# Sbírka příkladů z matematické analýzy pro M2S

Petr Tomiczek

# Obsah

# 10 Diferenciální rovnice 1. řádu

## 10.1 Separace proměnných

*Příklad 1* : Najděte obecné řešení (obecný integrál) diferenciální rovnice

$$y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \,.$$

Teorie

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \;\Rightarrow\; \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

a substitucemi $u = \sin y$ , $v = \cos x$ dostaneme po integrování

$$\ln|u| = -\ln|v| + \ln C \,, \qquad \text{neboli} \qquad \sin y = \frac{C}{\cos x} \qquad \text{(obecný integrál).}$$

*Příklad 2* : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0 \,.$$

Teorie

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$(y^2+1)x\, dx = -y(1-x^2)\, dy \;\Rightarrow\; \frac{-x}{1-x^2}\, dx = \frac{y}{y^2+1}\, dy$$

a substitucemi $u = 1 - x^2$, $v = y^2 + 1$ dostaneme po integrování

$$\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \ln C_1 = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| \,, \qquad \text{neboli} \qquad 1+y^2 = C(1-x^2) \qquad \text{(obecný integrál).}$$

3. $xyy' = 1 - x^2$ $\qquad\left[x^2 + y^2 = \ln Cx^2\right]$
4. $y' \operatorname{tg} x - y = a$ $\qquad[y = C\sin x - a]$
5. $xydx + (x+1)dy = 0$ $\qquad[y = C(x+1)e^{-x}]$
6. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$ $\qquad\left[\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}; x = 0\right]$
7. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$ $\qquad\left[1 + e^y = C(1+x^2)\right]$
8. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0 \,,\; y(0) = 1$ $\qquad\left[y\{\ln(1-x^2)+1\} = 1\right]$
9. $y' \sin x = y \ln y \,,\; y(\frac{\pi}{2}) = e$ $\qquad\left[y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]$
10. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx \,,\; y(0) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad\left[\cos x = \sqrt{2}\cos y\right]$
11. $y' \operatorname{cotg} x + y = 2 \,,\; y(\frac{\pi}{3}) = 0$ $\qquad[y = 2 - 4\cos x]$

Řešení pomocí WolframAlpha

## 10.2 Rovnice umožnující přechod k separaci proměnných.

*Příklad 12* : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2(x+y)}\,.$$

Teorie

Substitucí $x + y = u\,,\ 1 + y' = u'$ převedeme rovnici na tvar

$$u' - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2u} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = \frac{1-u}{2u}\,.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u}{1-u}\,du = \int 1\,dx\,, \qquad \text{neboli} \qquad -2u - 2\ln|1-u| = x - C$$

a přejdeme k původním proměnným $3x + 2y + 2\ln|1-x-y| = C\,.$

*Příklad 13* : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x+y+2)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0\,.$$

Substitucí $x + y = u\,,\ dx + dy = du$ převedeme rovnici na tvar

$$(u+2)\,dx + (2u-1)(du-dx) = 0 \;\Rightarrow\; (3-u)\,dx + (2u-1)\,du = 0\,.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u-1}{3-u}\,du + \int 1\,dx = -C\,, \qquad \text{neboli} \qquad -2u - 5\ln|u-3| + x = -C$$

a přejdeme k původním proměnným $x + 2y + 5\ln|x+y-3| = C\,.$

14. $y' - y = 2x - 3$ $\quad [2x + y - 1 = Ce^x]$

15. $y' = \sin(x-y)$ $\quad \left[x + C = \operatorname{cotg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

16. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$ $\quad \left[\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right) = x + C\right]$

17. $y' = \cos(x-y-1)$ $\quad \left[y = x - 1 - 2\operatorname{arcotg}\left(\frac{1}{C-x}\right) + 2k\pi; k \in Z\right]$

18. $y'\sqrt{1+x+y} = x + y - 1$ $\quad \left[x + C = 2u + \frac{2}{3}\ln|u-1| - \frac{8}{3}\ln(u+2)\right]$ $\left[u = \sqrt{1+x+y}\right]$

*Příklad 19*: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}\,.$$

Teorie

Substitucí $y = ux$ , $y' = u'x + u$ převedeme rovnici na tvar

$$u'x + u = -\frac{x^2 + 2xux}{xux} \;\Rightarrow\; \frac{u\,du}{(u+1)^2} = -\frac{dx}{x}\,.$$

Integrováním dostaneme

$$\int \frac{u+1-1}{(u+1)^2}\,du = \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C$$

a přejdeme k původním proměnným

$$\ln|\frac{y}{x}+1| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = -\ln|x| + C \;\Rightarrow\; \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C\,.$$

20. $y' = \frac{x+y}{x-y}$ $\qquad \left[\operatorname{arcotg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}\right]$

21. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ $\qquad \left[x^2 + y^2 = Cy\right]$

22. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \left[x^2 = C^2 + 2Cy)\right]$

23. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$ $\qquad \left[(x+y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}\right]$

24. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ $\qquad \left[y^2 - x^2 = Cy\,,\; y = 0\right]$

25. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$ $\qquad \left[\ln Cx = \operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x})\right]$ $\left[y = xe^{2k\pi}, k \in Z\right]$

26. $y + \sqrt{x^2+y^2} - xy' = 0\,,\; y(1) = 0$ $\qquad \left[y = \frac{x^2-1}{2}\right]$

27. $(xy' - y)\operatorname{arcotg}\frac{y}{x} = x\,,\; y(1) = 0$ $\qquad \left[\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arcotg}\frac{y}{x}}\right]$

28. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0\,,\; y(0) = 1$ $\qquad \left[y^3 = y^2 - x^2\right]$

29. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}\,,\; y(1) = 1$ $\qquad \left[y = -x\right]$

## 10.3 Variace konstant

*Příklad 30* : Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x \,.$$

Teorie

Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$y' \cos^2 x + y = 0 \;\Rightarrow\; \ln|y| + \operatorname{tg} x = \ln C \;\Rightarrow\; y = Ce^{-tgx} \,.$$

Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-tgx}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(C'(x)e^{-tgx} + C(x)e^{-tgx}\frac{1}{\cos^2 x}) \cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = \operatorname{tg} x \,.$$

tedy

$$C'(x)e^{-tgx} \cos^2 x = \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; C(x) = e^{tgx}(tgx - 1) + K \,.$$

Obecné řešení rovnice má tvar $y = Ce^{-tgx} + \operatorname{tg} x = 1$ .

*Příklad 31* : Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$xy' - 2y = 2x^3 \,.$$

Teorie

1.krok Vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$xy' - 2y = 0 \;\Rightarrow\; \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C \;\Rightarrow\; y = Cx^2 \,.$$

2.krok Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)x^2$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$C'(x)x^2 + C(x)\,2x - 2\,C(x)\,x = 2x^3 \,.$$

tedy

$$C'(x)x^2 = 2x^3 \;\Rightarrow\; C(x) = x^2 \,.$$

Obecné řešení rovnice má tvar $y = Cx^2 + x^4$ .

32. $xy' + y + 1 = 0$ $\qquad [y = Cx - 1]$

33. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$ $\qquad \left[xy = (x^3 + C)e^{-x}\right]$

34. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ $\qquad [y = e^x(\ln|x| + C)]$

35. $y = x(y' - x\cos x)$ $\qquad [y = x(C + \sin x)]$

36. $(xy' - 1)\ln x = 2y$ $\qquad \left[y = C\ln^2 x - \ln x\right]$

37. $y\sin x + y'\cos x = 1$ $\qquad [y = \sin x + C\cos x]$

38. $(2e^y - x)y' = 1$ $\qquad \left[x = e^y + Ce^{-y}\right]$

39. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ $\qquad \left[x = Cy^3 + y^2\right]$

40. $y' = \frac{1}{x\sin y + 2\sin 2y}$ $\qquad \left[x = 8\sin^2\frac{y}{2} + Ce^{-\cos y}\right]$

41. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^{-3}}\,,\ y(1) = 1$ $\qquad \left[y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right]$

42. $y' - 2xy = 1\,,\ y(0) = 0$ $\qquad \left[y = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt\right]$

43. $2\sqrt{x}y' - y = -\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\,,\ y$ je omezená pro $\to \infty$ $\qquad [y = \cos\sqrt{x}]$

44. $2x^2y' - xy = 2x\cos x - 3\sin x\,,\ y \to 0$ pro $x \to \infty$ $\qquad \left[y = \frac{\sin x}{x}\right]$

45. $(1 + x^2)\ln(1 + x^2)y' - 2xy = \ln(1 + x^2) - 2x\operatorname{arcotg} x$ $\qquad [y = \operatorname{arcotg} x]$
$\left[y \to -\frac{\pi}{2}\right.$ pro $\left.x \to -\infty\right]$

## 10.4 Bernoulliova rovnice

*Příklad 46* : Převodem na lineární diferenciální rovnici vyřešte

$$x\,y' - y = x^2\,y^{-1}\,.$$

Teorie

Substitucí $z = y^2 \ \Rightarrow\ z' = 2yy'$ dostaneme

$$xy'y - y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad xz' - 2z = 2x^2\,.$$

Vyřešíme lineární rovnici

| 1. hom. rovnice | 2. part. řešení |
|---|---|
| $xz' - 2z = 0$ | $x\,C'\,x^2 = 2x^2$ |
| $z_h = C\,x^2$ | $C = \ln\lvert x\rvert^2$ |
| | $z_p = \ln x^2 \cdot x^2$ |

3. obecné řešení

$z = C\,x^2 + \ln(x^2)\,x^2 \ \Rightarrow \qquad y^2 = C\,x^2 + \ln(x^2)\,x^2\,.$

47. $y' + 2y = y^2e^x$ $\qquad \left[y(e^x + Ce^{2x}) = 1, y = 0\right]$

48. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ $\qquad \left[y = x^4\ln^2 Cx, y = 0\right]$

49. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$ $\qquad \left[y^{-2} = x^4(2e^x + C), y = 0\right]$

50. $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$ $\qquad \left[\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(C - \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))\right]$

# 11 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

## 11.1 Systémy funkcí

*Příklad 51* : Máme rozhodnout o lineární závislosti nebo nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ na intervalu $I = (-\infty, \infty)$ .

