(x) = 1$ a $df(x_0, h) = dx(x_0, h) = h$, proto se pro diferenciál funkce f v bodě x_0 zavádí značení

$$\boxed{df(x_0, h) = f'(x_0)\, dx}\,.$$



2. Diferenciál funkce f určuje hlavní (lineární) změnu funkce f v bodě x_0 a používá se pro výpočet přibližných hodnot dané funkce na okolí bodu x_0 pomocí vztahu $f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

   Například pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a body $x = 4{,}1$, $x_0 = 4$ dostaneme $\sqrt{4{,}1} \doteq \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (4{,}1 - 4) = 2{,}025$.

3. Rovnice **tečny ke grafu funkce** f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

4. Pokud $f'(x_0) \neq 0$, pak rovnice **normály ke grafu funkce** f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

Věta 1.2 : (algebra derivací)
Nechť existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, pak platí:

i) $(a\,f \pm b\,g)'(x_0) = a\,f'(x_0) \pm b\,g'(x_0)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,,$

ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)\,,$

iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,, \quad g(x_0) \neq 0\,.$

$((2x+1)\cos x\, e^x)' = 2\cos x\, e^x + (2x+1)(\cos x\, e^x)' = 2\cos x\, e^x + (2x+1)(-\sin x)\, e^x + (2x+1)\cos x\, e^x\,.$

$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$

$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}\,.$

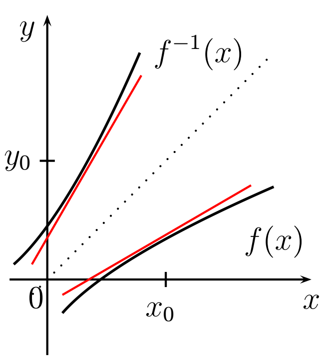
Věta 1.3 : (Derivace složené a inverzní funkce)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 , $y_0 = f(x_0)$ a funkce g je diferencovatelná v bodě y_0 , potom i složená funkce $g(f(x))$ je diferencovatelná v bodě x_0 a platí

$$(g(f(x)))'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)\,.$$

Nechť $f'(x_0) \neq 0$, pak pro derivaci inverzní funkce f^{-1} v bodě $y_0 = f(x_0)$ platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$$

Derivace inverzní funkce



Příklad 1.3:

1. $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (y = x \ln a) = (e^y)' \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a \Rightarrow \boxed{(a^x)' = a^x\, \ln a\,.}$

2. $(\operatorname{arctg} y)'(y_0) = \frac{1}{(\tan x)'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x_0)}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x_0)+\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)}} = = \frac{1}{1+\tan^2(x_0)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y_0))} = \frac{1}{1+(y_0)^2} \Rightarrow$

$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,.}$

Například $1 = (x)' = (e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)' \Rightarrow$

$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}\,.$

Tabulka 1: Přehled derivací základních funkcí

$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x \in (0, \infty)$
$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$
$(x^n)' = n\, x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, \infty)$
$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2 Integrály

2.1 Neurčité integrály

Už víme, že derivace $s'(t)$ funkce $s(t)$ popisující ujetou vzdálenost auta v závislosti na čase t udává jeho rychlost $v(t)$. V této kapitole budeme řešit opačný problém. K dané rychlosti budeme hledat ujetou vzdálenost.

Nechť G, F jsou primitivní funkce k funkci f na množině M, pak $\forall\, x \in M$ platí: $(G-F)'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Odtud vyplývá, že existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $G(x) - F(x) = C$.

Definice 2.1 : Funkce F se nazývá **primitivní funkce** k funkci f na množině M, jestliže $\forall\, x \in M :\ F'(x) = f(x)$.

Definice 2.2 : Množina všech primitivních funkcí k funkci f se nazývá **neurčitý integrál** funkce f a značí se

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Konstanta C se nazývá integrační konstanta.

Znak integrálu

$$\int f(x)\,dx$$

Integrand

Integrální proměnná

Příklad 2.1:

1. Funkce $s(t)$ popisující dráhu auta je primitivní funkcí k funkci $v(t)$ popisující rychlost auta.
2. Funkce $x^3 + 2$, $x^3 - 23$ jsou primitivní k funkci $3x^2$ na $\mathbb{R}$ a pro neurčitý integrál k funkci $3x^2$ platí $\int 3x^2\,dx = x^3 + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$

Úloha najít primitivní funkci je obrácená k úloze nalézt derivaci dané funkce. Z linearity operace derivování (věta (1.2) i)) plyne i linearita neurčitého integrálu.

Věta 2.1 : Nechť funkce f, g mají primitivní funkce na intervalu I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\int [\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \pm \beta \int g(x)\,dx\,.$$

Příklad 2.2: $\int 3\,e^x - 2\,\sin x\,dx = 3\int e^x\,dx - 2\int \sin x\,dx = 3\,e^x + 2\cos x + C\,.$

Ze znalosti derivací základních funkcí lze odvodit následující primitivní funkce.

Tabulka 2: Základní primitivní funkce

$\int e^x\,dx = e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln \mid x \mid + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \neq -1,\ x \in (0, \infty)$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\operatorname{cotgh} x + C$	$x \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{argsinh} x + C = \ln \lvert x + \sqrt{1+x^2} \rvert + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{argcosh} \lvert x \rvert + C = \ln \lvert x + \sqrt{x^2-1} \rvert + C$	$\lvert x \rvert \in (1, \infty)$
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{argtgh} x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{argcotgh} x + C$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Ze vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí (věta (1.2) ii)) plyne následující věta.

Věta 2.2 : (integrace per partes)
Nechť funkce u, v jsou derivovatelné na intervalu I a existuje primitivní funkce k součinu $u \cdot v'$ na I, pak na I platí

$$\int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx\,.$$

Podobně počítáme integrály funkcí $x^n \cos kx\,,\quad x^n \sin kx\,,\quad x^n e^{kx}\,,\quad k, n \in \mathbb{N}\,.$

Podobně počítáme integrály funkcí $\arcsin ax\,,\quad \arccos ax\,,\quad \mathrm{arctg}\, ax\,,\quad a \in \mathbb{R}$ ap.

