

## Připomenutí základních matematických pojmů

**Rozklad množiny** (= „takový systém podmnožin, že jsou navzájem párově disjunktní a jejich sjednocením je rozkládaná množina“)

### Příklad 0:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ , jedním jejím rozkladem je např. rozklad  $\{\{1,3,5\}, \{2,4\}, \{6\}\}$

Používaná terminologie:  $\{1,3,5\}, \{2,4\}, \{6\}$  jsou třídy (bloky) rozkladu.

**Kartézský součin dvou množin** (= „množina všech uspořádaných dvojic“)

### Příklad 1.

Jsou dány množiny  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ . Vytvořte kartézské součiny  $A \times B$ ,  $B \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A \times B \times A$

$R = A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$ ,

$S = B^2 = B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ ,

$T = B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$ , Kartézský součin není komutativní !!!!!

Kartézský součin je asociativní, takže  $A \times B \times A = (A \times B) \times A = A \times (B \times A)$

$U = A \times B \times A = \{(a, 1, a), (a, 1, b), (a, 1, c), (a, 2, a), (a, 2, b), (a, 2, c),$   
 $(b, 1, a), (b, 1, b), (b, 1, c), (b, 2, a), (b, 2, b), (b, 2, c),$   
 $(c, 1, a), (c, 1, b), (c, 1, c), (c, 2, a), (c, 2, b), (c, 2, c)\}$ ,

(zápis tvaru  $((1,c),1)$  se vzhledem k asociativitě nepoužívá

**Binární relace z množiny do množiny**(= „podmnožina kartézského součinu“)

### Příklad 2.

Jsou dány množiny  $X = \{1, 4, 6, 7\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

Vyjádřete relaci  $\rho \subseteq X \times Y$  definovanou tak, že  $x \rho y$  právě tehdy, když  $x \leq y$

$\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (4, 5), (4, 7), (6, 7), (7, 7)\}$ ,

Používané značení:  $(1, 2) \in \rho$  nebo  $1 \rho 2$

**Příklad 3.**

Jsou dány množiny  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, -3\}$  Rozhodněte, které z následujících množin jsou relace z A do B:

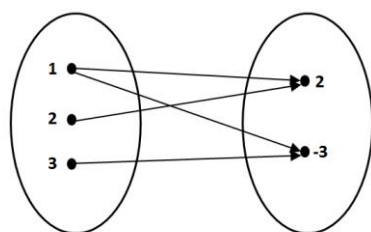
$M_1 = \{(1, 2)\}$  , ano, je relace z A do B

$M_2 = \{(1, 2), (1, -3)\}$  , ano, je relace z A do B

$M_3 = \{(2, 1)\}$  , ne, 2 není prvkem A

$M_4 = \emptyset$  , formálně ano, prázdná množina je podmnožinou každé množiny

$M_5 = \{(1, 2), (1, -3), (2, 2), (3, -3)\}$  , ano, je relace z A do B, graficky znázorněná níže



**VZORY**

**OBRAZY**

**Inverzní relace** ( $= y \rho^{-1} x$  právě tehdy, když  $x \rho y$ , uspořádané dvojice jsou „obráceně“)

**Příklad 4:**

Vytvořte inverzní relaci k relaci  $\rho$  z Příkladu 2.

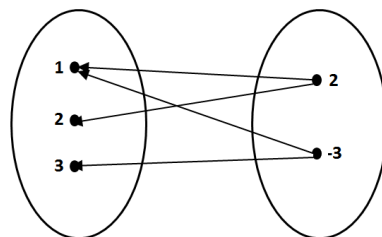
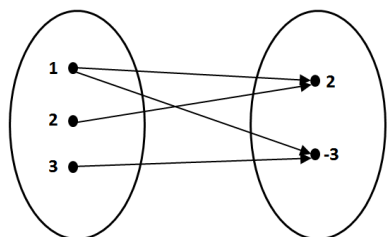
$$\rho^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1), (5, 4), (7, 4), (7, 6), (7, 7)\},$$

$$\rho^{-1} \subseteq Y \times X, \text{ zřejmě platí } y \rho^{-1} x \text{ právě tehdy, když } y \geq x$$

**Příklad 5:**

Vytvořte inverzní relaci k relaci  $M_5$  z Příkladu 3.