Teorie

Budeme zkoumat, kdy $\forall\, x \in I$ nastane rovnost

$$c_1\, 1 + c_2\, x + c_3\, x^2 = 0\,.$$

Postupně pro $x = 0$ dostaneme $c_1 = 0$, pak pro $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme $c_2 + c_3 = 0$ a $-c_2 + c_3 = 0$. Odtud plyne $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Podle definice jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé. Wronskián daných funkcí je

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,.$$

Tedy i podle věty 10.4 jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé.

Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti následujících funkcí

52. $1, 2, x, x^2$ [závislé]

53. $e^x, xe^x, x^2e^x$ [nezávislé]

54. $5, \cos^2 x, \sin^2 x$ [závislé]

55. $\cos x, \cos(x+1), \cos(x-2)$ [závislé]

56. $1, \arcsin x, \arccos x$ [závislé]

57. $\cos x, \sin x, \cos 2x$ [nezávislé]

Najděte Wronskián funkcí

58. $1, x$ $[1]$

59. $e^{-x}, xe^{-x}$ $\left[e^{-2x}\right]$

60. $2, \cos x, \cos 2x$ $\left[-8\sin^3 x\right]$

61. $4, \sin^2 x, \cos 2x$ $[0]$

62. $e^{-3x}\sin 2x, e^{-3x}\cos 2x$ $\left[-2e^{-6x}\right]$

## 11.2 Eulerova rovnice

Řešení Eulerovy rovnice $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x\, y' + a_0 y = 0$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$, (popř. $x^\lambda \ln x, \ldots, x^\lambda \ln^{k-1} x$) $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorie

<u>*Příklad 63*</u> : Dosazením funkce $y(x) = x^\lambda$ do rovnice

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

dostaneme $x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 4x\lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0$, tedy

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6)\, x^\lambda = 0\,.$$

Tato rovnost je splněna (při $x \neq 0$) pro kořeny $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, uvedeného polynomu. Funkce $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ tvoří fundamentální systém dané rovnice a její obecné řešení má tvar

$$y = C_1\, x^2 + C_2\, x^3\,.$$

<u>*Příklad 64*</u> : Podobně při řešení rovnice $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ dostaneme $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ a fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$. Obecné řešení má tedy tvar $y = C_1\, x^2 + C_2\, x^2 \ln x$.

<u>*Příklad 65*</u> : Řešení rovnice $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$. Po dosazení do rovnice dostaneme $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. Do fundamentálního systému tedy patří funkce $y_1(x) = x^{-1+i}$, $y_2(x) = x^{-1-i}$ nebo $y_1(x) = x^{-1}\cos(\ln x)$, $y_2(x) = x^{-1}\sin(\ln x)$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = \frac{C_1}{x}\cos(\ln x) + \frac{C_2}{x}\sin(\ln x)\,.$$

66. $x^2y'' - 3xy' - y = 0$ $\quad \left[y = C_1 x^{2+\sqrt{5}} + C_2 x^{2-\sqrt{5}}\right]$

67. $x^3y''' + x^2y'' = 0$ $\quad [y = C_1 + C_2 x + C_3 x \ln x]$

68. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$ $\quad \left[y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-3}\right]$

69. $x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$ $\quad \left[y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-4}\right]$

70. $x^3y''' - 6y = 0$ $\quad \left[y = C_1 x^3 + C_2 \cos(\sqrt{2}\ln x) + C_3 \sin(\sqrt{2}\ln x)\right]$

71. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$ $\quad [y = x]$

### 11.3 Rovnice s konstantními koeficienty

*Příklad 72* : Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$y'' - y' - 12y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ (popř. $x\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$), kde číselný parametr $\lambda$ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$\lambda^2 - \lambda + 12 = 0.$$

Tedy $\lambda_1 = -4$ , $\lambda_2 = 3$ , fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi $\mathrm{e}^{-4x}$, $\mathrm{e}^{3x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Teorie

*Příklad 73* : Rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ . Fundamentální systém rovnice je nyní tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$ , $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

*Příklad 74* : K rovnici $y'' + 4y = 0$ přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 2i$ , $\lambda_2 = -2i$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2ix}$ , $y_2(x) = \mathrm{e}^{-2ix}$ nebo $y_1(x) = \cos 2x$ , $y_2(x) = \sin 2x$ . Obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\,.$$

75. $y''' - y'' - y' + y = 0\,;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$ $\quad [y = e^x(1 + x)]$

76. $y'' - 4y' + 3y = 0\,;\ \ y(0) = 6,\ y'(0) = 10$ $\quad \left[y = 4e^x + 2e^{3x}\right]$

77. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}\right]$

78. $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ $\quad \left[y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x)\right]$

79. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ $\quad \left[y = e^x(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})\right]$

80. $y''' - 8y = 0$ $\quad \left[y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x\right]$

81. $y^{(4)}+4y'''+10y''+12y'+5y = 0$ $\left[y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)e^{-x}\right]$

82. $y'' - 2y' + 2y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$ $\quad [y = e^x \sin x]$

83. $y'' - 2y' + 3y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 3$ $\quad \left[y = e^x(\cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x)\right]$

## 11.4 Metoda snižování řádu

Pokud známe jedno řešení $y_1(x)$ homogenní rovnice, pak další partikulární řešení hledáme ve tvaru $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$ .

Teorie

*Příklad 84* : Rovnice $(\sin x - \cos x)\, y'' - 2\sin x\, y' + (\cos x + \sin x)\, y = 0$ má jedno řešení $y_1 = \mathrm{e}^x$ . Pro druhé řešení $y(x) = \mathrm{e}^x z(x)$, platí $y' = \mathrm{e}^x(z + z')$, $y'' = \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'')$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(\sin x - \cos x)\, \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'') - 2\sin x\, \mathrm{e}^x(z + z') + (\cos x + \sin x)\, \mathrm{e}^x z = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\sin x - \cos x)\,(2z' + z'') - 2\sin x\, z' = 0 \;\Rightarrow (u = z')$$

$$(\sin x - \cos x)\, u' - \cos x\, 2u = 0 \Rightarrow (\sin x - \cos x)\, du = \cos x\, 2u\, dx \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{2u}\, du = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx\,; \qquad \text{vypočteme integrál vpravo}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x + \cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\, dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} v = \sin x - \cos x \\ dv = (\cos x + \sin x)\, dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int -1\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv = -\frac{x}{2} + \ln|\sin x - \cos x| + C\,;$$

tedy $\quad \dfrac{1}{2}\ln u = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln|\sin x - \cos x| + \hat{C} \;\Rightarrow\; u = C\mathrm{e}^{-x}(\sin x - \cos x)\ (= z') \;\Rightarrow$

$z = C\mathrm{e}^{-x}(-\sin x) \;\Rightarrow y = \mathrm{e}^x C\mathrm{e}^{-x}(-\sin x) = -C\sin x$ a obecné řešení má tvar

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2 \sin x\,.$$

Nalezněte obecné řešení následujících rovnic, jestliže znáte partikulární řešení

85. $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0\,;\;\; y_1 = \sqrt{1+x}$ $\quad \left[y = C_1\sqrt{1+x} + C_2\sqrt{1-x}\right]$

86. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0\,;\;\; y_1 = 1 + \frac{1}{x}$ $\quad \left[y = C_1(1 + \frac{1}{x}) + C_2(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x}\ln|x+1|)\right]$

87. $xy'' + 2y' - xy = 0\,;\;\; y_1 = \frac{e^x}{x}$ $\quad [xy = C_1e^{-x} + C_2e^x]$

88. $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2\, x)y = 0\,;\;\; y_1 = \mathrm{tg}\, x$ $\quad [y = C_1\,\mathrm{tg}\, x + C_2(1 + x\,\mathrm{tg}\, x)]$

89. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0\,;\;\; y_1 = e^x - 1$ $\quad \left[y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x+1}\right]$

90. $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$ $\left[y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3(x\ln|x| + 1)\right]$ $\left[y_1 = x, y_2 = \frac{1}{x}\right]$

91. $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ $\left[y = C_1x + C_2e^x + C_3(x^2 - 1)\right]$ $[y_1 = x, y_2 = e^x]$

## 11.5 Nehomogenní rovnice

Teorie

*Příklad 92*: Metodou variace konstant vyřešíme rovnici
$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}\,.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ (viz metoda charakteristické rovnice, příklad (72))
$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow y_h(x) = C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x\,.$$
2. Partikulární řešení $y_p$ nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x\,.$$
Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:
$$\begin{array}{rcl} C_1'\cos 3x + C_2'\sin 3x & = & 0 \;\Rightarrow\; 3C_1'\cos 3x\sin 3x + 3C_2'\sin^2 3x \;=\; 0\,,\\ -3C_1'\sin 3x + 3C_2'\cos 3x & = & \frac{1}{\sin 3x} \Rightarrow -3C_1'\sin 3x\cos 3x + 3C_2'\cos^2 3x \;=\; \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\,. \end{array}$$
Odtud po sečtení rovnic dostaneme $3C_2' = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|$ a z první rovnice plyne $C_1'\cos 3x + \frac{\cos 3x}{3} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{x}{3}$. Partikulární řešení má tvar
$$y_p(x) = -\frac{x}{3}\,\cos x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\,\sin 3x\,.$$
3. Obecným řešením úlohy je funkce
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x - \frac{x}{3}\,\cos 3x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\,\sin 3x\,.$$

Řešte rovnice

93. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $\quad [y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2)]$

94. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$ $\quad \left[y = e^x(C_1x + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x\operatorname{arcotg} x)\right]$

95. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$ $\quad \left[y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}\right]$

96. $y'' + y + \operatorname{cotg}^2 x = 0$ $\quad \left[y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos(x)\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|\right]$

Vyřešte rovnici $y'' - y' = f(x)$, jestliže

97. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $\quad [y = e^x(x + C_1) - (e^x+1)\ln(e^x+1) + C_2]$

98. $f(x) = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ $\quad \left[y = \frac{1}{2}e^x(\arcsin(e^x) + e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C_1) + \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + C_2\right]$

99. $f(x) = e^{2x}\cos(e^x)$ $\quad [y = C_1e^x - \cos(e^x) + C_2]$

### 11.6 Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení

Teorie

<u>*Příklad 100*</u> : Pomocí odhadu tvaru partikulárníbo řešení vyřešíme rovnici

$$y'' - 5y' = (x-1)^2\,.$$

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ a homogenní řešení má tvar
$$y_h = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{5x}\,.$$

2. Z rovnosti
$$(x-1)^2 = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$
vyplývá $a = 0$, $b = 0$, $n = 2$, $m = 0$ $\Rightarrow$ $k = 2$, $R_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde $a_2$, $a_1$, $a_0$ jsou konstanty. Kritické číslo $a + i\,b = 0$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.

   Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = x\,(a_2x^2 + a_1x + a_0)\,,$$
potom $y_p'(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 + x\,(2a_2x + a_1) = 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0$, $y_p''(x) = 6a_2x + 2a_1$. Po dosazení $y_p', y_p''$ do dané rovnice dostaneme:
$$6a_2x + 2a_1 - 5\,(3a_2x^2 + 2a_1x + a_0) = (x-1)^2\,,$$
$$-15a_2x^2 + (6a_2 - 10a_1)x + 2a_1 - 5a_0 = x^2 - 2x + 1\,,$$
$$\Rightarrow \quad a_2 = \tfrac{-1}{15}\,,\ a_1 = \tfrac{4}{25}\,,\ = a_0 = \tfrac{-17}{125}\,,$$
a partikulárním řešením je funkce $\quad y_p(x) = x\,(\tfrac{-1}{15}x^2 + \tfrac{4}{25}x + \tfrac{-17}{125})\,.$

3. Obecné řešení má tvar $\quad y(x) = C_1 + C_2\,x\mathrm{e}^{5x} + x\,(\tfrac{-1}{15}x^2 + \tfrac{4}{25}x + \tfrac{-17}{125})\,.$

Metodou odhadu řešte rovnice

101. $y'' + y = 4xe^x$ $\qquad [y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x-2)e^x]$

102. $y'' - y = 2e^x - x^2$ $\qquad \left[y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2\right]$

103. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$ $\qquad \left[y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})e^x\right]$

104. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ $\qquad \left[y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{\sin x}{10} + \frac{3\cos x}{10}\right]$

105. $y'' + y = 4\sin x$ $\qquad [y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x]$

106. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$ $\qquad \left[y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (\frac{x}{10} - \frac{12}{100})\cos x - (\frac{3x}{10} + \frac{34}{100})\sin x\right]$

107. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$ $\left[y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{5}e^{-4x} - (\frac{x}{6} + \frac{1}{36})e^{-x}\right]$

108. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$ $\left[y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}(\frac{6}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x)\right]$

109. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$ $\left[y = (C_1 + C_2x + x^3)e^x\right]$

110. $y'' + y = x\sin x$ $\left[y = (C_1 - \frac{x^2}{4})\cos x + (C_2 + \frac{x}{4})\sin x\right]$

Řešte rovnice s počáteční podmínkou

111. $y'' + 9y = 6e^{3x}$; $y(0) = y'(0) = 0$ $\left[y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x - e^{3x})\right]$

112. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$ $\left[y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x+1)^2e^x\right]$

113. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$; $y(0) = y'(0) = 0$ $\left[y = (x + \frac{3}{5})e^{-3x} + \frac{1}{5}(4\sin x - 3\cos x)\right]$

114. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = y'(0) = 1$ $\left[y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)\right]$

115. $y'' + y = 2\cos x$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ $[y = \cos x + x\sin x]$

Odhadněte partikulární řešení následujících rovnic

116. $y'' - 7y' = (x-1)^2$ $\left[A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x\right]$

117. $y'' + 7y' = e^{-7x}$ $\left[-\frac{1}{49}C_1e^{-7x} + C_2 - \frac{1}{7}xe^{-7x}\right]$

118. $y'' - 8y' + 16y = (10 - x)e^{4x}$ $\left[(A_1x^3 + A_2x^2)e^{4x}\right]$

119. $y'' + 25y = \cos 5x$ $[x(A\cos 5x + B\sin 5x)]$

120. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ $\left[(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}\right]$

121. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$ $\left[x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}\right]$

122. $y^{(4)} - y''' = 4$ $\left[Ax^3\right]$

123. $y''' + 2y'' + y' = (2x+1)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x$ $\left[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + \right]$
$\left[+(Dx^2 + Ex + F)\sin x\right]$

124. $y''' - y' = e^x\sin x + 2x^2$ $[e^x(A\cos x + B\sin x) +]$
$\left[+x(Cx^2 + Dx + E)\right]$

125. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(x\cos x + \sin x)$ $\left[x^2e^x\{(Ax + B)\cos x +\right]$
$[+(Cx + D)\sin x\}]$

126. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3\cos 2x + 1$ $\left[x^2(A\cos 2x + B\sin 2x) + C\right]$
$[y = 3\cos 2x + 1]$

## 11.7 Okrajové úlohy

Teorie

*Příklad 127*: Pomocí charakteristické rovnice a dosazením okrajových podmínek vyřešíme smíšenou okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} &y'' - 2y' - 8y = 0\,, \qquad x \in (0,1)\,,\\ &y(0) = 1\,, \quad y'(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4\,,\ \lambda_2 = -2$ a obecným řešením úlohy je funkce $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}$. Z okrajových podmínek dostaneme

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2\,,\\ 0 &= 4C_1\mathrm{e}^4 - 2C_2\mathrm{e}^{-2}\,, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{1+2\mathrm{e}^6}\,,\\ C_2 &= \tfrac{2\mathrm{e}^6}{1+2\mathrm{e}^6}\,. \end{aligned}$$

Řešením okrajové úlohy je funkce $y(x) = \frac{1}{1+2\mathrm{e}^6}\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{2\mathrm{e}^6}{1+2\mathrm{e}^6}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Řešte následující okrajové úlohy

128. $y'' - y = 0\,;\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ $\left[y = \frac{\sinh x}{\sinh 2\pi}\right]$

129. $y'' + y = 0\,;\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ [nemá řešení]

130. $y'' - k^2y = 0\,;\ y(0) = v_1, y(x_0) = v_2$ $\left[y = \frac{1}{\sinh kx_0}(v_1 \sinh k(x_0 - x) + v_2 \sinh kx)\right]$

131. $y'' - \alpha^2 y = 0\,;\ y(0) = v, y'(x_0) = 0$ $\left[y = v\frac{\cosh(x_0 - x)}{\cosh \alpha x_0}\right]$

132. $y'' - \alpha^2 sy = 0\,;\ y(0) = \frac{1}{s}, y'(x_0) = 0$ $\left[s < 0; y = \frac{\cos\alpha\sqrt{-s}(x_0 - x)}{s\cos\alpha\sqrt{-s}x_0} \text{ pro } x_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}}\right]$
$\left[\text{pro } x_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}} \text{ nemá řešení; } s > 0; y = \frac{\cosh\alpha\sqrt{s}(x_0 - x)}{s\cosh\alpha\sqrt{s}x_0}; k = 1, 2, 3, \ldots\right]$

133. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq 0, y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\sinh\lambda x}{\lambda\sinh\lambda}\right]$

134. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq, y(0) = 0, y'(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\sinh\lambda x}{\lambda^2\cosh\lambda}\right]$

135. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq, y'(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\cosh\lambda x}{\lambda\cosh\lambda}\right]$

136. $xy'' + y' = 0; y(1) = \alpha y'(1)\,;\ y(x)$ je omezená pro $x \to \infty$ $[y = 0]$

137. $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0; y(0) = y''(0) = 0, y(\pi) = y''(\pi) = 0$ $[y = C\sin kx$ pro $\lambda = k]$
$[k = 1, 2, 3, \ldots \quad y = 0$ pro ostatní $\lambda]$

## 11.8 Úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce

Teorie

<u>*Příklad 138*</u> : Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0\,.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{kx}$, potom charakteristická rovnice má tvar $k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}\,.$

- Pro $\lambda < 0$ je $k_1 = \sqrt{-\lambda}\,,\ k_2 = -\sqrt{-\lambda}$ a obecné řešení má tvar

  $$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x} \ \Rightarrow\ y'(x) = \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}\,.$$

  Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty $C_1,\ C_2$

  $$\left.\begin{array}{l} 0 = C_1 + C_2\,, \\ 0 = \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\,, \end{array}\right\}\ C_1 = 0,\ C_2 = 0 \ \Rightarrow\ y = 0\,.$$

- Pro $\lambda = 0$ má obecné řešení tvar $y(x) = C_1 + C_2\,x \ \Rightarrow\ y'(x) = C_2$ a z okrajových podmínek dostaneme

  $$C_1 \in \mathbb{R}\,,\ C_2 = 0 \ \Rightarrow\ y = C_1\,.$$

- Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

  $$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \ \Rightarrow\ y'(x) = -\sqrt{\lambda}\,C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\,C_2 \cos\sqrt{\lambda}x\,.$$

  Z okrajových podmínek plyne

  $$\left.\begin{array}{l} 0 = C_2\,, \\ 0 = -C_1\,\sin\sqrt{\lambda}\pi\,, \end{array}\right\}\ \sqrt{\lambda}\pi = n\pi\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

  Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel**

  $$\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

  a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

  $$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}.$$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y'' + \lambda y = 0$, je-li

139. $x \in < 0, \pi >, y(0) = y'(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \sin\frac{2K-1}{2}x, K \in N\right]$

140. $x \in < 0, \pi >, y'(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \cos\frac{2K-1}{2}x, K \in N\right]$

141. $x \in < 1, 2 >, y(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \sin K\pi x, K \in N\right]$

142. $x \in < 1, 2 >, y(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \cos\frac{2K-1}{2}\pi x, K \in N\right]$

143. $x \in < 1, 2 >, y'(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \sin\frac{2k-1}{2}\pi x, K \in N\right]$

144. $x \in < 1, 2 >, y'(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \cos K\pi x; K = 0, 1, 2, \ldots\right]$

145. $x \in < a, b >, y(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{(b-a)^2}, y_K = \sin\frac{K\pi(x-a)}{b-a}, K \in N\right]$

146. $x \in < a, b >, y(a) = y'(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \sin\frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N\right]$

147. $x \in < a, b >, y'(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \cos\frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N\right]$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce následujících okrajových úloh