<u>*Příklad 2.3*</u>:

1) Vypočtěte integrál $\int x \cos x\, dx\,.$

$\int x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u' = \cos x & v = x \\ u = \sin x & v' = 1 \end{bmatrix} = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C\,.$

2) Vypočtěte integrál $\int \log_a x\, dx\,.$

$\int \log_a x\, dx = \begin{bmatrix} u' = 1 & v = \log_a x \\ u = x & v' = \frac{1}{x \ln a} \end{bmatrix} = x \log_a x - \int \frac{x}{x \ln a}\, dx = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C\,.$

3) Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx\,.$

Obecně označíme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx\,,\quad n \in \mathbb{N}$ a pomocí metody "per partes"dostaneme

$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \begin{bmatrix} u' = 1 & v = \frac{1}{(1+x^2)^n} \\ u = x & v' = \frac{-n\, 2x}{(1+x^2)^{n+1}} \end{bmatrix} = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int \frac{x(-n\, 2x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\, (\int \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\, (I_n - I_{n+1})\,.$

Odtud vyplývá $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1) I_n\right).$

Nyní vypočítáme $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx =\ (n = 1)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{(1+x^2)^1} + (2-1) \int \frac{1}{1+x^2}\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right) + C\,.$

Věta 2.3 : (integrace substitucí)
Nechť $f\colon D(f)\to H(f)$, $g\colon D(g)\to H(g)$ a $H(f)\subset D(g)$. Jestliže funkce f je derivovatelná na $D(f)$ a existuje primitivní funkce G k funkci g na $D(g)$, potom na $D(f)$ platí

$$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,dx=\int g(y)\,dy=G(f(x))+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Typickými integrály, které lze spočítat pomocí věty o substituci jsou

$$\int \operatorname{tg} x\,dx\,;\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx\,;$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,;$$

$$\int \frac{\operatorname{argsinh} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \text{ap.}$$

Příklad 2.4: Větu 2.3 je vhodné použít v příkladech, kdy se v integrálu vyskytuje funkce f a její diferenciál $f'\,dx$, pak provedeme substituci za funkci f.

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx=\int \tfrac{\cos x}{\sin x}\,dx=\begin{pmatrix} y=\sin x\\ dy=\cos x\,dx\end{pmatrix}=\int \tfrac{1}{y}\,dx=\ln|y|+C=\ln|\sin x|+C\,.$$

Obráceně je někdy výhodné proměnnou x nahradit funkcí $x(t)$. V tomto případě však musíme mít zaručenou existenci inverzní funkce $x^{-1}(t)$.

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\begin{pmatrix} x=\cos t & t\in(0,\pi)\\ dx=-\sin t\,dt & t=\arccos x\end{pmatrix}=$$

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}(-\sin t)\,dt=\int -\tfrac{\sin t}{|\sin t|}\,dt=\begin{pmatrix} \text{pro } t\in(0,\pi)\\ \text{je } \sin t>0\end{pmatrix}=\int -1\,dt=-t+C=-\arccos x+C\,.$$

Integrály typu $\int \mathbf{R(x)\,dx}$

Racionální lomené funkce mají tvar

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy.

Nejdříve budeme integrovat základní racionální funkce typu

1. $\int \frac{A}{x-x_1}\,dx\,,$ kde $A,\ x_1\in\mathbb{R}\,.$

   $$\int \tfrac{-3}{x-4}\,dx=\begin{pmatrix} u=x-4\\ du=dx\end{pmatrix}=-3\int \tfrac{1}{u}\,du=-3\ln|x-4|+C\,.$$

2. $\int \frac{A}{(x-x_1)^k}\,dx\,,$ kde $A,\ x_1\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\,.$

   $$\int \tfrac{2}{(1-x)^3}\,dx=\begin{pmatrix} u=1-x\\ du=-dx\end{pmatrix}=2\int \tfrac{1}{u^3}\,(-du)=-2\,\tfrac{u^{-2}}{-2}=\tfrac{1}{(1-x)^2}+C\,.$$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx\,,$ kde $A\,,\ B\,,\ p\,,\ q\in\mathbb{R}$ a jmenovatel zlomku má komplexní kořeny.

   $$\int \tfrac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx=\int \tfrac{2x+2-1}{x^2+2x+2}\,dx=\begin{pmatrix} u=x^2+2x+2\\ du=(2x+2)dx\end{pmatrix}=$$

$\int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \begin{pmatrix} v = x+1 \\ dv = dx \end{pmatrix} = \ln|u| + C - \int \frac{1}{v^2+1}\,dv =$ $\ln|x^2+2x+2| - \operatorname{arctg}(x+1) + C\,.$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx\,,$ kde A, B, p, $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ a jmenovatel zlomku má komplexní kořeny.

$\int \frac{6x-3}{(x^2+4)^2}\,dx = 3\int \frac{2x-1}{(x^2+4)^2}\,dx = \begin{pmatrix} u = x^2+4 \\ du = 2x\,dx \end{pmatrix} =$

$3\int \frac{1}{u^2}\,du - 3\int \frac{1}{16\left((\frac{x}{2})^2+1\right)^2}\,dx = \begin{pmatrix} v = \frac{x}{2} \\ 2dv = dx \end{pmatrix} =$

$3\,\frac{u^{-1}}{-1} + C - \frac{3}{8}\int \frac{1}{(v^2+1)^2}\,dv =$ (viz příklad (2.1) 3) $= -3\frac{1}{x^2+4} -$ $\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v^2+1} + \operatorname{arctg} v\right)\right) + C = \frac{-3}{x^2+4} - \frac{3}{16}\left(\frac{2x}{x^2+4} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + C\,.$

Rozklad na parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky je inverzní operace k operaci hledání společného jmenovatele.

V případě, kdy stupeň $P(x) \geq$ stupeň $Q(x)$, nejdříve vydělíme polynom $P(x)$ polynomem $Q(x)$ a pak přejdeme k parciálním zlomkům.

