Workshop Plzeň, duben 2014

Motto: „Má smysl učit matematiku, když máme počítače?“

**1 Úvod**

Pohled na čísla může být pro mnoho lidí velice nudný, podobně jako pro laika pohled na notový zápis. Potřebu zaznamenávat počet dnů nebo množství kořisti můžeme však sledovat již v době kamenné.

D:\petr\Prednasky pro studenty SŠ kemp\Dejiny matematiky\vrubovka.jpg

Věstonická vrubovka (kost se zářezy) <http://www.vesmir.cz/clanek/vestonicka-vrubovka>

V tomto textu se pokusíme proniknout pod povrch abstraktního zápisu čísel a přiblížíme si jejich význam.

**2 Jedna, dvě, hodně**

Počítání také jistě souvisí s vzájemnou výměnou zboží. Přesto již přechod od jedničky ke dvojce byl pro lidskou mysl těžký. Na Nové Guineji existuje jazyk, který používá jiné vyjádření pro dvojici žen, dvojici mužů nebo dvojici smíšenou.

Další krok ke trojce už byl velice obtížný, ta byla často označována stejným slovem jako množné číslo. Na zlomcích si můžeme doložit, že lidé nejdříve počítali podle schématu jedna, dvě, hodně. Porovnejme dvě - polovina, tři – třetina, anglicky two - half, three – third a maďarsky kettö-fel, három-harmad. Tedy jedna polovina se vyvinula daleko dříve, než jedna třetina a další zlomky.

V mnoha jazycích se počítání zastavilo na hodnotě čtyři. Asi proto, že zaznamenat jedním pohledem větší počty je pro člověka složité. Při počítání pomocí čárek se pátou čárkou (např. na pivním tácku) škrtnou předchozí čtyři.

Rozvoj obchodu a výběr daní vedl k potřebě je zaznamenat. Do hliněného džbánu se nasypal počet kaménků (latinsky calculi) odpovídající vybraným daním a džbán se zapečetil. Časem se počet kaménku začal zaznamenávat na džbán. První takové znaky, vedoucí ke vzniku klínového písma, se objevily roku 3300 př. n. l. v Sumeru. Znaky se postupně měnily, v rozvinuté podobě je vidíme např. u římských číslic. <http://www.wolframalpha.com/input/?i=CDXCIX+%2B+XI>

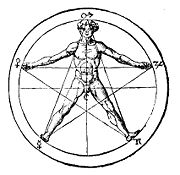
Výpočty v římských číslicích jsou však velice obtížné. Významným pokrokem proto bylo zavedení desítkového pozičního zápisu čísel (písemný doklad na desce z roku 595 n. l. v Indii). V Indii rovněž zavedli nulu, kterou rovnoprávně používali vedle ostatních symbolů pro číslice i na konci čísla. Babylóňané vyjadřovali nulu tečkou a psali ji pouze mezi číslice. V Evropě se nula objevila až ve třináctém století. Vedle desítkového systému se vyvíjely i systémy se základem pět, dvacet nebo šedesát. Dodnes dělíme hodinu na šedesát minut.

**Doplňte své nápady - Jak využít počítač pro přiblížení čísel studentům. (Dobrý sluha)**

**3 p/q nebo smrt**

Výpočty při dělení majetku vyžadovaly zlomky. Egypťané všechny výpočty se zlomky převáděli na kanonické zlomky, které mají v čitateli jedničku. Egypťané také uměli spočítat plochy čtverce, obdélníka, lichoběžníka a kruhu (jeho plochu vyjadřovali jako osm devítin průměru, to celé na druhou). Babylónští kněží rýsovali okolo kruhu šesti a dvanáctiúhelníky. Pomocí nich se přiblížili k hodnotě *π* ~ 3+7/60+30/602 = 3,125. Babyloňané úlohy a výpočty popisovali slovy, řešili kvadratické rovnice a znali Pythagorovu větu. Nikde však ve starých spisech nenajdeme náznak důkazu. Vše bylo popsáno slovy „udělej to tak a tak“. S důkazem v dnešním slova smyslu se můžeme poprvé potkat u Pythagorejců (6. stol. př. n. l.) při doka-zování platnosti Pythagorovy věty.