148. $y'' + 2y' + \lambda y = 0\,;\ x \in < 0, l >,\ y(0) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = 1 + \frac{K^2\pi^2}{l^2}\right]$
$\left[y_K = e^{-x}\sin\frac{K\pi x}{l}, K \in N\right]$

149. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0\,;\ x \in < 1, l >,\ y(1) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{\ln^2 l}, y_K = \sin\frac{K\pi \ln x}{\ln l}\right]$

150. $y'' + (\lambda + 1)y = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2 - 1, K \in N\right]$
$x \in < 0, 1 >,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) - y'(1) = 0$ $\left[y_K = \sin(\mathrm{arcotg}(K\pi) + K\pi x)\right]$

151. $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0\,;\ y(l) = 0, y$ je omezená pro $x \to 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{l^2}, y_K = \frac{1}{x}\sin\frac{K\pi x}{l}\right]$

# 12 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Teorie

<u>*Příklad 152*</u> : Určíme fundamentální matici a obecné řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2 \,. \end{aligned}$$

Matice soustavy je

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a její vlastní čísla dostaneme z rovnice

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 5\,.$$

K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{h}_1 = (1, -1)^T \quad,$$

$$\lambda_2 = 5: \quad (5\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{h}_2 = (1, 3)^T \quad.$$

Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{5x} \\ -\mathrm{e}^x & 3\,\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} = C_1\,\vec{h}_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\vec{h}_2\,\mathrm{e}^{5x}\,.$$

## 12.1 Soustavy homogenních diferenciálních rovnic

153. $y_1' = y_1 - y_2$ $\qquad$ $\left[y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}\right]$
$y_2' = y_2 - 4y_1$ $\qquad$ $\left[y_2 = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}\right]$

154. $y_1' + y_1 - 8y_2 = 0$ $\qquad$ $\left[y_1 = 2C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-3x}\right]$
$y_2' - y_1 - y_2 = 0$ $\qquad$ $\left[y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}\right]$

155. $y_1' = y_1 + y_2$ $\qquad$ $\left[y_1 = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right]$
$y_2' = 3y_2 - 2y_1$ $\qquad$ $\left[y_2 = e^{2x}\{(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x\}\right]$

156. $y_1' = y_1 - 3y_2$ $\quad [y_1 = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)]$
$y_2' = 3y_1 + y_2$ $\quad [y_2 = e^x(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)]$

157. $y_1' + y_1 + 5y_2 = 0$ $\quad [y_1 = (2C_2 - C_1)\cos 2x - (2C_1 + C_2)\sin 2x]$
$y_2' - y_1 - y_2 = 0$ $\quad [y_2 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$

158. $y_1' = 2y_1 + y_2$ $\quad \left[y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{3x}\right]$
$y_2' = 4y_2 - y_1$ $\quad \left[y_2 = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^{3x}\right]$

159. $y_1' = 3y_1 - y_2$ $\quad [y_1 = (C_1 + C_2 x)e^x]$
$y_2' = 4y_1 - y_2$ $\quad [y_2 = (2C_1 - C_2 + 2C_2 x)e^x]$

160. $y_1' = y_1 + y_3 - y_2$ $\quad \left[y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}\right]$
$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ $\quad \left[y_2 = C_1 e^x - 3C_3 e^{-x}\right]$
$y_3' = 2y_1 - y_2$ $\quad \left[y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 5C_3 e^{-x}\right]$

161. $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$ $\quad \left[y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}\right]$
$y_2' = y_1 + y_2 + y_3$ $\quad \left[y_2 = C_1 e^x - 2C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}\right]$
$y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3$ $\quad \left[y_3 = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{5x}\right]$

162. $y_1' = 4y_2 - 2y_3 - 3y_1$ $\quad \left[y_1 = C_1 e^x + C_3 e^{-x}\right]$
$y_2' = y_3 + y_1$ $\quad \left[y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\right]$
$y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 5y_3$ $\quad \left[y_3 = 2C_2 e^{2x} - C_3 e^{-x}\right]$

163. $y_1' = y_1 - y_2 - y_3$ $\quad [y_1 = e^x(2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x)]$
$y_2' = y_1 + y_2$ $\quad [y_2 = e^x(C_1 - C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)]$
$y_3' = 3y_1 + y_3$ $\quad [y_3 = e^x(-C_1 - 3C_3 \cos 2x + 3C_3 \sin 2x]$

164. $y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3$ $\quad \left[y_1 = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3)e^{3x}\right]$
$y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3$ $\quad \left[y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}\right]$
$y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3$ $\quad \left[y_3 = C_1 e^{2x} + C_3 e^{3x}\right]$

165. $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$ $\quad \left[y_1 = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x}\right]$
$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ $\quad [y_2 = (C_1 - 2C_2 + C_2 x)e^x]$
$y_3' = 2y_3 - y_2$ $\quad \left[y_3 = (C_1 - C_2 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x}\right]$

166. $y_1' = 4y_1 - y_2$ $\quad \left[y_1 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{2x}\right]$
$y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3$ $\quad \left[y_2 = \{2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)x + 2C_3 x^2\}e^{2x}\right]$
$y_3' = y_1 + y_3$ $\quad \left[y_3 = \{C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)x + C_3 x^2\}e^{2x}\right]$

## 12.2 Soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic

*Příklad 167*: Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + \mathrm{e}^x \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2\,. \end{aligned}$$

hledáme metodou **variace konstant**.

- Nejdříve vyřešíme homogenní soustavu (viz příklad 152). Řešení homogenní soustavy má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\vec{C} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x + C_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{5x}\,,$$

  kde $\mathbb{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy a $\vec{C}$ je vektor konstant.

- Partikulární řešení dané rovnice hledáme ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\vec{C}(x)$, kde $\vec{C}(x)$ je vektor funkcí. Po dosazení do soustavy dostaneme $\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)$. Protože $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$, tak platí

$$C_1'(x)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x + C_2'(x)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{5x} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^x\\0\end{pmatrix}$$

  Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} C_1'\,\mathrm{e}^x + C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= \mathrm{e}^x \\ -C_1'\,\mathrm{e}^x + 3C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 4C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= \mathrm{e}^x \\ -4C_1'\,\mathrm{e}^x &= -3\mathrm{e}^x \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} C_2 &= \tfrac{-1}{16}\,\mathrm{e}^{-4x} \\ C_1 &= \tfrac{3}{4}\,x \end{aligned}$$

  a partikulární řešení soustavy má tvar

$$y_p(x) = \frac{3}{4}\,x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x + \frac{-1}{16}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\mathrm{e}^x$$

- Obecným řešením nehomogenní soustavy je funkce

$$\vec{y}(x) = \vec{y}(x)_h + \vec{y}_p(x) = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x + C_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{5x} + \tfrac{3}{4}\,x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x + \tfrac{-1}{16}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\mathrm{e}^x\,.$$

168. $y_1' = y_2 + 2e^x$ $\quad\left[y_1 = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x - x^2 - 2\right]$
  $y_2' = y_1 + x^2$ $\quad\left[y_2 = C_1e^x - C_2e^{-x} + (x-1)e^x - 2x\right]$

169. $y_1' = y_2 - 5\cos x$ $\quad\left[y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - 2\sin x - \cos x\right]$
  $y_2' = 2y_1 + y_2$ $\quad\left[y_2 = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x} + \sin x + 3\cos x\right]$

170. $y_1' = 4y_1 + y_2 - e^{2x}$ $\quad\big[y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + (x+1)e^{2x}\big]$
$y_2' = y_2 - 2y_1$ $\quad\big[y_2 = -2C_1e^{2x} - C_2e^{3x} - 2xe^{2x}\big]$

171. $y_1' = 2y_2 - y_1 + 1$ $\quad[y_1 = (C_1 + 2C_2x)e^x - 3]$
$y_2' = 3y_2 - 2y_1$ $\quad[y_2 = (C_1 + C_2 + 2C_2x)e^x - 2]$

172. $y_1' = 5y_1 - 3y_2 + 2e^{3x}$ $\quad\big[y_1 = C_1e^{2x} + 3C_2e^{4x} - e^{-x} - 4e^{3x}\big]$
$y_2' = y_1 + y_2 + 5e^{-x}$ $\quad\big[y_2 = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} - 2e^{-x} - 2e^{3x}\big]$

173. $y_1' = 2y_1 - 4y_2$ $\quad\big[y_1 = 4C_1e^x + C_2e^{-2x} - 4xe^x\big]$
$y_2' = y_1 - 3y_2 + 3e^x$ $\quad\big[y_2 = C_1e^x + C_2e^{-2x} - (x-1)e^x\big]$

174. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\quad\big[y_1 = C_1e^{3x} + 3x^2 + 2x + C_2\big]$
$y_2' = y_2 - 2y_1 + 18x$ $\quad\big[y_2 = -C_1e^{3x} + 6x^2 - 2x + 2C_2 - 2\big]$

175. $y_1' = y_1 + 2y_2 + 16xe^x$ $\quad\big[y_1 = 2C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - (12x+13)e^x\big]$
$y_2' = 2y_1 - 2y_2$ $\quad\big[y_2 = C_1e^{2x} - 2C_2e^{-3x} - (8x+6)e^x\big]$

176. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\quad\big[y_1 = (C_1 + C_2x - x^2)e^x\big]$
$y_2' = y_1 + 2e^x$ $\quad\big[y_2 = \{C_1 - C_2 + (C_2+2)x - x^2\}e^x\big]$

177. $y_1' = y_1 - y_2 + 8x$ $\quad[y_1 = C_1\cos 2x - C_2\sin 2x + 2x + 2]$
$y_2' = 5y_1 - y_2$ $\quad[y_2 = (C_1 + 2C_2)\cos 2x + (2C_1 - C_2)\sin 2x + 10x]$

178. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\quad\big[y_1 = C_1e^x + C_2e^{3x} + e^x(2\cos x - \sin x)\big]$
$y_2' = 2y_2 - y_1 - 5e^x\sin x$ $\quad\big[y_2 = C_1e^x - C_2e^{3x} + e^x(3\cos x + \sin x)\big]$