Z algebry víme, že polynom $Q(x)$ lze rozložit na součin polynomů nejvýše druhého stupně. Tedy

$$Q(x) = \prod_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (x-x_i)^{k_i}(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}\,,\ k_i, r_j \in \mathbb{N},\ p_j, q_j \in \mathbb{R}\,.$$

Racionální lomenou funkci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň $P(x) <$ stupeň $Q(x)$ rozložíme na součet základních racionálních funkcí:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{1_i}}{x-x_i} + \frac{A_{2_i}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^{k_i}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{1_j}x+C_{1_j}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_{2_j}x+C_{2_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{B_{r_j}x+C_{r_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}}$$

a jednotlivé zlomky integrujeme zvlášť, například:

$$\int \frac{2x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx$$
$$= \int \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\,dx =$$
$$-\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + C\,.$$

Konstanty A, B, C, D vypočítáme z rovnosti

$$2x+2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2\,.$$

Pro $x = 1$ je $4 = B\,2 \Rightarrow B = 2\,.$
Pro $x = i$ je $2i+2 = (Ci+D)(i-1)^2 \Rightarrow 2i+2 = 2C - 2iD \Rightarrow$ $C = 1\,, D = -1\,.$
Pro $x = 0$ je $2 = A(-1) + 2 - 1 \Rightarrow A = -1\,.$

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ Řešíme přechodem k racionálním lomeným funkcím pomocí následujících substitucí.

Základní vztahy pro goniometrické funkce
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

1. Pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak $t = \cos x$.

   Pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak $t = \sin x$.

   $\int \sin x \cos^2 x\,dx = \left(\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array} \right) = \int -t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$.

   $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \left(\begin{array}{ll} t = \sin x & t \in \langle -1, 1 \rangle \\ dt = \cos x\,dx & \end{array} \right) = \int \frac{1}{\cos x}\frac{dt}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \operatorname{argtgh} t + C = \operatorname{argtgh}(\sin x) + C$.

2. Pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak $t = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ a platí

   $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

   $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$
   $\Rightarrow t^2 \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$
   $\Rightarrow \cos^2 x (t^2+1) = 1 \Rightarrow$
   $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

   $\int \frac{1}{\sin^2 x + 1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+1}\,dt = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2+1+t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{(\sqrt{2}t)^2+1}\,dt = \left(\begin{array}{l} u = \sqrt{2}\,t \\ du = \sqrt{2}\,dt \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$

   V některých speciálních případech je vhodné použít základní vztahy pro goniometrické funkce.

   $\int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\operatorname{cotg}^2 x\,dx = \left(\begin{array}{l} u = \operatorname{cotg} x \\ du = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx \end{array} \right) = -\operatorname{cotg} x - \int u^2\,du = -\operatorname{cotg} x - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + C.$

   Metoda snižování stupně.

   $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int [1+\cos 2x]\,dx$

   $= \left(\begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2\,dx \end{array} \right) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\int \cos u\,du) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

3. V obecném případě používáme univerzální substituci

   $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Potom

   $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

   $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$

   $\left(\begin{array}{l} u = t + \frac{1}{2} \\ du = dt \end{array} \right) = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{du}{\frac{3}{4}\left((\frac{2}{\sqrt{3}}u)^2+1\right)} = \left(\begin{array}{l} v = \frac{2}{\sqrt{3}}u \\ dv = \frac{2}{\sqrt{3}}\,du \end{array} \right) =$

   $\frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dv}{v^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} v + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}) + C$.

2.2 Určité integrály

Pro jednoduchost si nyní představíme, že rychlost našeho auta je konstantní $v(t) = c$. Ujetá dráha auta $s(t)$ v čase t od počátku měření v čase t_0 je pak dána vztahem $s(t)-s(t_0) = c\cdot(t-t_0)$. Rozdíl $s(t) - s(t_0)$ se zároveň rovná ploše pod grafem funkce v na intervalu $\langle t_0, t\rangle$. Připomeňme, že funkce $s(t)$ je primitivní k funkci $v(t)$. Platí, že i v obecnějším případě lze primitivní funkci využít k výpočtu plochy pod grafem funkce.

Definice 2.3 : Nechť k funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ existuje primitivní funkce $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace). Pak rozdíl $F(b) - F(a)$ nazýváme **Newtonovým určitým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a píšeme

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Uvedený vztah se nazývá Newtonova-Leibnizova formule a také píšeme $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f$.

Číslo a se nazývá **dolní mez**, číslo b se nazývá **horní mez** Newtonova integrálu.
Množinu všech funkcí, které mají Newtonův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ značíme $\mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$.

Věta 2.4 : (vlastnosti Newtonova integrálu)

1) Newtonův integrál nezávisí na volbě primitivní funkce.

2) Nechť $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$, $c \in \langle a, b\rangle$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

3) Nechť $f, g \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak platí

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(Tedy množina $\mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ je lineární prostor.)

<u>*Příklad 2.5*</u>:

$$\int_0^2 2x\,dx = [x^2 + C]_0^2 = [x^2]_0^2 = 4\,.$$

$$\int_0^\pi [3\cos x\; - \;2\sin x]\,dx = 3\int_0^\pi \cos x\,dx \; + \; 2\int_\pi^0 \sin x\,dx =$$

$$3\,[\sin x]_0^\pi + 2\,[-\cos x]_\pi^0 = 3\,(0-0) - 2\,(1-(-1)) = -4\,.$$

Následující dvě věty vyplývají z vět (2.2) a (2.3).

Věta 2.5 : (per partes v Newtonově integrálu)
Nechť funkce u, v jsou derivovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$ (v krajních bodech zprava, popř. zleva) a $u\cdot v' \in \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$, potom také $u'\cdot v \in \mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx\,.$$

Příklad 2.6: Vypočtěte integrál $\int\limits_0^1 e^x \sin x\,dx$.