Pythagorejci připisovali číslům velký význam. Číslo 1 považovali za symbol bodu, číslo rozumu, tedy za zdroj ostatních rozměrů a čísel. Číslo 2 bylo ženským číslem, bylo to číslo sváru a nespolehlivosti („dvojí tvář“ v iránštině a češtině, „dvojí jazyk“ v němčině). Mužským číslem byla trojka, která byla základem pořádku, základem utváření vojenských jednotek. Symbolem spravedlnosti a řádu byla čtyřka, ke které patřily například čtyři světové strany. Číslo 5 bylo považováno za číslo lásky a manželství (2+3). Číslo 6 představovalo symbol stvoření. Matematika byla jistým druhem náboženství. Proto bylo velice nepříjemné, když se nedařilo vyjádřit úhlopříčku ve čtverci o straně jedna pomocí zlomku. Pythagorejci dokázali, že to opravdu nejde (MLODINOW L. Eukleidovo okno). Jejich zděšení bylo tak veliké, že zakázali tuto skutečnost zveřejnit. Tajemství však prozradil Hippasus z Metapontu a byl za to zabit. Dnes čísla, která se nedají vyjádřit jako zlomek, nazýváme iracionální. Odpor k těmto číslům byl překonán až v díle George Cantora v 19.století.



Omocnina z Babylónu Pentagram (<http://www.artbos.cz/clanek/182/Pentagram.htm>)

**Doplňte své nápady - Jak využít počítač (Dobrý sluha, i zlý pán),** číslo pi na dvacet míst<http://www.wolframalpha.com/input/?i=N%5BPi%2C20%5D> [http://www.wolframalpha.com/input/?i=%28N%5B3%2C2%5D%29\*%28N%5B1%2F3%2C2%5D%2B1.01%29](http://www.wolframalpha.com/input/?i=%28N%5B3%2C2%5D%29*%28N%5B1%2F3%2C2%5D%2B1.01%29)

**4 Imaginární čísla**

V tomto odstavci budeme čerpat z knih STRUIK D. J. „Dějiny matematiky“ a LIVIO M. „Neřešitelná rovnice“ a přiblížíme si vznik komplexních čísel. Jak si ukážeme, komplexní čísla se poprvé objevila až při řešení kubických rovnic. U kvadratických rovnic matematici řešení vyžadující odmocninu se záporného čísla prostě nebrali v úvahu. Zde je vhodné podotknout, že sice již starověcí Řekové pracovali s výrazy, které zahrnovaly záporné hodnoty, např. *- (- a) = a*. Podobné operace však považovali za přípustné, pokud výsledek byl kladný. Nedůvěra v záporná čísla byla úplně překonána až v 18. století (DEVLIN K. Jazyk matematiky, s.138).

První pokusy o řešení rovnic třetího stupně lze nalézt u Babylóňanů, kteří sestavili tabulky pro řešení konkrétních rovnic. Postupně matematici přidávali další řešení. Obecný předpis pro rovnice tvaru *ax3 + bx = c*, kde *a, b, c* jsou celá čísla byl však nalezen až v 15. století italským matematikem Scipiono dal Ferro (1465-1526). Rukopis s řešením ale nezveřejnil, předal ho svému studentovi Antonia Maria Fiore. Ten chtěl tuto znalost využít ke své slávě. V té době bylo obvyklé, že se učenci střetávali ve veřejných disputacích. Fiore vyzval v roce 1535 k veřejnému řešení kubických rovnic benátského počtáře jménem Nicola Tartaglia. Tartaglia však uměl řešit i rovnice ve tvaru *ax+ b = x3, x3 + a x2 = b* a Fioreho porazil. Svou metodu dlouhou dobu držel v tajnosti. Nakonec ji pod slibem mlčenlivosti prozradil Hieronymu Cardanovi (1501-1576), ten ji ale uveřejnil v roce 1545 v knize Ars magna.

Obecný vzorec pro výpočet kořenů kubické rovnice *x3 + p x = q* tam lze nalézt ve tvaru

*x = 3√(q/2 + √(p3/27+q2/4)) + 3√(q/2 - √(p3/27+q2/4))* .