179. $y_1' = y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1$ $\quad[y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + \operatorname{tg} x]$
$y_2' = -y_1 + \operatorname{tg} x$ $\quad[y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x + 2]$

180. $y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x-1}$ $\quad[y_1 = C_1 + 2C_2e^{-x} + 2e^{-x}\ln|e^x - 1|]$
$y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x-1}$ $\quad[y_2 = -2C_1 - 3C_2e^{-x} - 3e^{-x}\ln|e^x - 1|]$

181. $y_1' = y_1 - y_2 + \frac{1}{\cos x}$ $\quad[y_1 = (C_1+x)\cos x + (C_2+x)\sin x + (\cos x - \sin x)\ln|\cos x|]$
$y_2' = 2y_1 - y_2$ $\quad[y_2 = (C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x + 2\cos x\ln|\cos x| + 2x\sin x]$

182. $y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 - x + 2$ $\quad[y_1 = C_1e^x + C_2\sin x + C_3\cos x]$
$y_2' = 1 - y_1$ $\quad[y_2 = x - C_1e^x + C_2\cos x - C_3\sin x]$
$y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - x + 1$ $\quad[y_3 = 1 + C_2\sin x + C_3\cos x]$

Najděte partikulární řešení následujících soustav diferenciálních rovnic

183. $y_2' = y_2 + y_3\,;\ y_2(0) = 0, y_3(0) = -1$ $\quad\big[y_2 = e^{2x} - e^{3x}\big]$
$y_3' = -2y_2 + 4y_3$ $\quad\big[y_3 = e^{2x} - 2e^{3x}\big]$

184. $y_2' = 3y_2 - y_3\,;\; y_2(0) = 1, y_3(0) = 5$ $\quad\left[y_2 = e^{-2x}\right]$
$y_3' = 10y_2 - 4y_3$ $\quad\left[y_3 = 5e^{-2x}\right]$

185. $y_1' = 3y_1 + 8y_2\,;\; y_1(0) = 6, y_2(0) = -2$ $\quad[y_1 = 2(2e^x + e^{-x})]$
$y_2' = -3y_2 - y_1$ $\quad[y_2 = -e^x - e^{-x}]$

186. $y_1' = e^x - y_2 - 5y_1\,;\; y_1(0) = \frac{119}{900}, y_2(0) = \frac{211}{900}$ $\quad\left[y_1 = \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x}\right]$
$y_2' = e^{2x} + y_1 - 3y_2$ $\quad\left[y_2 = \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x}\right]$

187. $y_1' = y_2\,;\; y_1(0) = y_2(0) = 1$ $\quad[y_1 = \cos x + \sin x]$
$y_2' = -y_1$ $\quad[y_2 = \cos x - \sin x]$

188. $y_1' = 4y_1 - 5y_2\,;\; y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ $\quad\left[y_1 = (1 - 2x)e^{-2x}\right]$
$y_2' = y_1$ $\quad\left[y_2 = xe^{-2x}\right]$

189. $y_1' = y_1 + y_2 + x\,;\; y_1(0) = -\frac{7}{9}, y_2(0) = -\frac{5}{9}$ $\quad\left[y_1 = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{9}\right]$
$y_2' = y_1 - 2y_2 + 2x$ $\quad\left[y_2 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{9}\right]$

190. $y_1' = y_1 + 5y_2\,;\; y_1(0) = -2, y_2(0) = 1$ $\quad[y_1 = (\sin x - 2\cos x)e^{-x}]$
$y_2' = -3y_2 - y_1$ $\quad[y_2 = e^{-x}\cos x]$

191. $2y_1' = 6y_1 - y_2 - 6x^2 - x + 3\,;\; y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$ $\quad\left[y_1 = e^{2x} + e^{3x} + x^2 + x\right]$
$y_2' = 2y_2 - 2x - 1$ $\quad\left[y_2 = 2e^{2x} + x + 1\right]$

# 13 Posloupnosti a řady funkcí

## 13.1 Posloupnosti funkcí

Teorie

<u>*Příklad 192*</u> : Budeme vyšetřovat konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$ .
Pro bodovou konvergenci platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)} = 1\,.$$

Při hledání množiny $M$, na které posloupnost konverguje stejnoměrně nás zajímá rozdíl $\left|\frac{n^2}{n^2+x^2} - 1\right| = \left|\frac{n^2-n^2-x^2}{n^2+x^2}\right| = \frac{x^2}{n^2+x^2}$ . Zjistíme, kdy platí

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 0\,.$$

Pokud je $M$ omezená množina, pak $\exists\, K\, \forall\, x \in M : |x| \le K$ a platí

$$\frac{x^2}{n^2+x^2} \le \frac{K^2}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 0\,.$$

Jestliže $M = \mathbb{R}$, pak $\sup\limits_{x\in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 1\,.$

Daná posloupnost tedy konverguje stejnoměrně na každé omezené množině, na celé reálné ose konverguje bodově.

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}$, je-li

193. $f_n(x) = x^n$ $\quad [x\in(-1,1\rangle$ bodově, $x\in\langle -1+\varepsilon, 1-\varepsilon\rangle$ stejn.]

194. $f_n(x) = \frac{\operatorname{arcotg} nx}{\sqrt{n+x}}$ $\quad [D(f_1) = (-1,\infty)$, $x\in(-1,+\infty)$ stejn.]

195. $f_n(x) = x^n + x^{n+1}$ $\quad [x\in\langle -1,1\rangle$ bodově, $x\in\langle -1, 1-\varepsilon\rangle$ stejn.]

196. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ $\quad [x\in(-1,1\rangle$ bodově, $x\in\langle -1+\varepsilon, 1\rangle$ stejn.]

197. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $\quad \left[f_n \to 0 \text{ pro } x\in\mathbb{R}\,,\text{ ale } f_n(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{2}\right]$

198. $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ $\quad [x\in\mathbb{R}$ stejn.]

199. $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}$ $\quad [x\in\langle 0,+\infty)$ stejn.]

200. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ $\quad [x\in(-\infty,1)$ bodově, $x\in(-\infty, 1-\varepsilon\rangle$ stejn.]

201. $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ $\quad [x\in(-\infty,\infty)$ bodově, $x\in(-\infty,-\varepsilon\rangle \cup \langle\varepsilon,+\infty)$ stejn.]

202. $f_n(x) = x \operatorname{arcotg} nx$ $\quad [x\in\langle 0,+\infty)$ bodově i stejn.]

## 13.2 Funkční řady

Teorie

*Příklad 203* : Máme najít obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ .

Použijeme odmocninové kritérium a zkoumáme, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $\sqrt[n]{|\ln^n x|} = |\ln x| < 1$ , což je splněno pro $\frac{1}{e} < x < e$. Pro $x_1 = \frac{1}{e}$ dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, která diverguje; podobně pro $x_2 = e$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$ opět diverguje. Obor konvergence dané řady je tedy interval $(\frac{1}{e}, e)$ .

Najděte obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

204. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$ $[< 0, \infty)]$

205. $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ $[x \in R- < -1, 1 >]$

206. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ $[x \in R - \{-1, 1\}]$

207. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}$ $[|x| > 1]$

208. $f_n(x) = e^{-nx}$ $[x > 0]$

209. $f_n(x) = \frac{\cos nx}{e^{nx}}$ $[x > 0]$

210. $f_n(x) = (5 - x^2)^n$ $\left[2 < |x| < \sqrt{6}\right]$

211. $f_n(x) = n^{-\ln x^2}$ $[|x| > \sqrt{e}]$

212. $f_n(x) = n^2 e^{-nx^2}$ $[x \in R - \{0\}]$

213. $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ $[|x| < 1]$

Dokažte stejnoměrnou konvergenci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

214. $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ $[x \in R]$

215. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ $[x \geq 0]$

216. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$ $[x \in R]$

217. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ $[x \in R]$

218. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ $[x \in R]$

219. $f_n(x) = \operatorname{arcotg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ $[x \in R]$

220. $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ $[x \in R]$

221. $f_n(x) = \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}$ $[x \geq 0]$

222. $f_n(x) = (\operatorname{arcotg} \frac{x}{x^2+n^2})^2$ $[x \geq 0]$

223. $f_n(x) = \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$ $[n \geq 2, |x| \leq a, a > 0]$

224. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x^2}{n})}{x^2\sqrt{n}+1}$ $[|x| \leq a, a > 0]$

225. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{n}) \sin 2nx}{x^2+4n}$ $[x \in R]$

226. $f_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ $\left[\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\right]$

227. $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ $[\varepsilon \leq x \leq a, (\varepsilon, a > 0, \varepsilon < a)]$

## 13.3 Mocniné řady

Teorie

<u>*Příklad 228*</u> : Najdeme obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$.

Po substituci $y = x^3$ dostaneme mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n y^n$, která má poloměr konvergence $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|5^n|}} = \frac{1}{5}$. Pro $y = -\frac{1}{5}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, která diverguje; podobně pro $y = \frac{1}{5}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje. Obor konvergence původní řady $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$ je tedy interval $(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{5}})$.