Metodu per partes použijeme dvakrát.

$$\int_0^1 e^x\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u'=e^x & v=\sin x\\ u=e^x & v'=\cos x\end{bmatrix} = [e^x\sin x]_0^1 -$$

$$\int_0^1 e^x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u'=e^x & v=\cos x\\ u=e^x & v'=-\sin x\end{bmatrix} = [e^x\sin x]_0^1 -$$

$[e^x\cos x]_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\sin x\,dx\,.$ Odtud vyplývá

$$\int_0^1 e^x\sin x\,dx = \tfrac{1}{2}[e^x(\sin x-\cos x)]_0^1 = \tfrac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\tfrac{1}{2}\,.$$

Produkce plynu
Ze zkušeností víme, že nový vrt produkuje asi $f(t) = 0.2\,t\,e^{-0.02t}$ milionů kubických metrů plynu za t měsíců. Pokud chceme odhadnout celkovou produkci $P(t)$ vrtu za jeden rok, pak musíme spočítat integrál

$$P(t) = \int_0^{12} 0.2\,t\,e^{-0.02t}\,dt\,.$$

Pomocí metody per partes dostaneme

$$\int_0^{12} 0.2\,t\,e^{-0.02t}\,dt = 10\Big(-[t\,e^{-0.02t}]_0^{12} + \int_0^{12} e^{-0.02t}\,dt\Big) \doteq 12\,.$$

Věta 2.6 : (substituce v Newtonově integrálu)
Nechť $f\colon D(f)\to H(f)$, $g\colon D(g)\to H(g)$ a $H(f)\subset D(g)$. Jestliže funkce f je derivovatelná na $D(f)$ a existuje primitivní funkce G k funkci g na $D(g)$, potom pro $\langle a,b\rangle\subset D(f)$ platí

$$\int_a^b g(f(x))\cdot f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy = G(f(b)) - G(f(a))\,.$$

Příklad 2.7:

1) $$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{pmatrix} x=\sin t & -1=\sin a\Rightarrow a=-\frac{\pi}{2}\\ dx=\cos t\,dt & 0=\sin b\Rightarrow b=0\end{pmatrix}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{|\cos t|}\,dt = \begin{pmatrix} \text{pro } t\in(-\frac{\pi}{2},0)\\ \text{je } \cos t>0\end{pmatrix} =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 1\,dt = [t]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{pmatrix} y=\ln x\\ dy=\frac{1}{x}\,dx\end{pmatrix} = \int_{\ln 1}^{\ln e} y\,dy = \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

Definice 2.4 : (nevlastní integrál vlivem meze)
Nechť funkce $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ pro každé $b > a$. Nechť existuje limita $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, pak se nazývá **nevlastní Newtonův integrál vlivem meze** a píšeme

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Značíme $f \in \mathcal{N}(\langle a, \infty))$ a říkáme, že nevlastní integrál konverguje; v opačném případě diverguje.
Analogicky $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ a definujeme $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^\infty f(x)\,dx\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$

Integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x \quad dx$ neexistuje, někdy je proto vhodné pracovat s hlavní hodnotou nevlastního integrálu, která je definována vztahem

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx\,.$$

(v.p. je z francouzského *valeur principale*).

<u>*Příklad 2.8*</u>:

1) $\int\limits_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b x^\alpha\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} [\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - 1)] =$

$$\begin{cases} \infty & \alpha > -1 \text{ diverguje} \\ \frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \text{ konverguje.} \end{cases}$$

2) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} [\ln|x|]_1^b = [\ln x]_1^\infty = \infty$ diverguje.

Podobně pro nevlastní integrál vlivem funkce definujme hlavní hodnotu vztahem

$$v.p. \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+} \left(\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx + \int_{b+\delta}^{c} f(x)\,dx \right).$$

Definice 2.5 : (nevlastní integrál vlivem funkce)
Nechť $\forall\, t \in (a, b)$ je funkce $f \in \mathcal{N}(\langle a, t\rangle)$ a $f \notin \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$.
Nechť existuje limita $\lim\limits_{t\to b-} \int\limits_a^t f(x)\,dx$, pak se nazývá **nevlastní Newtonův integrál vlivem funkce** a píšeme

$$\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Značíme $f \in \mathcal{N}(\langle a, b))$ a říkáme, že nevlastní integrál konverguje, v opačném případě diverguje.
Analogicky $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to a+} \int\limits_t^b f(x)\,dx\,.$

<u>*Příklad 2.9*</u>:

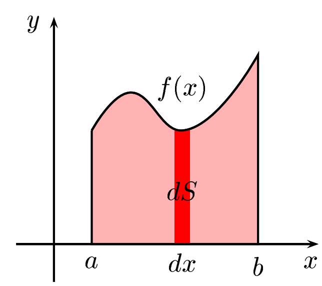
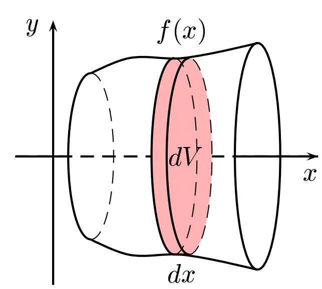
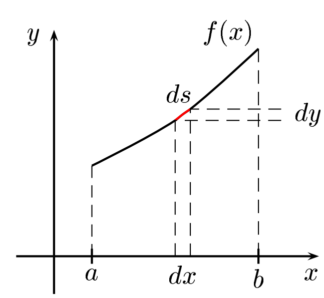
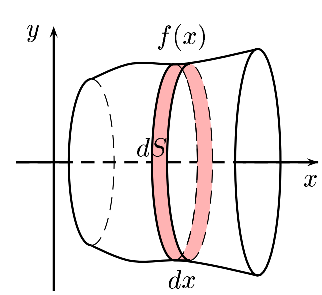
1) $$\int\limits_0^1 x^\alpha \, dx = \lim_{t \to 0+} \int\limits_t^1 x^\alpha \, dx = \lim_{t \to 0+} [\tfrac{1}{\alpha+1}(1 - t^{\alpha+1})] =$$

$$\begin{cases} \infty & \alpha < -1 \ \text{ diverguje} \\ \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \ \text{ konverguje.} \end{cases}$$

2) $$\int\limits_0^1 \tfrac{1}{x} \, dx = \lim_{t \to 0+} [\,\ln|x|\,]_t^1 = [\ln x]_0^1 = \infty \quad \text{diverguje.}$$

2.3 Aplikace v geometrii a fyzice

Při zavedení Riemannova integrálu jsme sčítali "nekonečně mnoho nekonečně malých ploch - tzv. elementů"a dostali jsme vlastně obsah plochy "pod grafem funkce f". Tento postup lze použít i při výpočtu objemu těles, délek křivek, vykonané práce ap.