(<http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html>)

Hlavním motivem pro intenzivní zkoumání komplexních čísel byl tzv. *casus irreducibilis* – tj. případ, kdy má kubická rovnice tři reálné kořeny a kdy se v Cardanově vzorci vyskytují odmocniny ze záporného čísla.

Například pro rovnici *x3 - x = 0* je *x= 3√( + √-13/27) + 3√( - √(-1/27))* .

([http://www.wolframalpha.com/input/?i=%28sqrt%28-1%2F27%29%29%5E%281%2F3%29% 2B%28-+sqrt%28-1%2F27%29%29%5E%281%2F3%29](http://www.wolframalpha.com/input/?i=%28sqrt%28-1%2F27%29%29%5E%281%2F3%29%25%202B%28-+sqrt%28-1%2F27%29%29%5E%281%2F3%29))

G. Cardano si však při studiu kubických rovnic uvědomil, že ke komplexním číslům lze dospět již u rovnic kvadratických; tato myšlenka se neobjevila po celá tři tisíciletí, během nichž byly úlohy vedoucí na kvadratické rovnice řešeny.

****

Cardanus

Až další italský matematik Rafael Bombelli (1526 – 1572) dospěl ve své knize **L’Algebra parte maggiore dell’Aritmetica** z roku 1572 při počítání s komplexními čísly podstatně dále než G. Cardano. Usoudil, že odmocněním záporného čísla nemůžeme dostat ani kladné, ani záporné číslo; napsal tedy před odmocninu z absolutní hodnoty tohoto čísla *pi`u di meno*, když ji přičítal, resp. *meno di meno*, když ji odčítal – nejednalo se o nic jiného než o slovní označení pro pozdější symbol i, resp. −i. Pro počítání s takovýmito čísly formuloval v první části své knihy osm pravidel pro práci s komplexní jednotkou:

(+1)(+i)=+i, (-1)(+i)=-i, (+1)(-i)=-i, (-1)(-i)=+i,

(+i)(+i)=-1, (+i)(-i)=+1, (-i)(+i)=+i, (-i)(-i)=-1.

R. Bombelli zkoumal Cardanův vzorec a pokoušel se počítat třetí odmocniny komplexních čísel; ty totiž figurují v Cardanově vzorci, pokud nastává casus irreducibilis. Zjistil přitom, že třetí odmocniny komplexně sdružených čísel jsou opět komplexně sdružená čísla.

**Komplexní čísla v 17. a 18. století**

V 17. století pracovalo s komplexními čísly stále více matematiků. Jedním z nich byl Albert Girard (1595 – 1632, který jako jeden z prvních vyslovil tzv. základní větu algebry.

Francouzský matematik a filozof René Descartes (1596 – 1650) sehrál významnou roli i při rozšiřování číselných oborů. Často pracoval se zápornými čísly, i když ani pro něho ještě nebyla zcela rovnocenná číslům kladným, a s komplexními čísly, která nazýval *imaginaire*.

Anglický matematik a teolog John Wallis (1616 – 1703), profesor oxfordské univerzity, věnoval velkou pozornost otázkám číselných interpretaci. J. Wallis uznával záporná čísla, kladná a záporná čísla interpretoval pomocí pohybů na opačné strany, o uspořádání číselné osy však ještě neměl zcela jasnou představu. Jako první naznačil smysluplnou geometrickou interpretaci imaginárních čísel. Rozpaky vyplývající z neujasněné podstaty komplexních čísel můžeme snadno dokumentovat např. názorem Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 – 1716), který roku 1675 napsal Christiaanu Huygensovi (1629 – 1695), že tato ”podivná čísla“ jsou divem analýzy, netvorem světa idejí a obojživelníkem mezi bytím a nebytím.

V 18. století pracoval s komplexními čísly zejména Leonhard Euler (1707 – 1783), který roku 1777 použil prvního písmene slova *imaginaire* pro označení komplexní jednotky, ve vytištěné podobě se toto označení objevilo až roku 1794. Zdá se téměř jisté, že již v padesátých letech 18. století chápal komplexní číslo *x + yi* jako bod roviny s kartézskými souřadnicemi x, y; nikde to však výslovně nenapsal. Komplexní čísla vyjadřoval i v goniometrickém tvaru.