Najděte poloměr konvergence řady

229. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

230. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^{2n}$ $\left[\sqrt{\frac{e}{2}}\right]$

231. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (n^3 + 2) x^{2n}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Najděte poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, je-li

232. $a_n = \frac{1}{n^2}$ $[1]$

233. $a_n = \frac{1}{n!}$ $[\infty]$

234. $a_n = \frac{(1+i)^n}{n 2^n}$ $[\sqrt{2}]$

235. $a_n = \alpha^{n^2} (0 < \alpha < 1)$ $[\infty]$

236. $a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} (a, b > 0)$ $[\min(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})]$

237. $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$ $[1]$

238. $a_n = \frac{1}{a^n + b^n} (a, b > 0)$ $[\min(a, b)]$

239. $a_n = (-1)^{n-1} \{\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\}^p$ $[2^p]$

240. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (\frac{n}{e})^n$ $[1]$

241. $a_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}$ $[1]$

Najděte obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, je-li

242. $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, x_0 = 1$ $[<0,2>]$

243. $a_n = (\frac{2n-1}{3n+2})^n, x_0 = -2$ $\left[(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})\right]$

244. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, x_0 = 0$ $[(-1,1>]$

245. $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}3^n}, x_0 = 1$ $[<-2,4)]$

246. $a_n = \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}, x_0 = -2$ $[(-3,-1)]$

247. $a_n = \frac{5^n+(-3)^n}{n+1}, x_0 = 0$ $\left[<-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})\right]$

248. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}, x_0 = -1$ $[<-2,0>]$

249. $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}, x_0 = -3$ $[<-4,-2>]$

250. $a_n = \sqrt[n]{a} - 1, x_0 = 0, a > 0, a \neq 1$ $[<-1,1)]$

251. $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}, x_0 = 1$ $[<0,2>]$

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninou řadu

252. $f(x) = e^{-x^2}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}; x \in R\right]$

253. $f(x) = \cos^2 x$ $\left[1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}; x \in R\right]$

254. $f(x) = \sin 3x \sin 5x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}(1-2^{4n})x^{2n}; x \in R\right]$

255. $f(x) = \sin^3 x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!} x^{2n+1}; x \in R\right]$

256. $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+2}; x \in (-1,1)\right]$

257. $f(x) = \frac{5x-4}{x+2}$ $\left[-2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^{n-1}}{2^n} x^n; x \in (-2,2)\right]$

258. $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ $\left[-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n 3^{n+1}}{3^{n+1}}x^n; x\in(-1,1)\right]$

259. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x\in(-1,1)\right]$

260. $f(x)=\ln\frac{3-2x}{2+3x}$ $\left[\ln\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(-\frac{3}{2})^n-(\frac{2}{3})^n\}\frac{x^n}{n}; x\in(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}>\right]$

261. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x\in(-1,1)\right]$

262. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ $\left[1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x\in(-1,1)\right]$

263. $f(x)=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x\in(-1,1)\right]$

264. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ $\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}; x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right]$

265. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arcotg}x$ $\left[x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}; x\in<-1,1>\right]$

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninnou řadu

266. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x\in<-1,1>\right]$

267. $f(x)=\arcsin x$ $\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x\in<-1,1>\right]$

268. $f(x)=\operatorname{arcotg}\frac{x+3}{x-3}$ $\left[-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x\in<-3,-3>\right]$

269. $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{n+1}+(-1)^n(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}\}; |x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

270. $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}x^n; x\in(-1,1)\right]$

271. $f(x)=\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha; x\in(-1,1)\right]$

272. $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arcotg}x$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}; x\in(-1,1)\right]$

273. $f(x) = x \operatorname{arcotg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}; x \in < -1, 1 >\right]$

274. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ $\left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}; x \in < -1, 1 >\right]$

275. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})x^n; x \in (-1, 1)\right]$

276. $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{u}\frac{1}{k!}x^n; x \in (-1, 1)\right]$

277. $f(x) = \operatorname{arcotg}^2 x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1})\frac{x^{2n}}{n}; x \in < -1, 1 >\right]$

278. $f(x) = e^x \sin x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n; x \in R\right]$

279. $f(x) = e^x \cos x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos(\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n; x \in R\right]$

280. $f(x) = (\frac{\arcsin x}{x})^2$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}; |x| \leq 1\right]$

Pomocí rozvoje v mocninnou řadu vypočtěte integrály

281. $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}; x \in R\right]$

282. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; x \in R\right]$

283. $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left[x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{4n+1}}{(2n)!!(4n+1)}; x \in (-1, 1)\right]$

284. $\int\limits_0^x \frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}$ $\left[\frac{x^3}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!x^{2n+3}}{(2n)!!(2n+3)}; x \in < -1, 1 >\right]$

# 14 Fourierovy řady

Teorie

*Příklad 285* : Stanovíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{pro} \quad -\pi \le x \le 0 \end{cases}$ podle základního trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Vypočteme koeficienty $a_k$ , $b_k$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 \, d\xi = 1 \,, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos k\xi \, d\xi = \frac{1}{k} [\sin k\xi]_0^\pi \,, \quad k = 1, 2, \dots \,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin k\xi \, d\xi = -\frac{1}{k} [\cos k\xi]_0^\pi = -\frac{1}{k} [(-1)^k - 1] \,, \quad k = 1, 2, \dots \,.$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$s(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, je-li

286. $f(x) = |x|$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ $\left[ \frac{\pi}{2} - 4 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{\pi\,(2n+1)^2}; \frac{\pi^2}{8} \right]$

287. $f(x) = \pi^2 - x^2$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ $\left[ \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx; \frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{12} \right]$

288. $f(x) = \operatorname{sign} x$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\left[ \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}; \frac{\pi}{4} \right]$

289. $f(x) = \sin ax \quad a \notin Z$ $\left[ \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2} \right]$

290. $f(x) = \cos ax \quad a \notin Z$ $\left[ \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \{ \frac{1}{2a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2} \} \right]$

291. $f(x) = e^{ax} \quad a \neq 0$ $\left[ \frac{2}{\pi} \sinh a\pi \{ \frac{1}{2a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \} \right]$

292. $f(x) = \frac{q \sin x}{1-2q\cos x+q^2} \quad |q| < 1$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx; \text{zaveďte } e^{ix} = z\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

293. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right]$

294. $f(x) = x, x \in (a, a+2l)$ $\left[a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l})\right]$

295. $f(x) = x^2, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right]$

296. $f(x) = e^{ax}, x \in (-h, h)$ $\left[2 \sinh ah \{\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos(\frac{n\pi x}{h}) - n \sin(\frac{n\pi x}{h})}{(ah)^2 + (\pi n)^2}\}\right]$

297. $f(x) = x \cos x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\left[\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2-1)^2} \sin 2nx\right]$

298. $f(x) = e^x - 1, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2})\} - 1\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkcí $f_n(x) = \sin^n x$ a $g_n(x) = \cos^n x$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

299. $f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ $\left[g_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right]$

300. $f_3(x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ $\left[g_3(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right]$

301. $f_4(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$ $\left[g_4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right]$

302. $f_5(x) = -\frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{16}\sin 3x - \frac{1}{16}\sin 5x$ $\left[g_5(x) = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

303. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0, \pi)$ (kosinová řada) $\left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right]$

304. $f(x) = x^2, x \in (0, \pi)$ (sinová řada) $\left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\{\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2}[(-1)^n - 1]\} \sin nx\right]$

305. $f(x) = \sin ax, a \in Z, x \in (0, \pi)$ (kosinová řada) $\left[\frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{a^2 - (2n+1)^2} \text{pro } a \text{ sudé}\right]$

$\left[\frac{4a}{\pi}\{\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{a^2 - 4n^2}\} \text{pro } a \text{ liché}\right]$

306. $f(x)=\cos ax, a\in Z, x\in(0,\pi)$ (sinová řada) $\left[-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{a^2-(2n+1)^2}\text{ pro } a \text{ sudé}\right]$

$\left[-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{a^2-4n^2}\text{ pro } a \text{ liché}\right]$

307. $f(x)=x(\frac{\pi}{2}-x), x\in(0,\frac{\pi}{2})$ podle soustavy

$\{\cos(2n-1)x\}, n\in N$ $\left[-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\{1+\frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\}\cos(2n-1)x\right]$

$\{\sin(2n-1)x\}, n\in N$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}+\frac{8}{(2n-1)^3}\}\sin(2n-1)x\right]$

Integrací Fourierova rozvoje funkce $f(x)=x$ najděte rozvoj funkcí $x^2, x^3, x^4, x^5$ pro $x\in(-\pi,\pi)$

308. $f(x)=x$ $\left[2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right]$

309. $f(x)=x^2$ $\left[\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}(-1)^n\right]$

310. $f(x)=x^3$ $\left[2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\sin nx\right]$

311. $f(x)=x^4$ $\left[\frac{\pi^4}{5}+8\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6-\pi^2n^2}{n^4}\cos nx\right]$

312. $f(x)=x^5$ $\left[2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{120-20\pi^2n^2+\pi^4n^4}{n^5}\sin nx\right]$

## 15 Limity, derivace a diferenciál funkcí více reálných proměnných

Teorie

*Příklad 313* : Je dána funkce $f$ předpisem $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ a body $M = [3,4]$, $Q = [2,1]$.

a) Rozhodněte o spojitosti funkce $f$.

b) Stanovte diferenciál funkce $f$ v bodě $M$.

c) Stanovte derivaci funkce $f$ v bodě $M$ ve směru vektoru $\vec{v} = (1,-1)^T$.

d) Stanovte směr a velikost největšího spádu funkce $f$ v bodě $Q$.

Řešení:

a) Funkce $f$ je spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$ (polynomy jsou spojité funkce na $\mathbb{R}^2$). Musíme rozhodnout pouze o spojitosti v bodě $[0,0]$, tzn. ověřujeme zda platí $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

Přechodem k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dostaneme $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2}$. Poslední limita závisí na volbě úhlu $\varphi$, tedy neexistuje a daná funkce není spojitá.

b) Pro parciální derivace funkce $f$ platí $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-(x+y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2-2yx}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-(x+y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2-2yx}{(x^2+y^2)^2}$. V bodě $M = [3,4]$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{-17}{625}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-31}{625}$ a diferenciál funkce $f$ v bodě $M$ je $df(M,h) = \frac{-17}{625}\,dx + \frac{-31}{625}\,dy$.

c) Derivaci funkce $f$ v bodě $M$ ve směru vektoru $\vec{v} = (1,-1)^T$ vypočítáme pomocí vztahu $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M) = \operatorname{grad} f(M)\cdot\vec{v} = \left(\frac{-17}{625}, \frac{-31}{625}\right)\cdot(1,-1)^T = \frac{14}{625}$.

d) Směr největšího spádu funkce $f$ v bodě $Q$ je dán vektorem $-\operatorname{grad} f(Q) = \left(\frac{-7}{25}, \frac{-1}{25}\right)$, jeho velikost je $\|\vec{v}\| = \frac{1}{25}\sqrt{50}$.

*Příklad 314* : Spočítejte derivaci funkce $f = \frac{x^3+xy^2}{y^2}$, $f(0,0) = 0$ v bodě $[0,0]$ ve směru vektoru $\vec{v} = (1,1)^T$.

Z definice dostaneme $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f([0,0]+t(1,1))-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{t^3+t\,t^2}{t^2}-0}{t} = 2$.