Popis	Vztah	Obrázek
Plocha pod grafem funkce Plocha S je ohraničena grafem funkce f, přímkami $x=a$, $x=b$ a osou x.	$S=\int_a^b f(x)\,dx$ Element plochy $dS=f(x)\,dx$	
Objem rotačního tělesa Objem V tělesa vzniklého rotací plochy pod grafem funkce f kolem osy x.	$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$ Element objemu $dV=\pi f^2(x)\,dx$	
Délka křivky Délka s křivky určené grafem funkce f.	$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ Element délky $ds \doteq \sqrt{(dx)^2+(df)^2} = \sqrt{(dx)^2+f'(x)^2(dx)^2} = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$	
Povrch rotačního tělesa Velikost S plochy vzniklé rotací grafu funkce f kolem osy x.	$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ Element povrchu $dS \doteq 2\pi f(x)\,ds = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$	

3 Posloupnosti a řady funkcí

Motivace Při řešení počáteční úlohy

$$y'(x) = y(x)\,, \qquad y(0) = 1$$

můžeme formálním derivováním dostat

$$y''(x) = y'(x)\,, \cdots, y^{(n+1)}(x) = y^{(n)}(x)\,, \cdots \Rightarrow y^{(n)}(0) = 1\,.$$

Taylorův rozvoj funkce y v bodě 0 tedy bude mít tvar

$$y(x) = y(0) + y'(0)(x-0) + \cdots \frac{y^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Rovnici $y' = y$ řeší exponenciální funkce e^x, jejíž Taylorův rozvoj je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Řešení úlohy jsme dostali ve tvaru tzv. mocninné řady, kterou budeme zkoumat v této kapitole.

3.1 Posloupnosti funkcí

Definice 3.1 : Předpokládejme, že funkce $f_1, f_2, f_3, \ldots$ jsou definovány na množině $M \subset \mathbb{R}$. Potom zobrazení $F : n \to f_n\,,\ n \in \mathbb{N}$ se nazývá **posloupnost funkcí na množině** M. Značíme $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, zkráceně $\{f_n\}$.

Př. $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $M = \mathbb{R}$.

Definice 3.2 : Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje v bodě** $x_0 \in M$, když číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje bodově na množině** M, když pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje. Množinu M pak nazýváme **oborem bodové konvergence** a na M je definována funkce $f = f(x)$ vztahem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, \quad x \in M\,.$$

Funkce f se nazývá **bodová limitní funkce** posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$, značíme $f_n \to f$.

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je **omezená na množině** M, existuje-li konstanta $K > 0$ taková, že pro všechna $x \in M$ a pro všechna $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$|f_n(x)| \le K\,.$$

Posloupnost $f_n(x) = \cos nx$ je omezená na množině $M = \mathbb{R}$ konstantou $K \ge 1$.

Příklad 3.1: Posloupnost $f_n(x) = \frac{x}{n}$ konverguje bodově k funkci $f = 0$ na množině $M = \mathbb{R}$.

Posloupnost $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $M = \langle 0, 1\rangle$ má bodovou limitu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1)\,, \\ 1 & x = 1\,. \end{cases}$$

Poslední příklad ilustruje situaci, kdy posloupnost funkcí spojitých konverguje bodově k funkci nespojité.
Proto bodovou konvergenci "vylepšíme".

Pokud posloupnost konverguje stejnoměrně, pak zřejmě konverguje i bodově.

Uvedeme ekvivalentní definice konvergence posloupnosti funkcí.

Bodová konvergence na M: $\forall\, x \in M\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon, x)\ \forall\, n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

Stejnoměrná konvergence na M: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)\, \forall\, x \in M\, \forall\, n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Definice 3.3 : Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **konverguje stejnoměrně na množině** M k funkci $f = f(x)$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$. Funkci f nazýváme **stejnoměrnou limitou**.

<u>*Příklad 3.2*</u>: (pokračování příkladu (3.1))

Posloupnost $\{x^n\}$ na $\langle 0, 1\rangle$ nekonverguje stejnoměrně. Platí totiž

$$\sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |x^n - f(x)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Zvolíme-li $\delta \in (0, 1)$, potom na intervalu $\langle\, 0, \delta\,\rangle$ posloupnost $\{x^n\}$ konverguje stejnoměrně, neboť pro $x \in \langle 0, \delta\rangle$ je $f(x) = 0$ a

$$\sup_{x\in\langle 0,\delta\rangle} |x^n| = \delta^n \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty\,.$$

Zároveň platí $\lim\limits_{x\to 1_-} x^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = 0\,.$

Jinými slovy:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1_-} x^n(x) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1\,.$$

$$\lim_{x\to 1_-} \lim_{n\to\infty} x^n(x) = \lim_{x\to 1_-} 0 = 0\,.$$

Vidíme, že limity nelze zaměnit.

<u>*Příklad 3.3*</u>: Nechť $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}$$

a protože

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0\,, \qquad \text{tak} \quad f_n \rightrightarrows 0\,.$$

Zároveň

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cos(0) = +\infty\,,$$

ale

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(0))' = f'(x) = 0\,.$$

Vidíme, že derivace limitní funkce není limitou posloupnosti derivací. Říkáme, že danou posloupnost $\{f_n\}$ nelze "derivovat člen po členu".