Ke geometrické interpretaci komplexních čísel dospěl jako první norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745 – 1818), který úspěšně spolupracoval s Dánskou akademií věd. Ve svých pracech rozpracoval základy vektorového počtu v rovině a v prostoru jako analytický aparát pro řešení geodetických úloh. Zavedl imaginární osu kolmou k ose reálné, vektory roviny reprezentoval komplexními čísly a operace s vektory prováděl pomocí operací s komplexními čísly. Pro komplexní jednotku užíval symbol ε. Dospěl rovněž ke goniometrickému vyjádření komplexního čísla a k Moivreově větě.

**Komplexní čísla na počátku 19. století**

V první čtvrtině 19. století rozvíjelo geometrické představy o komplexních číslech několik matematiků. Jedním z nich byl francouzský matematik a fyzik Lazare Nicolas Marquerite Carnot (1753 – 1823), který na počátku 19. století vydal knihy, v nichž diskutoval problematiku záporných a komplexních čísel (pochází od něho termín komplexní číslo).

**Gaussova rovina -** Ke geometrické interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny dospěl na přelomu 18. a 19. století Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Geometrických představ o komplexních číslech využil již ve své disertační práci z roku 1799 při důkazu základní věty algebry. Jejich geometrickou interpretaci podal později ve své práci Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda z roku 1831.

Pod výrazným Gaussovým vlivem postupně došlo k všeobecnému rozšíření představy o komplexních číslech jako bodech roviny; proto se později ujal termín Gaussova rovina. Komplexní čísla přestala mít tajuplný charakter, jejich sčítání a násobení získalo výrazný geometrický smysl (vektorový rovnoběžník, rotace).

**Doplňte své nápady - Jak využít počítač (Dobrý sluha, i zlý pán),**

1. **Bankovní kostanta**

Zajímavým iracionálním číslem, jehož přibližné hodnoty se poprvé objevily v roce 1618 v práci Johna Napiera, je číslo *e.*  Za objevitele tohoto čísla je však považován Jacob Bernoulli (1655-1705), který se při řešení problému spojeného se složeným úročením, snažil vypočítat limitu z výrazu (1+1/n)n. Na tuto limitu narazíme pokaždé, když se budeme snažit popsat jakékoli rozmnožování, nejen peněz, ale také zvířat nebo rostlin. Pokud jako základ v exponenciální funkci zvolíme číslo *e,* pak platí, že její derivace v bodě *x* je rovna funkční hodnotě v tomto bodě. <http://www.wolframalpha.com/input/?i=+%281%2B1%2Fn%29%5En>

Označení *e = limn->∞* (1+1/n)n

zavedl Leonard Euler (1707-1783), který v roce 1748 dokázal rovnost

*e*i*x*= cos *x* + i sin *x*,

která platí pro každé reálné číslo *x*. <http://www.wolframalpha.com/input/?i=e%5EiPi%3D+cos+Pi+%2B+i+sin+Pi>

Pokud dosadíme za *x* konstantu *π*, podaří se nám propojit svět racionálních, iracionálních a komplexních čísel překvapující rovností

*e*i*π* + 1 = 0.

Tato rovnost podle mnohých vědců patří k nejkrásnějším matematickým poučkám.

Limity funkcí: <http://www.wolframalpha.com/input/?i=Limit%5B1%2Fx%2C+x+to+0%5D> **Doplňte své nápady - Jak využít počítač (Dobrý sluha, i zlý pán),**

1. **Závěr**

Jako závěr si dovolím použít text, který napsal do svého projektu Štěpán Cais, v době psaní projektu student prvního ročníku FAV ZČU v Plzni. Cituji: “*Ještě před nedávnem jsem si myslel, že matematika je jako věda velice plochá a pro studenta je jenom nutné zlo se přes ni prokousat. Od malička jsou nám všem do hlavy nalévány vzorce a poučky, které jsou většinou oznamovány bez širších souvislostí. A právě tato – dle mého názoru chyba – způsobuje nechuť spoustě žáků a studentů k matematice. O co je však hrníček matematiky chutnější a sytější, když do něj přidáme lahvičku speciálního koření s názvem „historie“, jemně zamícháme s přísadou „širších souvislostí“ a ubereme hutného „definování, vzorečkování a větování“. Vždyť, jak jednou pronesl David Hilbert: „Matematika je hra hraná podle jistých jednoduchých pravidel s nesmyslnými znaky na papíře“*.