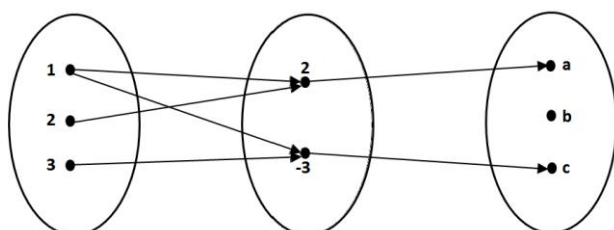
$$M_5 = \{(1, 2), (1, -3), (2, 2), (3, -3)\} \quad M_5^{-1} = \{(2, 1), (-3, 1), (2, 2), (-3, 3)\},$$



**Skládání relací** ( $= R \subseteq X \times Y$ ,  $S \subseteq Y \times Z$ ,  $R \circ S \subseteq X \times Z$  taková, že  $(x, z) \in R \circ S$  právě tehdy, když existuje  $y$  takové, že  $(x, y) \in R$  a  $(y, z) \in S$ )

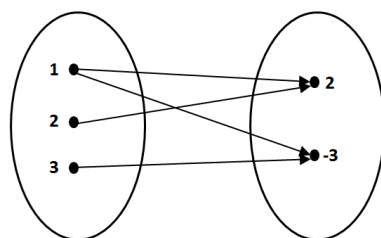
**Příklad 6.**

Jsou dány množiny  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, -3\}$ ,  $C = \{a, b, c\}$  a relace  $R = \{(1, 2), (1, -3), (2, 2), (3, -3)\}$ ,  $S = \{(2, a), (-3, c)\}$ . Vytvořte relaci  $R \circ S$



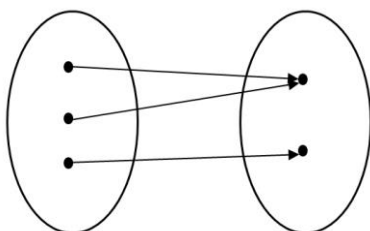
$$R \circ S = \{(1, a), (1, c), (2, a), (3, c)\}$$

**Funkce (zobrazení)** (= taková relace, kde každému vzoru přísluší nejvíce jeden obraz)



Relace na obrázku není funkce, vadí nejednoznačné zobrazení vzoru 1:  
 $R = \{(1, 2), (1, -3), (2, 2), (3, -3)\}$

**Prostá (injektivní) funkce (zobrazení)** (= taková funkce, kde každému obrazu přísluší nejvíce jeden vzor)

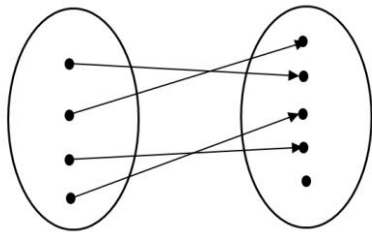


Je funkce, ale není prostá.

**VZORY**

**OBRAZY**

Terminologie používaná u funkcí - VZORY = definiční obor, OBRAZY = obor hodnot.



Je funkce prostá

### Jak chápat značení související s funkcemi?

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

definičním oborem funkce  $\delta$  je kartézský součin množin  $Q$  a  $\Sigma$ , tedy

$$D(\delta) = Q \times \Sigma$$

oborem funkčních hodnot je množina  $Q$ , tedy  $H(\delta) = Q$

každé dvojici  $(q, a)$  kde  $q \in Q$  a  $a \in \Sigma$  tedy jednoznačně přísluší nějaké  $q \in Q$

$\delta(q_1, a) = q_2$  funkční hodnotou funkce  $\delta$  pro konkrétní vstupní hodnoty  $q_1$  a  $a$  je  $q_2$  (předpokládá se, že  $q_1, q_2 \in Q$  a  $a \in \Sigma$ )

**Vlastnosti relace  $R$  na množině  $A$**  (tj. relace = podmnožina kartézského součinu  $A \times A$ )

$R$  je reflexivní relace - pro všechna  $a \in A$  platí  $aRa$

$R$  je symetrická relace - pro všechna  $a, b \in A$  platí  $aRb$  právě tehdy, když  $bRa$

$R$  je tranzitivní relace - pro všechna  $a, b, c \in A$  platí jestliže  $aRb$  a  $bRc$ , pak  $aRc$

**Ekvivalence  $E$  je relace na množině  $A$ , která je reflexivní, symetrická a tranzitivní**

Každé ekvivalenci jednoznačně přísluší rozklad množiny  $A$  a naopak, každému rozkladu množiny  $A$  jednoznačně přísluší relace ekvivalence na  $A$ .

**Příklad 7:**

Sestrojte relaci ekvivalence k rozkladu  $\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$ .

| <i>E</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1        | 1 |   | 1 |   | 1 |   |
| 2        |   | 1 |   | 1 |   |   |
| 3        | 1 |   | 1 |   | 1 |   |
| 4        |   | 1 |   | 1 |   |   |
| 5        | 1 |   | 1 |   | 1 |   |
| 6        |   |   |   |   |   | 1 |

Množinový zápis výčtem.

$E = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4),$   
 $(3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1),$   
 $(5,3), (5,5), (6,6)\}$

Maticová reprezentace relace. Je-li  
v pozici  $a,b$  jednička, vyjadřuje to  
 $aRb$ , tedy  $(a,b) \in R$ .