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f([0,0]+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{t^3+t\,0}{0}-0}{t}$ neexistuje.

Rozhodněte o spojitosti fce $f$ v bodě $[0,0]$:

315. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ , $f(0,0) = 0$ [není spojitá]

316. $f(x,y) = \frac{x^2+\sin y^2}{y}$ , $f(0,0) = 0$ [není spojitá]

317. $f(x,y) = \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}$ , $f(0,0) = 0$ [je spojitá]

318. $f(x,y) = (1+\sin(x-y))^{\ln|x-y|}$ , $f(0,0) = 1$ [je spojitá]

Rozhodněte, zda fce $f$ v bodě $[0,0]$ a ve směru $(1,1)$ roste nebo klesá

319. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin x$ , [fce roste]

320. $f(x,y) = -\operatorname{tg} y\,\mathrm{e}^x$ , [fce klesá]

321. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\mathrm{e}^y}$ , [fce je konstantní]

322. $f(x,y) = -\ln|y+x+1|\ \cos x$ , [fce klesá]

Najděte diferenciál funkce $f$ v bodech $[0,0]$ a $[1,1]$

323. $f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , $f(0,0) = 0$ $\left[df = 0\,dx + 0\,dy\,,\ df = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,dx + \frac{3}{2\sqrt{2}}\,dy\right]$

324. $f(x,y) = (y+2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ , $f(0,0) = 0$ [$df = \pi\,dx + 0\,dy$ , neexistuje]

# 16 Řešení funkcionálních rovnic, tečná rovina

Teorie

<u>*Příklad 325*</u> : Je dána funkce $F$ předpisem $F(x,y) = x^2y^3 + 2x - 3y$ a body $A = [3,-1]$, $B = [1,1]$.

a) Pomocí věty o implicitní funkci zjistěte, jestli existuje jediné, spojité řešení $y$ rovnice $F(x,y) = 0$ na okolí bodů $A$, $B$. Případně určete derivaci $y'$ v příslušném bodě.

b) Stanovte vektor normály a tečnou rovinu ke grafu funkce $F$ v bodě grafu $C = [2,1,?]$.

c) Stanovte tečnu k hladině funkce $F$ procházející bodem $D = [1,0]$.

a) Ověříme předpoklady věty o implicitní funkci:

1. Funkce $F(x,y) = x^2y^3 + 2x - 3y$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$, proto i spojitá na okolí bodů $A$, $B$.
2. Rovnosti $F(A) = 0$, $F(B) = 0$ jsou splněny.
3. Parciální derivace $F_y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 - 3$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a platí $F_y(A) = 24 \neq 0$, $F_y(B) = 0$.

Na okolí bodů $A$ tedy existuje jediné, spojité řešení $y$ rovnice $F(x,y) = 0$; derivace řešení je $y'(3) = -\frac{F_x(A)}{F_y(A)} = -\frac{2xy^3+2}{3x^2y^2-3}\Big|_{([3,-1])} = -\frac{-4}{24} = \frac{1}{6}$.

O řešení rovnice $F(x,y) = 0$ na okolí bodu $B$ nemůžeme na základě věty o implicitní funkci nic říci.

b) Vektor normály $\vec{n}$ ke grafu funkce $F(x,y) = x^2y^3 + 2x - 3y$ v bodě grafu $C = [2,1,F(2,1)] = [2,1,5]$ je $\vec{n} = (F_x(2,1), F_y(2,1), -1) = (6,9,-1)$ a tečná rovina je dána rovnicí $z - 5 = 6(x-2) + 9(y-1)$.

c) Tečna k hladině funkce $F$ procházející bodem $D = [1,0]$ je dána rovnicí $0 = F_x(D)(x-1) + F_y(D)(y-0) \Rightarrow 0 = 2(x-1) - 3y$.

Pomocí věty o implicitní funkci zjistěte, jestli existuje jediné, spojité řešení $y$ rovnice $F(x,y) = 0$ na okolí bodů $A$, $B$, $C$. Případně určete derivaci $y'$ v příslušném bodě.

326. $F(x,y) = -\frac{2}{3}x^2 + y^2 - xy - 2x - 3y$, $A = [0,3]$, $B = [1,-1]$, $C = [-3,0]$.

$[A : y'(0) = \frac{5}{3},\ B : Neex.,\ C : Neex.]$

327. $F(x,y)=x^2+4y^2-2x+16y+13\,,\; A=[-1,-2],\, B=[1,-1],\, C=[1,0]\,.$
$[A: Neex,\; B: y'(0)=0\,,\; C: Neex.]$

328. Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z=z(x,y)$ implicitně definované rovnicí $z^3-3xyz-8=0$ v bodě $A=[0,3]\,.$ $\big[A: z_x=\frac{3}{2}\,,\; z_y=0\,,\,\big]$

329. Ke grafu funkce $f$ najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho$.
$f(x,y)=x^2+y^2-x\,,\quad \varrho: 3x+2y-z=0\,.$
$[3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0]$

330. K nulové hladině funkce $f$ najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho$.
$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21\,,\; \varrho: x+4y+6z=0\,.$
$[(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0\,,\quad (x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0]$

# 17 Extrémy funkcí více proměnných

Teorie

## 17.1 Optimalizační úlohy bez vazeb

Příklad 331 : Najdeme extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$. Stacionární bod vypočteme ze soustavy

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [x_0,y_0] = [1,0]\,.$$

Hessova matice funkce $f$ má tvar $\mathbb{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Potom

| Stac. bod | $\mathbb{H}$ | Hlavní minory $\mathbb{H}$ | vlastní čísla $\mathbb{H}$ | Typ bodu |
|---|---|---|---|---|
| $[1,0]$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ | $M_1 = 2 > 0$<br>$M_2 = 5 > 0$ | $\lambda_1 = 1 > 0$<br>$\lambda_1 = 3 > 0$ | bod minima |

Příklad 332 : Najdeme extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 6xy + 2y^2$. Stacionární bod vypočteme ze soustavy

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 6y &= 0 \\ 6x + 4y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [x_0,y_0] = [0,0]\,.$$

Hessova matice funkce $f$ má tvar $\mathbb{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Potom

| Stac. bod | $\mathbb{H}$ | Hlavní minory $\mathbb{H}$ | vlastní čísla $\mathbb{H}$ | Typ bodu |
|---|---|---|---|---|
| $[0,0]$ | $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ | $M_1 = 2 > 0$<br>$M_2 = -28 < 0$ | $\lambda_1 = 3 + \sqrt{37} > 0$<br>$\lambda_1 = 3 - \sqrt{37} < 0$ | sedlový bod |

Najděte lokální extrémy funkce $f$

333. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $\quad [[1,1],[-1,-1]\ \text{min}, \quad [0,0]\ \text{sedlo}]$

334. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ $\quad [[1,2]\ \text{min}]$

335. $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ $\quad [[-1,-2,3]\ \text{min}]$

336. $f(x,y) = xy + z(a - x - 2y - 3z)$ $\quad [[\frac{a}{5}, \frac{a}{10}, \frac{a}{10}]\ \text{sedlo}]$

337. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ $\quad \Big[\,[0,\pm1],[\pm1,0]\ \text{sedla}, \quad [\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, \frac{1}{\sqrt{(2e)}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, -\frac{1}{\sqrt{(2e)}}]\ \text{min}, [-\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, \frac{1}{\sqrt{(2e)}}], [\frac{1}{\sqrt{(2e)}}, -\frac{1}{\sqrt{(2e)}}]\ \text{max}\Big]$

## 17.2 Optimalizační úlohy s vazbami

Teorie

*Příklad 338* : Stanovte extrém funkce $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ na přípustné množině $V$ určené podmínkou $h(x,y) = x + y = 0$.

Vázané extrémy budeme nejdříve hledat pomocí Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + \lambda(x+y).$$

Najdeme její stacionární body

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial x} &= 3x^2 + y^2 + 10x + \lambda = 0 \\ \tfrac{\partial L}{\partial y} &= 2xy + 2y + \lambda = 0 \\ \tfrac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x_1 = 0,\ y_1 = 0\,, \lambda_1 = 0 \\ &x_2 = -2,\ y_2 = 2\,, \lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je

$$d^2L = d^2f + \lambda d^2h = (6x+10)\,dx^2 + 4y\,dxdy + (2x+2)\,dy^2$$

a po dosazení vazební podmínky

$$dh = dx + dy = 0$$

dostaneme

$$d^2L = (8x - 4y + 12)\,dx^2\,.$$

V bodě $[0,0,0]$ je $d^2L = 12\,dx^2 > 0$, tedy bod $[0,0]$ je bodem minima funkce $f$ vzhledem k množině $V$,
v bodě $[-2,2,4]$ je $d^2L = -12\,dx^2 < 0$, tedy bod $[-2,2]$ je bodem maxima funkce $f$ vzhledem k množině $V$.

Tento příklad lze také řešit přechodem k jedné proměnné.

Z vazby $x + y = 0$ plyne $y = -x$ a po dosazení do původní funkce dostaneme

$$f(x,y) = f(x) = x^3 + x^3 + 5x^2 + x^2 = 2x^3 + 6x^2\,.$$

Pro tuto funkci je $f'(x) = 6x^2 + 12x$ a stacionární body jsou $x_1 = 0\,,\ x_2 = -2$. Druhá derivace má tvar $f''(x) = 12x + 12$ a $f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow$ v bodě $[0,0]$ je minimum funkce $f$ vzhledem k množině $V$, podobně $f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow$ v bodě $[-2,2]$ je maximum funkce $f$ vzhledem k množině $V$.