1. **Použitá literatura**

* DEVLIN, K. Jazyk matematiky - Jak zviditelnit neviditelné: Nakladatelství Argo a Dokořán, Praha 2002 343 s. ISBN 80-86569-09-8.
* MLODINOW, L. Eukleidovo okno, Slovart s.r.o. , Praha 2007, 259 s. ISBN 978-80-7209-900-9
* PICK, L. Zlatý řez a další parádní čísla, sborník Letní škola matematiky a fyziky 2007, Univerzita J.E.Purkyně v Ústí nad Labem.
* STRUIK D. J. Dějiny matematiky, Orbis, Praha 1963, 250 s.
* LIVIO, M. Neřešitelná rovnice, Nakladatelství Argo a Dokořán, Praha 2008, 317s. ISBN 978-80-7363-150-5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dobrý sluha |  | Zlý pán |
| Základní operace ([Elementary Mathematics](http://www.wolframalpha.com/examples/ElementaryMath.html)) – funguje „texovská“ syntaxe 2^3, \sqrt[3]{8}. |  | , problém s Intersection  [((-1)^(1/3))^3, ((-1)^3)^(1/3)](http://www.wolframalpha.com/input/?i=%28%28-1%29%5E%281%2F3%29%29%5E3%2C++%28%28-1%29%5E3%29%5E%281%2F3%29)  N[(-1)^{1/3}] a (-1)^(2/3),  3/2===1.5 False?, [N[3/2]===1.5 True](http://www.wolframalpha.com/input/?i=N%5B3%2F2%5D%3D%3D%3D1.5) |
| Řešení rovnic <http://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E2-2%3D0> |  | [(x-1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480)/(x-sqrt{2})=0](http://www.wolframalpha.com/input/?i=%28x-1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480%29%2F%28x-sqrt%7B2%7D%29%3D0), uberte desetinná místa |
| Cardanovy vzorce <http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html> |  | [(sqrt(-1/27))^(1/3)+(- sqrt(-1/27))^(1/3)](http://www.wolframalpha.com/input/?i=%28sqrt%28-1%2F27%29%29%5E%281%2F3%29%2B%28-+sqrt%28-1%2F27%29%29%5E%281%2F3%29) |
| Taylorova řada  [taylor series e^x](http://www.wolframalpha.com/input/?i=taylor+series+e%5Ex) |  | [sum (x)^3/(1+2x^2)^n, n=1..infinity](http://www.wolframalpha.com/input/?i=sum+%28x%29%5E3%2F%281%2B2x%5E2%29%5En%2C+n%3D1..infinity), nezapomenout na podmínku |
| Funkce [inverse function of x^3](http://www.wolframalpha.com/input/?i=arc+sin+x%2C+sin+x%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20http://www.wolframalpha.com/input/?i=inverse+function+of+x%5E3&lk=4&num=3&lk=4&num=3) |  | Zaměň 16 za 6  [Log[Abs[x - 5]]\*Exp[x] + 100; x from 2 to 16](http://www.wolframalpha.com/input/?i=Log%5BAbs%5Bx+-+5%5D%5D*Exp%5Bx%5D+%2B+100%3B+x+from+2+to+16) |
| \int sgn x dx =|x|, - zobecněná prim. funkce |  | [integrate(sgn x )](http://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate%28sgn+x+%29)  (v dokumentaci je sign), y‘=sgn x řeší jinak |
| [Limity funkcí](http://www.wolframalpha.com/input/?i=Limit%5B1%2Fx%2C+x+to+0%5D) |  |  |

Workshop 2012

Základní adresa pro výpočty - http://www.wolframalph a.com/ a nejen výpočty (zadejte Plzeň).

První krok - <http://www.wolframalpha.com/examples/Math.html>

### Základní operace ([Elementary Mathematics](http://www.wolframalpha.com/examples/ElementaryMath.html)) – funguje „texovská“ syntaxe 2^3, \sqrt[3]{8}.