Příklad 3.4: Nechť $f_n(x) = nx(1-x^2)^n,\ x \in \langle 0,1\rangle$. Potom

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \langle 0,1\rangle\,.$$

Zároveň pro integrály členů posloupnosti platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

avšak

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0\,.$$

Opět vidíme, že nelze zaměnit pořadí limitování a integrování, tj. limita posloupnosti integrálů není rovna integrálu z limity. Říkáme, že danou posloupnost nelze "integrovat člen po členu".

Věta 3.1 : (Postačující podmínka spojitosti, diferencovatelnosti a integrovatelnosti limitní funkce, záměnnosti limit)

a) Je-li $\{f_n\}$ posloupnost spojitých funkcí na intervalu I, která na I konverguje stejnoměrně k funkci f, potom funkce $f = f(x)$ je také spojitá na I.

b) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ Riemannovsky integrovatelných funkcí ($f_n \in \mathcal{R}(I),\ I = \langle a,b\rangle$) konverguje stejnoměrně na I k funkci $f(x)$, potom $f \in \mathcal{R}(I)$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

c) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ konverguje v nějakém bodě $x_0 \in I = \langle a,b\rangle$, f_n jsou diferencovatelné funkce na I a posloupnost derivací $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na I, potom i posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na I, limitní funkce $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ je diferencovatelná funkce na I a platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = f'(x)\,.$$

d) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to a+} f_n(x) = c_n$. Pak existují vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a jsou si rovny.

3.2 Funkční řady

Výraz

$$1+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},$$

je řadou funkcí $1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots$ definovaných na $\mathbb{R}$. Pro každé pevné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme číselnou řadu, která konverguje, neboť podle d'Alembertova kritéria je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \ \ (< 1)$.

Z absolutní konvergence řady plyne (neabsolutní) konvergence řady (viz věta 5.11, MA1).

Definice 3.4 : Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině M. Potom výraz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

se nazývá **nekonečná řada funkcí na množině** M. Funkce

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

se nazývá **n-tý částečný součet řady** a $\{s_n(x)\}$ je **posloupnost částečných součtů řady**.
Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)\ , \quad x \in M\ ,$$

potom funkce $s(x)$, $x \in M$, se nazývá **součet řady** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Říkáme, že **řada konverguje** k funkci $s(x)$ a množina M se nazývá **obor konvergence řady** .
Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$, potom říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ **konverguje absolutně** .

<u>*Příklad 3.5*</u>: Řada

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots$$

je geometrickou řadou s kvocientem $q = \frac{1}{1+x^2} < 1$, $x \neq 0$, a tedy konverguje pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$ (pro $x = 0$ je sice $q = 1$, ale řada se skládá ze samých nul). Její součet je

$$s(x) = \frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{1+x^2}} = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Tedy součet řady spojitých funkcí existuje, ale *není* to spojitá funkce.

K tomu, aby součet $s(x)$ řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, kde $f_n(x)$ jsou spojité funkce, byl spojitý, potřebujeme podle věty (3.1), aby posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}$ konvergovala k součtu $s(x)$ stejnoměrně.

Věta 3.2 : (Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence řady funkcí)
Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ je řada funkcí na množině M a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ je číselná řada s nezápornými členy $b_n \geq 0$. Nechť dále platí

$$|f_n(x)| \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M$$

a řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje. Potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně a absolutně na M (tj. konverguje stejnoměrně na M také řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$).
Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ se nazývá **majoranta** řady $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Německý matematik Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

se významně podílel na budování teorie funkcí komplexní proměnné pomocí mocninných řad.
Věřil, že matematika nesmí ztrácet kontakt s ostatními vědami a přispěl k rozvoji matematické fyziky, optiky a astronomie.

Příklad 3.6: Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ konverguje podle vět (3.1) a (3.2) stejnoměrně ke spojité funkci, neboť její majoranta $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

3.3 Mocninné řady

Definice 3.5 : Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \,, \quad x \in \mathbb{R},$$

se nazývá **mocninná řada se středem v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$.

Věta 3.3 :

1. Konverguje-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ v bodě $x_1 \neq x_0$, potom konverguje absolutně v každém bodě x otevřeného intervalu určeného nerovností
$$|x - x_0| < |x_1 - x_0| \,.$$
2. Diverguje-li mocninná řada v bodě x_2, potom diverguje v každém bodě x splňujícím nerovnost
$$|x - x_0| > |x_2 - x_0| \,.$$

Z věty (3.3) vyplývá, že existuje číslo $R \geq 0$ takové, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverguje absolutně pro x splňující nerovnost $|x - x_0| < R$ a diverguje pro x splňující nerovnost $|x - x_0| > R$.

Definice 3.6 : (Poloměr konvergence)
Číslo $R \geq 0$ s výše uvedenou vlastností se nazývá **poloměr konvergence** mocninné řady.
V případě, že mocninná řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, klademe $R = +\infty$.

O konvergenci či divergenci mocninné řady v krajních bodech $x_0 - R$ a $x_0 + R$ nelze obecně nic říci. V těchto bodech řada buď konverguje, nebo diverguje v závislosti na posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad 3.7: a) Máme řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Pro pevné $x \in \mathbb{R}$ zkoumáme absolutní konvergenci této řady pomocí podílového kritéria (věta 5.6 MA1). Protože

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \ \ (< 1)\,,$$

tak daná řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. $R = +\infty$.

V krajních bodech oboru konvergence musíme vyšetřit danou řadu samostatně. Pro $x = -1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro $x = 1$ dostaneme harmonickou řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje.

b) Máme řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Nyní použijeme limitní odmocninové kritérium (věta 5.6 MA1). Protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = |x|\,,$$

tedy daná řada konverguje pro všechna x splňující $|x| < 1$, diverguje pro všechna x splňující $|x| > 1$ a poloměr konvergence $R = 1$.

Výpočet poloměru konvergence mocninné řady

Použijeme-li odmocninové kritérium, pak obecně chceme, aby platilo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0| < 1$.

Z odmocninového (Cauchyova) kritéria lze odvodit pro poloměr konvergence vzorec:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Podobně z podílového kritéria plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x-x_0| < 1$.

Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, pak z podílového (d'Alembertova) kritéria dostaneme

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}\,.$$

Věta 3.4 : (Stejnoměrná konvergence mocninné řady) Nechť $R\in(0,\infty)$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $0<\varepsilon<R$, potom mocninná řada konverguje stejnoměrně na uzavřeném intervalu $\langle x_0-R+\varepsilon, x_0+R-\varepsilon\rangle$.

Pro $x\in(-1,1)$ je $s(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$. Pro $n-$tý částečný součet této řady platí $s_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Potom $|s_n(x)-s(x)|=|\frac{-x^{n+1}}{1-x}|$ a $\sup\limits_{|x|<1}|\frac{-x^{n+1}}{1-x}|=+\infty$.

Odtud plyne, že řada $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$ nekonverguje stejnoměrně na intervalu $(-1,1)$.

Věta 3.5 : (o derivaci a integraci mocninné řady) Mocninné řady

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dx}[a_n(x-x_0)^n],\quad F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int\limits_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt$$

mají stejný poloměr konvergence R jako řada

$$s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

a platí $s'(x)=g(x)$, $F'(x)=s(x)$ pro každé $x\in(x_0-R,x_0+R)$.

Důsledek 3.1: Mocninnou řadu lze uvnitř oboru konvergence derivovat a integrovat člen po členu, tj. derivace součtu se rovná součtu derivací a integrál součtu se rovná součtu integrálů.

Příklady analytických funkcí jsou $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$, $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$.

Příklad 3.8: Pomocí předchozí věty (3.5) najdeme součet řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$. Jejím derivováním dostaneme geometrickou řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$. Zpětně po integrování platí $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln|1-x|$ pro $x\in(-1,1)$.

Každá mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu, *ale ne každá* Taylorova řada funkce f konverguje k funkci f. Například funkce $f(x)=|x|$ má v bodě $x_0=1$ všechny derivace a její Taylorova řada je $1(x-1)^0+1(x-1)^1=x$, což není původní funkce (pro $x<0$) .
Úloha nalézt Taylorovu řadu funkce f se nazývá **rozvoj funkce f v mocninnou řadu**.

Definice 3.7 : Nechť funkce $f=f(x)$ má derivace všech řádů v bodě x_0. Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,,$$

se nazývá **Taylorova řada** funkce f. Jestliže se navíc součet Taylorovy řady rovná funkci f, pak se funkce f nazývá **analytická funkce** na oboru konvergence.

Taylorova metoda řešení počátečních úloh

Předpokládejme, že řešení $y(x)$ počáteční úlohy má v bodě x_0 derivace všech řádů. Řešení pak hledáme ve tvaru

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

a hodnoty $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dots$ určíme z diferenciální rovnice a z počátečních podmínek.

Mocninné řady se používají v teorii aproximací, při konstrukci primitivních funkcí, při řešení diferenciálních rovnic a velmi často v teorii funkcí komplexní proměnné.

Příklad 3.9: Řešíme počáteční úlohu

$$y'' = xy, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 3\,.$$

Z počátečních podmínek plyne

$$y(x) = 4 + 3(x - 0) + \frac{y''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \dots .$$

Z rovnice dostaneme postupným derivováním:

$$\begin{aligned}
&y''(x) = x\,y(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y''(0) = 0\,y(0) = 0\,, \\
&y'''(x) = y(x) + x\,y'(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y'''(0) = y(0) + 0 \cdot y'(0) = 1 \cdot 4\,, \\
&y^{IV}(x) = y'(x) + y'(x) + x\,y''(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{IV}(0) = 2y'(0) + 0 \cdot y''(0) = 2 \cdot 3\,, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&y^{(n)}(x) = (n-2)y^{(n-3)}(x) + x\,y^{(n-2)}(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{(n)}(0) = (n-2)y^{(n-3)}(0)\,.
\end{aligned}$$

Obecně

$$\begin{aligned}
&y^{(3n)}(0) = (3n-2)(3n-5)\cdots 4 \cdot 1 \cdot 4\,, \\
&y^{(3n+1)}(0) = (3n-1)(3n-4)\cdots 5 \cdot 2 \cdot 3\,, \\
&y^{(3n+2)}(0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do předpokládaného tvaru řešení dostaneme:

$$\begin{aligned}
y(x) &= 4 + 3x + \tfrac{4}{3!}x^3 + \tfrac{3}{4!}x^4 + \dots \\
&= 4 + 3x + \sum_{n=1}^{\infty} 4\tfrac{(3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!}x^{3n} + 3\tfrac{(3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2}{(3n+1)!}x^{3n+1}.
\end{aligned}$$

Poznámka 3.1: Aby výše uvedený formální postup byl oprávněný, musíme dokázat konvergenci vypočtené Taylorovy řady. To však může být daleko komplikovanější než celý předcházející výpočet.

Metoda neurčitých koeficientů
(pro řešení diferenciálních rovnic)

Tato metoda se používá ke stanovení fundamentálního systému lineární diferenciální rovnice. Předpokládáme, že řešení $y(x)$ je ve tvaru mocninné řady se středem v bodě 0, tedy

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots .$$

Formálním derivováním "člen po členu" dostáváme

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{atd.}$$

Po dosazení do rovnice a využití počátečních podmínek vypočítáme koeficienty $a_n,\ n = 0, 1, 2, \dots$.

<u>*Příklad 3.10*</u>: Řešíme počáteční úlohu

$$y'' = xy\,, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,.$$

Po dosazení za $y(x), y''(x)$ obdržíme:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}] x^n + 2a_2 = 0\,.$$

Odtud plyne:

$2a_2 = 0\,,\quad a_3 = \frac{a_0}{3\cdot 2}\,,\quad a_4 = \frac{a_1}{4\cdot 3}\,,\quad a_5 = \frac{a_2}{5\cdot 4} = 0\,,$
$a_6 = \frac{a_3}{6\cdot 5} = \frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}\,,\quad a_7 = \frac{a_4}{7\cdot 6} = \frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}\,,\quad$ atd.