Nyní budeme hledat extrém stejné funkce $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ na přípustné množině $\widehat{V}$ určené podmínkou $g(x,y) = x + y \le 0$. Kromě extrému na hranici množiny $\partial\widehat{V}$ ($\partial\widehat{V} = V$), teď hledáme i extrémy uvnitř množiny $V$ (zde $g(x,y) < 0$). Tedy $\operatorname{grad} f = \vec{0}$, neboli

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial y} &= 2xy + 2y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x_1 = 0,\ y_1 = 0\,, && x_4 = -1,\ y_4 = -\sqrt{7}\,, \\ &x_3 = -\tfrac{10}{3},\ y_3 = 0\,, && x_5 = -1,\ y_5 = \sqrt{7}\,. \end{aligned}$$

Pouze body $[0,0], [-\frac{10}{3},0], [-1,-\sqrt{7}]$ patří do množiny $\widehat{V}$ a pro druhý diferenciál funkce $f$ v těchto bodech platí

$$d^2 f([0,0];\vec{h}) = (6x+10)\,dx^2 + 4y\,dxdy + (2x+2)\,dy^2|_{[0,0]} = 12\,dy^2 > 0\,,$$

$$d^2 f([-\tfrac{10}{3},0];\vec{h}) = -\tfrac{44}{3}\,dx^2 < 0\,, \quad d^2 f([-1,-\sqrt{7}];\vec{h}) = 4\,dx^2 - 4\sqrt{7}\,dxdy\,.$$

Bod $[0,0]$ je bodem minima funkce $f$ vzhledem k $\mathbb{R}^2$, tedy i vzhledem k množině $\widehat{V}$, podobně bod $[-\frac{10}{3},0]$ je bodem maxima funkce $f$ vzhledem k množině $\widehat{V}$.
V bodě $[-1,-\sqrt{7}]$ ve směru $(dx,dy) = (1,0)$ je $d^2 f = 4 > 0$ a funkce $f$ má v tomto směru minimum, ale ve směru $(dx,dy) = (1,1)$ je $d^2 f = 4 - 4\sqrt{7} < 0$ a $f$ má v tomto směru maximum. Bod $[-1,-\sqrt{7}]$ je tedy sedlovým bodem funkce $f$.

Zbývá rozhodnout bod $[-2,2] \in \partial\widehat{V}$, pro který je $\lambda = 4 > 0 \Rightarrow \operatorname{grad} f(-2,2) = -4 \operatorname{grad} g(-2,2)$, (gradient funkce $f$ směřuje do množiny $\widehat{V}$) a funkce $f$ může nabývat pouze minima vzhledem k $\widehat{V}$, ale vzhledem k hranici $\partial\widehat{V}$ nabývá maxima. Proto v bodě $[-2,2]$ není extrém funkce $f$ vzhledem k množině $\widehat{V}$.

*Příklad 339*: Stanovte extrém funkce $f(x,y,z) = xy + yz$ na přípustné množině $V$ určené podmínkami $h_1(x,y,z) = y+z-2 = 0$, $h_2(x,y,z) = x^2+y^2-2 = 0$, $x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0$.

Vázané extrémy budeme hledat pomocí Lagrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = xy + yz + \lambda_1(y+z-2) + \lambda_2(x^2+y^2-2)\,.$$

Najdeme její stacionární body

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial x} &= y + 2\lambda_2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \tfrac{-y}{2x} \\ \tfrac{\partial L}{\partial y} &= x + z + 2\lambda_2 y + \lambda_1 = 0 \\ \tfrac{\partial L}{\partial z} &= y + \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -y \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x + z + 2\big(\tfrac{-y}{2x}\big)y - y = 0 \\ &x^2 + zx - y^2 - yx = 0 \\ &\qquad\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= z + y - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 - y \\ \tfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 - y^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x^2 + (2-y)x - y^2 - yx = 0 \\ &2 - y^2 + (2-y)x - y^2 - yx = 0 \end{aligned}$$

Odtud $2(1-y^2)+(2-2y)x=0 \Rightarrow (1-y)(1+y+x)=0$ a protože $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, tak jediný stacionární bod je $B=[1,1,1]$ a $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$. Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je

$$d^2L = 2\lambda_2\,dx^2 + 2\,dxdy + 2\lambda_2\,dy^2 + 2\,dydz$$

a po dosazení vazebních podmínek v bodě $B=[1,1,1]$

$$dh_1 = dz + dy = 0 \Rightarrow dz = -dy\,, \quad dh_2 = 2x\,dx + 2y\,dy = 0 \Rightarrow dx = -dy$$

dostaneme pro $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

$$d^2L = (-4-2-4-2)\,dy^2 < 0 \quad \text{pro} \quad dx = dz = -dy \neq 0\,.$$

Tedy bod $[1,1,1]$ je bodem maxima funkce $f$ vzhledem k množině $V$.

Najděte lokální extrémy funkce $f$ vzhledem k množině $V$

340. $f(x,y)=2x^2+xy\,, \quad V: 3x+2y-2=0\,,$
$\left[[-1,\frac{5}{2}]\ \text{min}\right]$

341. $f(x,y)=2x^2+xy\,, \quad V: -3x-2y+2\leq 0\,,$
[nemá extrém vzhledem k $V$]

342. $f(x,y)=x^2+12xy+2y^2\,, \quad V: 4x^2+y^2=25\,,$
$\left[[\frac{3}{2},4],[-\frac{3}{2},-4]\ \text{max}\,, \quad [2,-3],[-2,3]\ \text{min}\right]$

343. $f(x,y)=x^2+12xy+2y^2\,, \quad V: 4x^2+y^2\leq 25\,,$
$\left[[\frac{3}{2},4],[-\frac{3}{2},-4]\ \text{max}\,, \quad [2,-3],[-2,3]\ \text{min}\right]$

344. $f(x,y)=x-2y+2z\,, \quad V: x^2+y^2+z^2=1\,,$
$\left[[\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]\ \text{max}\,, \quad [-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}]\ \text{min}\right]$

Najděte min. a max. hodnoty funkce $f$ vzhledem k množině $V$

345. $f(x,y)=x+y+z\,, \quad V: x^2+y^2\leq z\leq 1\,,$ $\left[-\frac{1}{2}\ \text{min}\,, \quad 1+\sqrt{2}\ \text{max}\right]$

346. $f(x,y)=x^2+2y^2+3z^2\,, \quad V: x^2+y^2+z^2\leq 100\,,$ $[0\ \text{min}\,, \quad 300\ \text{max}]$

# 18 Vícenásobné integrály

Teorie

## 18.1 Dvojné integrály

*Příklad 347*: Máme množinu $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, 4y \geq x, y \leq 3\}$. Vypočtěte

$$I = \iint\limits_M \frac{y^2}{x^2}\, dxdy\,.$$

Průsečík funkcí $y = \frac{x}{4}, y = \frac{1}{x}$ je bod $[2, \frac{1}{2}]$, tedy $\frac{1}{2} \leq y \leq 3$ a pro $x$ platí $4y \geq x \geq \frac{1}{y}$. Tudíž

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} \int\limits_{\frac{1}{y}}^{4y} \frac{y^2}{x^2}\, dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} \left[-\frac{y^2}{x}\right]_{\frac{1}{y}}^{4y} dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} \left[-\frac{y}{4} + y^3\right] dy = \left[-\frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{3} = \frac{1225}{64}\,.$$

348. $\iint\limits_{y^2 \leq x \leq y+2} y\, \mathrm{e}^x\, dx\, dy$ $\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + \frac{5}{2}\mathrm{e}\right]$

349. $\iint\limits_{x^2 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}} \frac{x}{(1+y)^2}\, dx\, dy$ $[0]$

350. $\iint\limits_{1 \leq x^2 \leq y^2 \leq 4} |x\, y|\, dx\, dy$ $\left[\frac{15}{2}\right]$

351. $\iint\limits_M \frac{1}{x+y+1}\, dx\, dy\,,$ kde $M$ je trojúhelník s vrcholy $[1,2], [5,2], [4,4]$
$\left[\frac{72}{5} \ln 9 + 8 \ln 16\right]$

352. $\iint\limits_M |x|\, dx\, dy\,,$ kde $M$ je dána nerovnostmi $x^2 \leq y\,,\ 4x^2 + y^2 \leq 12$
$\left[36\sqrt{3} - 14\right]$

353. $\iint\limits_M [2x + y - 1]\, dx\, dy\,,$ kde $M$ je dána nerovnostmi $2x \geq y \geq x\,,\ x \leq 1$
$\left[\frac{2}{3}\right]$

354. $\iint\limits_M \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy\,,$
kde $M$ je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

WolframAlpha

## 18.2 Trojné integrály

<u>*Příklad 355*</u>: Máme množinu $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, x^2+y^2+z^2 \le 4\}$. Vypočtěte objem tělesa $M$, tj. integrál

$$I = \iiint\limits_M 1 \; dxdydz \,.$$

Přechodem k cylindrickým souřadnicím $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$ dostaneme $r^2 \le 1$, $z^2 \le 4 - r^2$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a $dxdy = r\,drd\varphi$, tedy

$$I = \iiint\limits_M 1 \; dz\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \; dz\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\sqrt{4-r^2} \; r \;\; dr\,d\varphi =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 4 - r^2 \\ du = -2r\,dr \end{array}\right] = \int_0^{2\pi}\int_4^3 -\sqrt{u} \;\, du\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_3^4 d\varphi = \tfrac{4}{3}\,\pi(8 - \sqrt{27}) \,.$$

356. $\iiint\limits_V 1 \; dx\,dy\,dz$,
kde $V$ je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 - z^2 \le 1$, $0 \le z \le 1$ $\qquad \left[\pi\,\frac{4}{3}\right]$

357. $\iiint\limits_V \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2} \; dx\,dy\,dz$,
kde $V$ je dána nerovnostmi $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2, 0 \le x, \ 0 \le y$ $\qquad \left[-\frac{1}{60} + \frac{1}{16}\ln 5\right]$

358. $\iiint\limits_V x^2yz^3 \; dx\,dy\,dz$,
kde $V$ je dána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$ $\qquad \left[\frac{1}{312}\right]$

359. $\iiint\limits_V \frac{x+y}{4+z} \; dx\,dy\,dz$,
kde $V$ je dána nerovnostmi $x + y \le 3$, $0 \le y$, $0 \le x$, $0 \le z \le 4$ $\qquad [9\ln 2]$

360. $\iiint\limits_V \frac{xy}{(4+z)^2} \; dx\,dy\,dz$,
kde $V$ je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 4z \le 16$ $\qquad [0]$

361. $\iiint\limits_V x^2yz \; dx\,dy\,dz$,
kde $V$ je dána nerovnostmi $4x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, \ y \ge 0, \ z \le 0$ $\qquad \left[-\frac{1}{2^3}\frac{1}{105}\right]$