### Práce s čísly ([Numbers](http://www.wolframalpha.com/examples/Numbers.html)) – prvočíselný rozklad ([factor](http://www.wolframalpha.com/input/?i=factor+70560)), největší společný dělitel gcd(36, 24), nejmenší společný násobek lcm(25,45), třetí odmocnina cbrt(-1) dává komplexní číslo s nejmenším argumentem, rozvoj π - pi to 1000 digits.

### Grafy ([Plotting & Graphics)](http://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html) – jiné značení funkcí : tg tan, ln log, grafy někdy obsahují asymptoty: tan x, nezobrazí “rychlé” změny: log(x-1)\*e^x, x from -1 to 10, “neumí” třetí odmocninu – lze obejít přes: plot x^3-y=0 from -2 to 2, obory funkcí: domain (range) of f(x) = log(x^2-1), goniometrické funkce ([trigonometric](http://www.wolframalpha.com/input/?i=trigonometric+)): tan(60 deg), funkce a inverzní funkce ([demonstrace](http://demonstrations.wolfram.com/InverseFunctionOfATrigonometricFunctionGame/)), .

### [Algebra](http://www.wolframalpha.com/examples/Algebra.html) – řešení soustav rovnic, práce s polynomy, operace s vektory a maticemi: VectorAngle({1/4, -1/2, 1}, {1/3, 1, -2/3}), inverse matrix {{4,1},{2,-1}}.

### Základy matematické analýzy ([Calculus & Analysis](http://www.wolframalpha.com/examples/Calculus.html)) – Posloupnosti a řady ([Sequences](http://www.wolframalpha.com/examples/Sequences.html), [Sums](http://www.wolframalpha.com/examples/Sums.html)), Limity [(Limits](http://www.wolframalpha.com/examples/Limits.html)) : limit (n+1)/n as n->infinity, lim 1/x as x->0, Derivace a integrály ([Derivatives](http://www.wolframalpha.com/examples/Derivatives.html), [Integrals](http://www.wolframalpha.com/examples/Integrals.html)): derivative of x^4/sin x, int sin(t^2) dt, t=-infinity to infinity.

### Analytická geometrie ([Coordinate Geometry](http://www.wolframalpha.com/examples/CoordinateGeometry.html)) – přímka, rovina, kvadriky ([ConicSections](http://www.wolframalpha.com/examples/ConicSections.html)), průběh funkce ([StationaryPoints](http://www.wolframalpha.com/examples/StationaryPoints.html), [maximize](http://www.wolframalpha.com/input/?i=maximize+x%281-x%29)).

### Geometrie ([Geometry](http://www.wolframalpha.com/examples/Geometry.html)) – zobrazení ploch a těles ([tetrahedron](http://www.wolframalpha.com/input/?i=tetrahedron)).

### Kombinatorika ([Combinatorics](http://www.wolframalpha.com/examples/Combinatorics.html)) – permutace ([permutations](http://www.wolframalpha.com/input/?i=permutations+of+%7Ba%2C+b%2C+c%2C+d%7D)), kombinační číslo ([30+choose+18](http://www.wolframalpha.com/input/?i=30+choose+18)) .

### Matematická logika a množiny ([Logic & Set Theory](http://www.wolframalpha.com/examples/LogicSetTheory.html)) – tabulka pravdivostních hodnot ([P && (Q || R)](http://www.wolframalpha.com/input/?i=P+%26%26+%28Q+%7C%7C+R%29)), Vennovy diagramy ([(complement S) intersect (A union B)](http://www.wolframalpha.com/input/?i=%28complement+S%29+intersect+%28A+union+B%29))

Úlohy : 1. (batman equation) Nakreslete srdíčko.

2. Najděte asymptoty a inflexní bod grafu funkce: x(1-x^2).

3. Vynásobte matici a vektor.

4. Rozhodněte o pravdivosti výrokové formule: (V1 V2) (V1  V2)

5. Nakreslete parabolu procházející body (-1,0), (0,1), (1,0).

6. Spočítejte vzdálenost bodu [1,1,1] od roviny x+y+z=2.