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\left(1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \dots + \frac{x^{3n}}{2.3.5.6...(3n-1)3n} + \dots\right) \\ &\quad + a_1\left(x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{3.4.6.7...3n(3n+1)} + \dots\right). \end{aligned}$$

Z počátečních podmínek obdržíme

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 1.$$

Je možné ukázat, že výše uvedená mocninná řada má poloměr konvergence $R = +\infty$, tj. řešení počáteční úlohy je definováno na celém $\mathbb{R}$.

Obecné řešení rovnice $y'' = xy$ můžeme tedy psát ve tvaru $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, kde

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \dots ,$$
$$y_2(x) = x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots .$$

Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá řešení dané rovnice, která tvoří fundamentální systém.

3.4 Trigonometrické Fourierovy řady

Dosud jsme funkce hledali ve tvaru mocninné řady, vyjadřovali jsme je v "bázi polynomů" 1, x, x^2, $\ldots$. Nyní zavedeme novou "bázi trigonometrických funkcí" $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$

Definice 3.8 : (Fourierova řada podle základního systému)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle -\pi, \pi \rangle)$. **Trigonometrická řada**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

jejíž koeficienty jsou určeny vzorci

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi \, d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin k\xi \, d\xi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

se nazývá **Fourierova řada funkce f podle (základního) trigonometrického systému** $\left\{ \frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \ldots \right\}$.
Koeficientům a_k, b_k určeným uvedenými vzorci se říká **Fourierovy koeficienty** funkce f a příslušné Fourierově řadě se také říká **Fourierův rozvoj** funkce f.

Poznámka 3.2: Chceme formálně vyjádřit funkci f ve tvaru $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Po vynásobení funkcí $\sin nx$ a integrování dostaneme $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin nx \, dx + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sin nx \, dx$.
Zároveň pro $k = n$ je $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 \, dx = \pi$, jinak ale platí $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = 0$ a $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx = 0$. Odtud plynou vztahy pro a_k, b_k.

Říkáme, že funkce $\cos kx$, $\sin nx$ jsou ortogonální.

Fourierovy řady (pokud konvergují) představují "analytické" vyjádření 2π-periodických funkcí získaných měřením periodických dějů (kmitů, signálů, apod.).

Příklad 3.11: Stanovíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$, $x \in \langle -\pi, \pi)$ podle *základního* trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Vypočteme koeficienty a_k, b_k :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \xi \cos k\xi \; d\xi = 0\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \xi \sin k\xi \; d\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \xi \sin k\xi \; d\xi = (-1)^{k-1}\frac{2}{k},\; k = 1, \ldots\,.$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$f(x) \sim 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k} + \ldots\right]$$

<u>*Příklad 3.12*</u>: Vypočítáme Fourierovu řadu 2π-periodického prodloužení funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi)$ podle základního trigonometrického systému.

Integrál liché funkce na symetrickém intervalu je nulový.

Integrál sudé funkce na symetrickém intervalu $\langle -a, a\rangle$ se rovná dvojnásobku daného integrálu na polovičním intervalu $\langle 0, a\rangle$.

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \; d\xi = \tfrac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \cos k\xi \; d\xi = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \xi^2 \cos k\xi \; d\xi = 4\,\tfrac{(-1)^k}{k^2}\,,$$

$$b_k = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \xi^2 \sin k\xi \; d\xi = 0\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right].$$

Protože periodické prodloužení funkce f je spojitá funkce a má po částech spojitou derivaci, platí podle věty (**??**) rovnost $s(\pi) = f(\pi) \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos\pi - \frac{\cos 2\pi}{2^2} + \frac{\cos 3\pi}{3^2} - \ldots\right] = \pi^2$. Tedy

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,.$$

V příkladu 3.11 je $f(-\pi) = -\pi$, ale součet řady v bodě $-\pi$ je nula.

<u>*Cvičení 3.1*</u>: Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\pi \le x \le 0, \\ x\,, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

podle základního trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

$[\,f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right) + \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right).]$

V příkladu 3.11 je $f(\pi_+) = -\pi$, $f(\pi_-) = \pi$, tedy $\frac{f(-\pi_+)+f(-\pi_-)}{2} = 0$, což odpovídá součtu Fourierovy řady.

Základní úloha Fourierovy analýzy

K dané periodické funkci $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (tj. např. k periodickému prodloužení funkce dané na intervalu $\langle a, a+T))$ máme určit

a) *frekvence* ω_k harmonických složek,

b) *amplitudy* r_k harmonických složek (tj. koeficienty $a_k,\ b_k$),

c) *fáze* φ_k harmonických složek,

neboli Fourierovu řadu funkce f vyjádřit ve tvaru

Chceme, aby platilo $a_k \cos\alpha + b_k \sin\alpha = r\sin(\varphi+\alpha) = r\sin\varphi \cos\alpha + r\cos\varphi\sin\alpha$. Tedy $a_k = r\sin\varphi, b_k = r\cos\varphi \Rightarrow r = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}$.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kx}{T}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{r_k \sin(\omega_k x + \varphi_k)}^{\text{tzv. harmonická složka}} ,$$

$$\text{potom} \quad r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}, \quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}.$$

Základní úloha Fourierovy syntézy

Ze známých *frekvencí, amplitud a fází* určit ("rekonstruovat") funkci $f(x)$, která je součtem řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k \sin(\omega_k x + \varphi_k)$, a určit její hodnoty ve vybraných bodech $x \in \mathbb{R}$.

Reference

[1] Čížek, Kubr, Míková: Sbírka příkladů z matematické analýzy I., skripta ZČU Plzeň 1997

[2] Čížek, Kubr, Míková: Seminář z matematické analýzy I., skripta ZČU Plzeň 1995

[3] Drábek, Míka: Matematická analýza I., skripta ZČU Plzeň 1996

[4] Schwabik, Šarmanová: Malý průvodce historií integrálu, Prometheus, Praha 1996